

УДК 519.6 : 533.7

Посвящается памяти академика
Анатолия Алексеевича Дородницына

© 1995 г. А. Д. САВЕЛЬЕВ

(Москва)

РАСЧЕТЫ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ КОМПАКТНЫХ СХЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ¹⁾

Рассматривается алгоритм для решения задач вязкого газа на искривленных сетках, основанный на аппроксимации уравнений Навье — Стокса с помощью компактных схем третьего порядка. Приводятся результаты расчетов отрыва турбулентного пограничного слоя скачком уплотнения, обтекания аэродинамического профиля и решеток профилей турбомашин вязким газом.

Введение

Компактные схемы повышенной точности для уравнений Эйлера и Навье — Стокса были предложены А. И. Толстых в начале 70-х годов [1] и получили развитие в ряде последующих работ ([2], [3] и др.). Данные схемы консервативны и содержат в себе информацию о характеристиках гиперболической части аппроксимируемых уравнений, что позволяет построить устойчивые алгоритмы для расчетов течений вязкого газа в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса. К их важным свойствам относятся также наименьшая погрешность аппроксимации среди схем третьего порядка и трехточечность сеточного шаблона в каждом пространственном направлении. Отсутствие «лимитеров потоков» и членов типа «искусственной вязкости» в сочетании с высокой точностью делает схему чувствительной к достаточно тонким эффектам течений на пределе разрешения их разностной сеткой.

В [4] был описан алгоритм для расчетов течений вязкого газа на основе компактных схем третьего порядка и решен ряд задач внешнего обтекания с отрывом ламинарного пограничного слоя. Алгоритмы для расчетов внутренних течений вязкого и невязкого газов с использованием схем третьего и четвертого порядков, а также результаты таких расчетов представлены в [5]. Ниже рассмотрен один из вариантов алгоритма для решения уравнений Навье — Стокса на основе компактных схем третьего порядка применительно к криволинейным сеткам и представлены результаты расчетов с его помощью течений вязкого газа.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-17598).

§ 1. Исходные уравнения и разностный алгоритм

В качестве исходной используется полная нестационарная система двумерных уравнений Навье — Стокса, записанная в консервативном виде. Для сохранения эффективности алгоритма при расчетах течений газа в областях с криволинейными границами и при сильном сгущении координатных линий осуществляется преобразование системы координат. Область течения в физической плоскости (x, y) проецируется на единичный квадрат расчетной плоскости (ξ, η) с помощью отображения общего вида $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, так, как это делается, например, в [6], [7]. При этом якобиан преобразования J отличен от нуля во всей рассматриваемой области и существует якобиан обратного преобразования $J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$, где x_ξ , x_η , y_ξ и y_η — метрические коэффициенты.

Записанная в криволинейных координатах (ξ, η) , система уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial J^{-1}U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} - \text{Re}^{-1} \left[\frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial \xi} + \frac{\partial (G_1 + G_2)}{\partial \eta} \right] = 0,$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho W_\eta \\ \rho u W_\eta + p y_\eta \\ \rho v W_\eta - p x_\eta \\ (e + p) W_\eta \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho W_\xi \\ \rho u W_\xi - p y_\xi \\ \rho v W_\xi + p x_\xi \\ (e + p) W_\xi \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{11} \\ G_{12} \\ G_{13} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{21} \\ G_{22} \\ G_{23} \end{pmatrix},$$

$$e = \rho \left(\frac{h}{\gamma} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h,$$

$$W_\xi = u y_\eta - v x_\eta, \quad W_\eta = v x_\xi - u y_\xi,$$

$$F_{11} = J (\mu + \mu_t) \left[\left(\frac{4}{3} y_\eta^2 + x_\eta^2 \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{3} x_\eta y_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right],$$

$$F_{12} = J (\mu + \mu_t) \left[-\frac{1}{3} x_\eta y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{4}{3} x_\eta^2 + y_\eta^2 \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right],$$

$$F_{13} = u F_{11} + v F_{12} + J \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) (x_\eta^2 + y_\eta^2) \frac{\partial h}{\partial \xi},$$

$$F_{21} = J (\mu + \mu_t) \left[-\left(\frac{4}{3} y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \left(x_\eta y_\xi - \frac{2}{3} x_\xi y_\eta \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right],$$

$$F_{22} = J (\mu + \mu_t) \left[\left(x_\xi y_\eta - \frac{2}{3} x_\eta y_\xi \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \left(\frac{4}{3} x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right],$$

$$F_{23} = u F_{21} + v F_{22} - J \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \frac{\partial h}{\partial \eta},$$

$$G_{11} = J(\mu + \mu_t) \left[- \left(\frac{4}{3} y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(x_\xi y_\eta - \frac{2}{3} x_\eta y_\xi \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right],$$

$$G_{12} = J(\mu + \mu_t) \left[\left(x_\eta y_\xi - \frac{2}{3} x_\xi y_\eta \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\frac{4}{3} x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right],$$

$$G_{13} = uG_{11} + vG_{12} - J \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \frac{\partial h}{\partial \xi},$$

$$G_{21} = J(\mu + \mu_t) \left[\left(\frac{4}{3} y_\xi^2 + x_\xi^2 \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{3} x_\xi y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right],$$

$$G_{22} = J(\mu + \mu_t) \left[- \frac{1}{3} x_\xi y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + \left(\frac{4}{3} x_\xi^2 + y_\xi^2 \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right],$$

$$G_{23} = uG_{21} + vG_{22} + J \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) (x_\xi^2 + y_\xi^2) \frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

Здесь t — время, ρ — плотность, u и v — компоненты вектора скорости в направлениях x и y , p — давление, h — энтальпия, e — полная энергия, γ — отношение удельных теплоемкостей, Pr и Pr_t — ламинарное и турбулентное числа Прандтля, Re — число Рейнольдса.

Система (1.1) дополняется зависимостью коэффициента вязкости μ от энтальпии (температуры) в виде формулы Саттерленда. Коэффициент турбулентной вязкости μ_t определяется по одной из (в простейшем случае по алгебраической) моделей турбулентности. Для ламинарного течения $\mu_t \equiv 0$.

Система (1.1) записана в безразмерном виде. Плотность в ней отнесена к некоторой характерной плотности ρ_1 , компоненты вектора скорости — к u_1 , энтальпия — к u_1^2 , давление — к $\rho_1 u_1^2$, коэффициенты μ и μ_t — к μ_1 , линейные размеры в физической плоскости — к характерному размеру L_1 . В зависимости от конкретной задачи нижний индекс 1 может соответствовать бесконечности, условиям перед скачком уплотнения, критическим при $M = 1$ (M — число Маха) и т. д.

В качестве граничных условий используется задание на твердой поверхности нулевых значений компонент вектора скорости $u_w = v_w \equiv 0$ и энтальпии стенки h_w (индекс w относится к узлам на поверхности). В случае теплоизолированной стенки задается условие $\partial h / \partial n|_w = 0$, где n — местная нормаль к поверхности. Значение плотности ρ_w определяется из решения нестационарного уравнения неразрывности. При наличии на поверхности пограничного слоя пригодно условие $\partial p / \partial n|_w = 0$, следующее из уравнения импульса. В отдельных случаях возможно также определение значения ρ_w на основе решения характеристического уравнения.

На открытых границах ставятся условия с учетом затекания или вытекания потока. В случае втекания потока через границу со сверхзвуковой скоростью, на ней фиксируются соответствующие значения компонент вектора $\varphi = \{\rho, u, v, h\}$. Если же скорость на входе дозвуковая, на границе задаются полное давление, полная энтальпия, угол затекания потока и решается одномерное нестационарное характеристическое уравнение для течения невязкого газа.

Условия на границе, через которую поток вытекает, также ставятся с учетом

значения на ней числа Маха. В случае сверхзвукового потока, для определения параметров течения используется квадратичная экстраполяция на границу компонент вектора φ . Если же на границе $M < 1$, то задается давление, а компоненты вектора скорости и энтальпия экстраполируются.

В алгоритме используются формулы компактного дифференцирования третьего порядка для аппроксимации гиперболической части системы (1.1) и обычные трехточечные разности второго порядка для членов с вязкостью. На сетке $\omega_{\xi, \eta} = \{\xi_i = ih_\xi, \eta_j = jh_\eta, h_\xi, h_\eta = \text{const}\}$ аппроксимация конвективных членов выглядит следующим образом:

$$L_H \varphi = B_\xi^{-1} C_\xi F + B_\eta^{-1} C_\eta G + O(h_\xi^3 + h_\eta^3),$$

где

$$(1.2) \quad B_\xi f = (A_0^\xi - 0.25 \Delta_0^\xi M_\xi) f, \quad C_\xi f = 0.5 h_\xi^{-1} [\Delta_0^\xi - \Delta_-^\xi (T_{0.5}^\xi M_\xi) \Delta_+^\xi] f, \\ B_\eta f = (A_0^\eta - 0.25 \Delta_0^\eta M_\eta) f, \quad C_\eta f = 0.5 h_\eta^{-1} [\Delta_0^\eta - \Delta_-^\eta (T_{0.5}^\eta M_\eta) \Delta_+^\eta] f$$

суть операторы компактного дифференцирования [2],

$$A_0^\xi f = \frac{1}{6} (f_{i-1,j} + 4f_{ij} + f_{i+1,j}), \quad \Delta_0^\xi f = f_{i+1,j} - f_{i-1,j},$$

$$A_0^\eta f = \frac{1}{6} (f_{i,j-1} + 4f_{ij} + f_{i,j+1}), \quad \Delta_0^\eta f = f_{i,j+1} - f_{i,j-1},$$

$$\Delta_+^\xi f = f_{i+1,j} - f_{ij}, \quad \Delta_-^\xi f = f_{ij} - f_{i-1,j},$$

$$\Delta_+^\eta f = f_{i,j+1} - f_{ij}, \quad \Delta_-^\eta f = f_{ij} - f_{i,j-1},$$

$$T_{0.5}^\xi f = \frac{1}{2} (f_{i+1,j} + f_{ij}), \quad T_{0.5}^\eta f = \frac{1}{2} (f_{i,j+1} + f_{ij}).$$

Для определения матриц M_ξ и M_η используются собственные векторы S_ξ, S_η и собственные значения $\lambda_\xi^l, \lambda_\eta^l$ матриц $N^{-1}P$ и $N^{-1}Q$ (см. [2]):

$$\Lambda_\xi = S_\xi^{-1} N^{-1} P S_\xi, \quad M_\xi = N S_\xi D_\xi S_\xi^{-1} N^{-1},$$

$$\Lambda_\eta = S_\eta^{-1} N^{-1} Q S_\eta, \quad M_\eta = N S_\eta D_\eta S_\eta^{-1} N^{-1},$$

где $N = \partial U / \partial \varphi$, $P = \partial F / \partial \varphi$, $Q = \partial G / \partial \varphi$ — якобиевы матрицы, $\Lambda_\xi = \text{diag}\{\lambda_\xi^l\}$, $\Lambda_\eta = \text{diag}\{\lambda_\eta^l\}$, $D_\xi = \text{diag}\{\text{sign } \lambda_\xi^l\}$, $D_\eta = \text{diag}\{\text{sign } \lambda_\eta^l\}$, l принимает значения от 1 до 4.

Диффузные члены системы (1.1) аппроксимируются обычным образом:

$$L_v \varphi = (\Lambda_{\xi\xi} P_1 + \Lambda_{\xi\eta} P_2 + \Lambda_{\eta\xi} Q_1 + \Lambda_{\eta\eta} Q_2) \varphi + O(h_\xi^2 / \text{Re} + h_\eta^2 / \text{Re}),$$

где

$$(1.3) \quad \Lambda_{\xi\xi} P_1 \varphi = \text{Re}^{-1} h_\xi^{-2} \Delta_-^\xi (T_{0.5}^\xi P_1) \Delta_+^\xi \varphi, \quad \Lambda_{\xi\eta} P_2 \varphi = \text{Re}^{-1} h_\xi^{-1} h_\eta^{-1} \Delta_0^\xi P_2 \Delta_0^\eta \varphi, \\ \Lambda_{\eta\xi} Q_1 \varphi = \text{Re}^{-1} h_\xi^{-1} h_\eta^{-1} \Delta_0^\eta Q_1 \Delta_0^\xi \varphi, \quad \Lambda_{\eta\eta} Q_2 \varphi = \text{Re}^{-1} h_\eta^{-2} \Delta_-^\eta (T_{0.5}^\eta Q_2) \Delta_+^\eta \varphi,$$

а матрицы P_1, P_2, Q_1 и Q_2 получены из векторов F_1, F_2, G_1 и G_2 соответственно.

С помощью операторов (1.2) и (1.3) разностный аналог системы (1.1) можно представить на сетке $\omega_\tau \times \omega_{\xi,\eta}$, $t_m = m\tau$ в виде

$$(1.4) \quad \left(\frac{J^{-1}N}{\tau} + B_\xi^{-1}C_\xi P + \Lambda_{\xi\xi} P_1 + B_\eta^{-1}C_\eta Q + \Lambda_{\eta\eta} Q_2 \right) (\varphi^{m+1} - \varphi^m) = \\ = - (L_H \varphi^m + L_v \varphi^m),$$

матрицы N , P , P_1 , Q и Q_2 вычисляются на m -м временном слое.

Реализацию схемы (1.4) удобно осуществить методом расщепления:

$$\left(B_\xi \frac{J^{-1}N}{\tau} + C_\xi P \right) \xi^{1/4} = - B_\xi (L_H \varphi^m + L_v \varphi^m),$$

$$(E + \tau \Lambda_{\xi\xi} J N^{-1} P_1) \xi^{1/2} = \xi^{1/4},$$

$$\left(B_\eta \frac{J^{-1}N}{\tau} + C_\eta Q \right) \xi^{3/4} = B_\eta \frac{J^{-1}N}{\tau} \xi^{1/2},$$

$$(E + \tau \Lambda_{\eta\eta} J N^{-1} Q_2) (\varphi^{m+1} - \varphi^m) = \xi^{3/4},$$

где E — единичная матрица.

В таком представлении (1.4) распадается на четыре одномерные системы, состоящие из блок-тредиагональных матриц размера 4×4 . Первая и третья из них реализуются совместно с граничными условиями векторными прогонками, а вторая и четвертая — скалярными. На первый взгляд кажется, что дополнительное расщепление по вязким членам усиливает ограничение на максимальный временной шаг τ . Однако на практике этого не происходит, поскольку ограничения на величину τ , связанные с нелинейным характером уравнений, являются более сильными. Представление смешанных производных явным образом также не сказывается на устойчивости алгоритма.

Компактные аппроксимации третьего порядка (1.2), использующиеся в алгоритме, определяют характер получаемого решения. Вязкие члены, аппроксимируемые со вторым порядком, не влияют на формируемое течение там, где вязкость мала, вне тонких пограничных слоев и следов. Разностная сетка строится таким образом, чтобы поперек пограничного слоя помещалось не менее 10—12 узлов. Поэтому представление вторых производных операторами, имеющими порядок выше второго, по-видимому, не нужно.

Хотя формально данный алгоритм аппроксимирует конвективную часть исходной системы уравнений с третьим порядком, рассчитывать на высокую точность решения можно только в областях гладких течений. Преобразование координат задается с помощью метрических коэффициентов. Поэтому важно, чтобы их распределения в расчетной плоскости были бы достаточно гладкими функциями координат. Как правило, это имеет место везде, кроме ограниченных участков, где располагаются изломы границ расчетной области. В данном случае метрические коэффициенты определялись численно с помощью центрально-разностных формул четвертого порядка.

Основной интерес для большинства задач вязкого газа представляют стационарные решения. Разностные сетки, использующиеся для расчетов течений при реальных числах Re , характеризуются большими отличиями расстояний между

узлами в физической плоскости (x, y) . Поэтому целесообразным является применение переменного по пространству временного шага τ . В этом случае τ_{ij} , свой для каждого узла сетки, можно рассматривать как некий итерационный параметр минимизации правой части системы (1.4).

В алгоритме используется представление τ_{ij} в виде двух составляющих:

$$\tau_{ij} = C_1 \tau_1 + C_2 \tau_2,$$

$$\tau_1 = u_1^{-1} \min [h_\xi (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2}, h_\eta (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{1/2}], \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

$$\tau_2 = \min [J^{-1} h_\xi (|W_\eta| + C_\eta)^{-1}, J^{-1} h_\eta (|W_\xi| + C_\xi)^{-1}]_{ij},$$

где $C_\eta = [(\gamma - 1) h (x_\eta^2 + y_\eta^2)]^{1/2}$, $C_\xi = [(\gamma - 1) h (x_\xi^2 + y_\xi^2)]^{1/2}$, u_1 — характерная для данной задачи скорость, а C_1 и C_2 — коэффициенты. Здесь τ_1 можно охарактеризовать как некий «глобальный» временной шаг, а τ_2 — как «локальный», определяемый местными расстояниями между узлами и параметрами течения. Расчеты показали, что использование τ_2 позволяет заметно снизить время расчета. В зависимости от конкретной задачи значения C_2 использовались в интервале от 0 до 10, а C_1 — от 3 + 5 до 50. В случае же $C_2 = 0$ при достаточно малых C_1 алгоритм пригоден для исследования нестационарных течений.

Быстродействие данного алгоритма составило 0.014 с на один узел за итерацию для компьютера АТ 386/387 с процессорной частотой 40 МГц. Например, для проведения 500 итераций на сетке 60×40 требуется немногим более 4.5 ч.

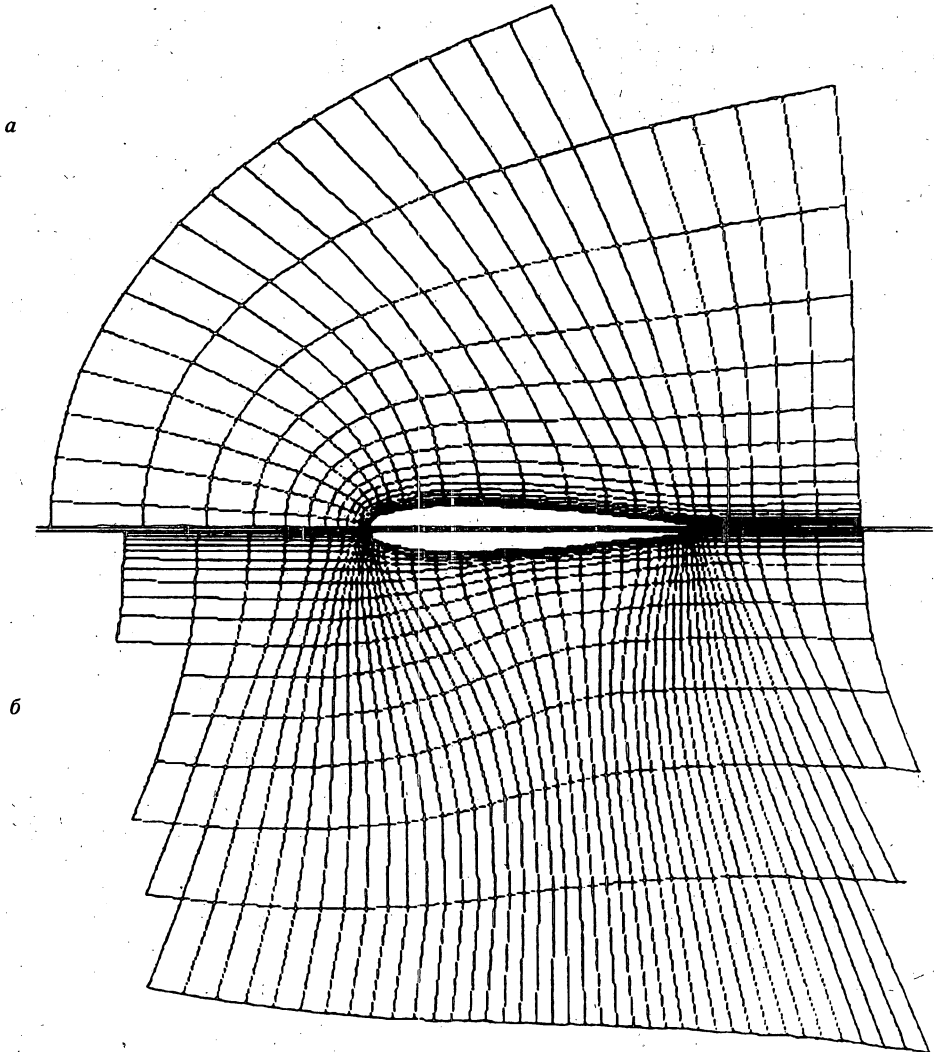
§ 2. Построение разностной сетки

Важное место при численном решении задач вязкого газа отводится построению разностной сетки. Такая сетка должна позволять описывать течение как в пограничном слое и вязком следе около обтекаемого тела, так и на значительном от него удалении. Метрические коэффициенты преобразования координат x_ξ, x_η, y_ξ и y_η , полученные на ней, должны быть достаточно гладкими функциями криволинейных координат ξ и η . Кроме того, для упрощения формулировки граничных условий на твердой поверхности желательно, чтобы координатные линии подходили к ней по кривым, близким к нормали.

Собственно сеточный генератор должен обладать двумя важными качествами. Во-первых, строить сетку за время, несоизмеримо меньшее, чем время решения основной задачи. Во-вторых, легко адаптироваться к областям расчета с различной геометрией внешних границ.

В данном алгоритме использован параболический сеточный генератор [8], отвечающий вышеизложенным требованиям. В частности, он удачно применялся в [9] для построения вычислительной сетки около тел со сложной геометрической формой.

Как и сеточный генератор эллиптического типа, параболический основан на решении уравнения Лапласа. В расчетной плоскости (ξ, η) исходные уравнения



Фиг. 1

для координат разностных узлов в физической плоскости (x, y) выглядят следующим образом:

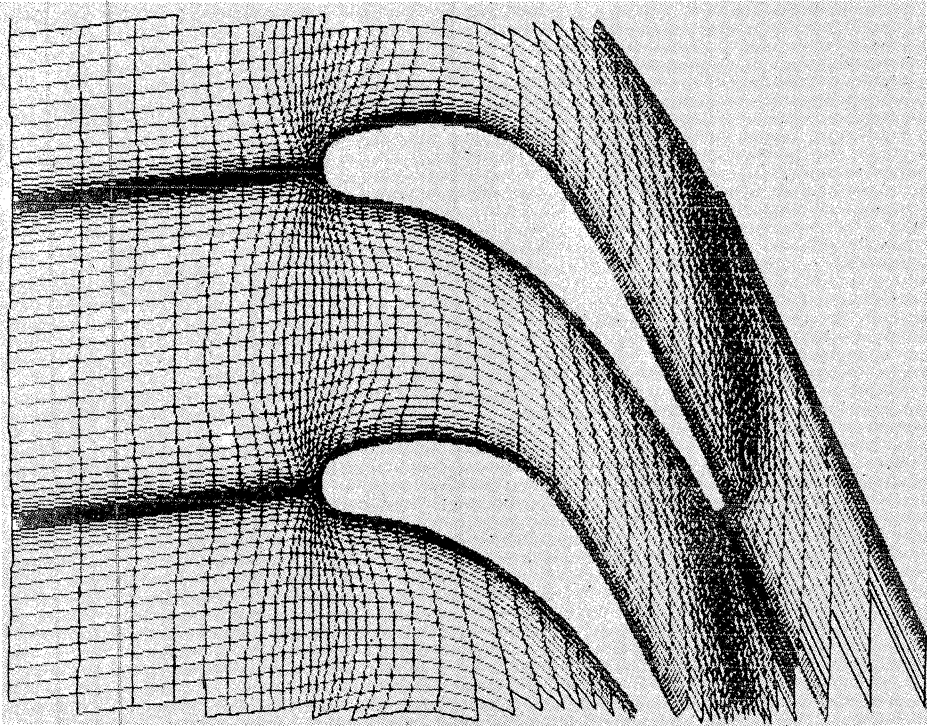
$$(2.1) \quad a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + a_3 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2a_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + a_3 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$(2.2) \quad a_1 = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad a_2 = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad a_3 = x_\xi^2 + y_\xi^2.$$

Система (2.1) аппроксимируется с помощью операторов вторых разностей вида (1.3).

При известном распределении узлов на внутренней границе $\eta = 0$ и заданных граничных условиях при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, сетка строится по слоям $\eta = \text{const}$ в



Фиг. 2

направлении внешней границы $\eta = 1$. Для задания коэффициентов (2.2) на каждом j -м слое используются значения координат x и y на слоях j и $j+1$, определенных посредством алгебраического предсказания вида

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x_{ik} &= \alpha(k) x0_{ik} + [1 - \alpha(k)] x1_{ik}, \\ y_{ik} &= \alpha(k) y0_{ik} + [1 - \alpha(k)] y1_{ik}, \quad k = j, j+1. \end{aligned}$$

Здесь $x0$ и $y0$ — координаты узлов, полученных на расстоянии r_{ik} по нормали к k -му слою, а $x1$ и $y1$ — на том же расстоянии в направлении на i -й узел внешней границы, $\alpha(k)$ — интерполяционный коэффициент. Из формул (2.3) следует предельная простота задания необходимого сгущения координатных узлов, а также автоматический выход на заданную внешнюю границу. Конкретный вид коэффициентов α можно найти в [9].

В качестве иллюстрации, на фиг. 1 показаны фрагменты сеток для расчета обтекания аэродинамического профиля NASA-0012 (типа C на фиг. 1, a и типа H на фиг. 1, b). В первом случае внешние границы представляют собой дуги эллипсов, а во втором — отрезки прямых. Выбранные углы наклона граничных линий позволяют задавать на каждой из них или условия затекания (входные границы), или условия вытекания (выходные).

Параболический генератор удобен для построения сеток при расчетах внутренних течений вязкого газа. В этом случае осуществляется одновременное формирование координатных линий от двух противоположных границ расчетной области навстречу друг другу с соединением их в центре. При этом значения

координат узлов уже построенной линии используются как граничные значения x_1 и y_1 в (2.3) для узлов сетки, строящихся с противоположной стороны. На фиг. 2 представлен фрагмент такой сетки для расчета течения в решетке профилей турбомашин.

§ 3. Результаты расчетов

1. Взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине. Задача решалась при следующих условиях: число Маха набегающего потока 2.96, число Рейнольдса, посчитанное по параметрам течения перед скачком уплотнения и толщине пограничного слоя перед областью взаимодействия δ , равно 10^6 , угол наклона скачка уплотнения 30.8° . Поверхность пластины считалась теплоизолированной.

В расчете использовалась сетка с 54×40 узлами, логарифмически сгущенными к поверхности пластины. Минимальное расстояние между узлами равнялось 10^{-3} . В пограничный слой попадало $20 + 25$ узлов. Коэффициент турбулентной вязкости определялся с помощью локальной модели турбулентности Болдуина — Ломакса [10]. Ламинарное и турбулентное числа Прандтля равнялись 0.72 и 0.9 соответственно.

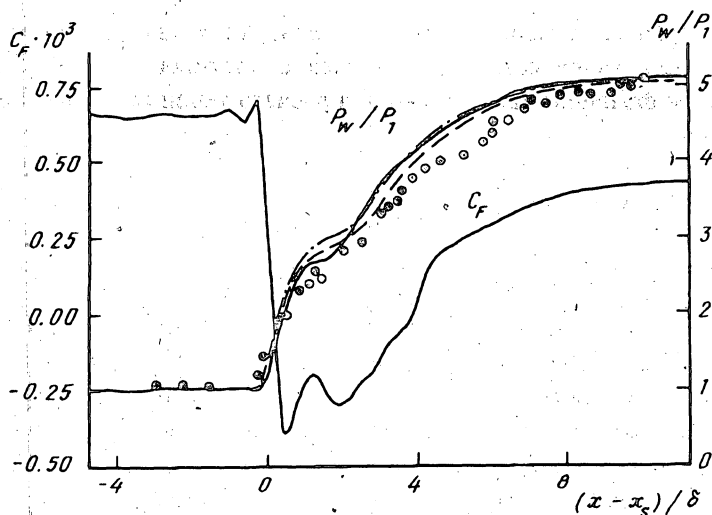
Для решения задачи потребовалось 600 итераций. Числа Куранта менялись от 2 в начале расчета до 50 в конце. Начальная невязка равнялась 10^{-1} , а конечная $5 \cdot 10^{-4}$. Отрыв пограничного слоя начался на 35-й итерации при величине невязки $5 \cdot 10^{-3}$. На сотой итерации невязка составила $1.25 \cdot 10^{-3}$. Следует признать, что характер уменьшения невязки типичен для схем, использующих факторизацию.

На фиг. 3 сплошными кривыми представлены расчетные распределения на поверхности пластины давления p_w/p_1 и местного коэффициента трения $C_f = 2\tau_w/\rho_1 u_1^2$ (τ_w — трение на стенке). Нулевое значение оси абсцисс соответствует точке отрыва пограничного слоя. Там же штриховой кривой показано расчетное распределение давления из [11] на основе решения уравнений Навье — Стокса с дифференциальной двухпараметрической моделью турбулентности, а штрихпунктирной — давление из [12]. Точками отмечены экспериментальные данные [13], полученные в присутствии боковых пластин, снижающих трехмерные эффекты.

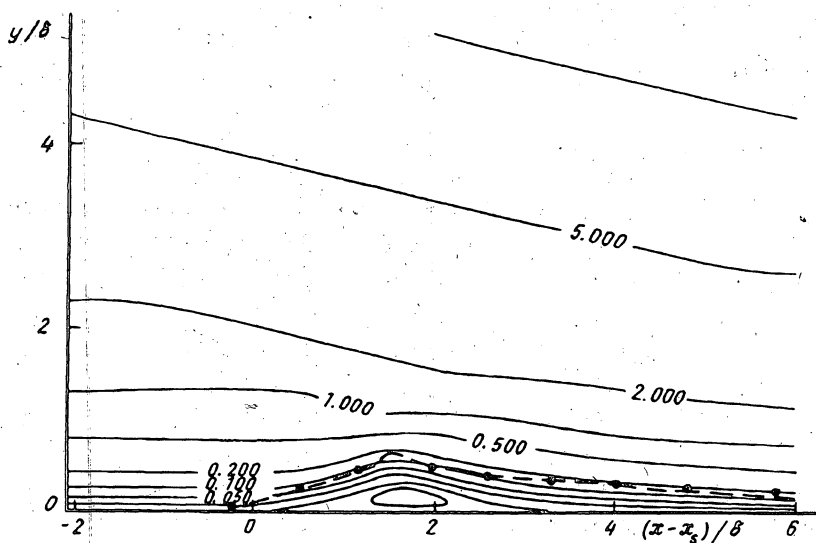
Полученное распределение давления неплохо согласуется с приведенными для сравнения расчетными и экспериментальными данными. Хорошо просматривается изобарическая зона в области отрыва пограничного слоя (плато давления). Согласно [12], экспериментальные значения давления плато при $M_1 = 3$, лежат в диапазоне от $2.4 p_1$ до $2.75 p_1$. Расчет дал $p_p = 2.65 p_1$.

На фиг. 4 приведено поле изолиний функции тока $\psi = \int \rho u dy$. Нулевое значение ψ соответствует разделяющей линии тока. Внутри отрывной зоны замкнутая изолиния имеет уровень -10^{-3} . Штриховой кривой на фиг. 4 показана полученная в расчете звуковая линия $M = 1$. Ее положение хорошо согласуется с экспериментальным, полученным в [13] (точки).

2. Обтекание аэродинамического профиля. Рассматривалось



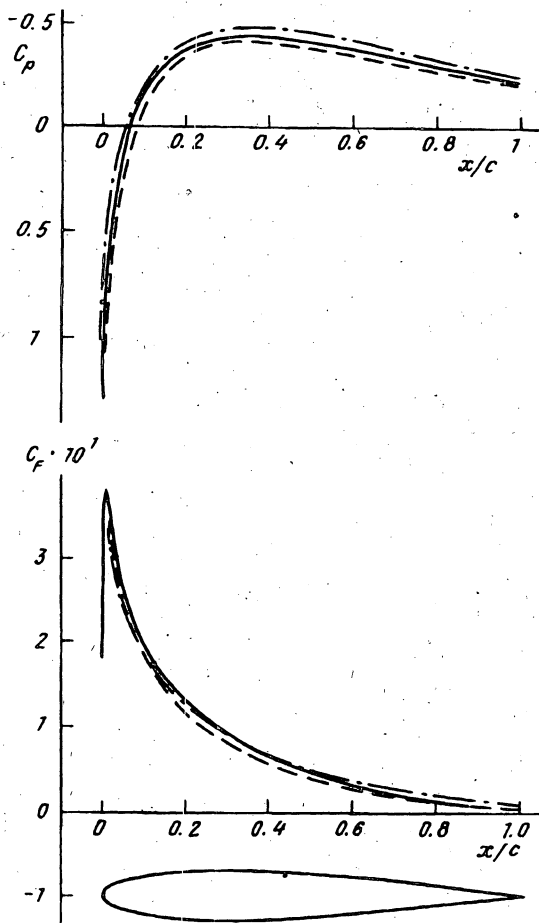
Фиг. 3



Фиг. 4

обтекание симметричного аэродинамического профиля *NACA-0012* ламинарным потоком вязкого газа. Расчетное поле для сетки типа *C* содержало 66×24 узла. Поле для сетки типа *H* включало в себя 60×40 разностных узлов. Минимальный шаг сетки равнялся 10^{-3} (линейные размеры задачи отнесены к хорде профиля *s*). Расчеты с переменным по пространству временным шагом потребовали 350 итераций. При этом суммарная невязка уменьшалась на три порядка.

На фиг. 5 представлены распределения по профилю коэффициентов давления $C_p = 2(p_w - p_\infty) / \rho_\infty u_\infty^2$ и местного трения C_f , полученные в расчете обтекания профиля при $M_\infty = 0.85$, $Re = 500$ и нулевом угле атаки. Поверхность профиля считалась теплоизолированной. Сплошная кривая соответствует результатам, полученным на сетке типа *C*. Штриховая кривая соответствует распределениям C_p



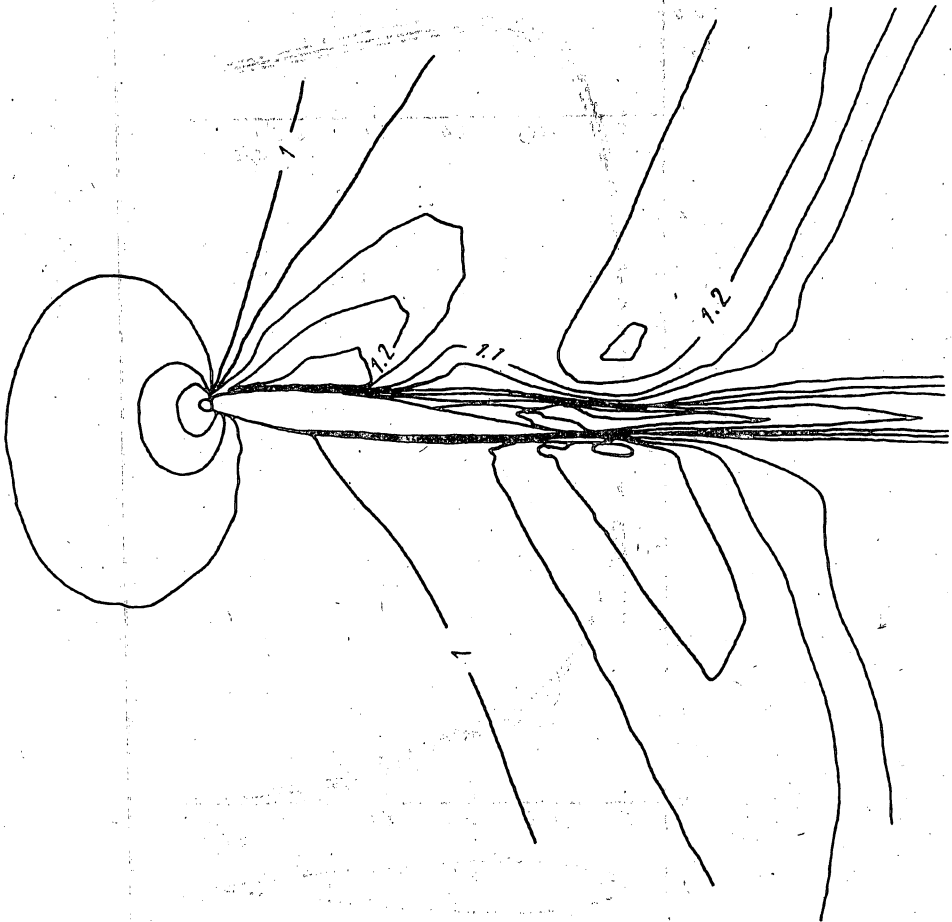
Фиг. 5

и C_f на сетке типа H . Оба результата неплохо согласуются с расчетными данными [14] (штрихпунктир), хотя полученные на сетке типа H имеют несколько большие отличия, чем полученные на сетке типа C . Дело в том, что топология сетки типа H плохо приспособлена для расчетов течений около затупленных профилей. Для нее требуется большее количество узлов, а изломы координатных линий у передней кромки вызывают погрешности решения.

Кривые распределения C_p и C_f для сверхзвукового ламинарного обтекания профиля ($M_\infty = 1.5$, $Re = 10^4$), полученные на сетке типа C , практически совпадают с аналогичными распределениями из [14].

Рассмотренные результаты относятся к случаям безотрывного обтекания профиля. При других соотношениях M_∞ и Re на его сужающейся поверхности возможно возникновение отрыва пограничного слоя. Отрыв возникает также на подветренной образующей профиля при его несимметричном положении по отношению к набегающему потоку.

Пример такого расчета представлен на фиг. 6 в виде картины линий $M = \text{const}$ для трансзвукового обтекания профиля, построенных с постоянным шагом 0.2



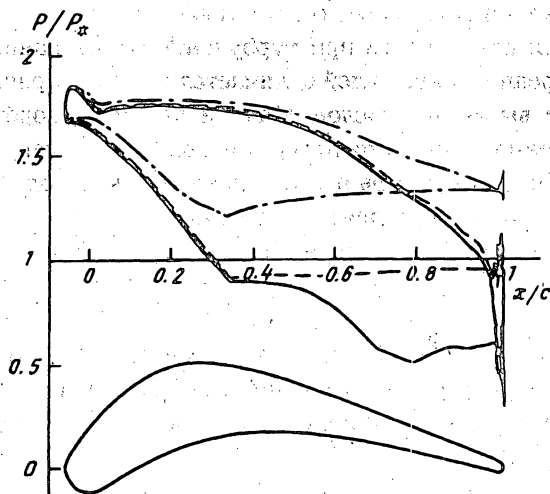
Фиг. 6

от 0 до 1.6. Число Маха набегающего потока равнялось 0.95, число Рейнольдса 10^4 , угол атаки 6° . Хорошо виден нарастающий на поверхности пограничный слой. На подветренной стороне профиля имеет место открытая отрывная зона, переходящая в вязкий след. В зоне разворота потока течение разгоняется до чисел $M > 1.4$.

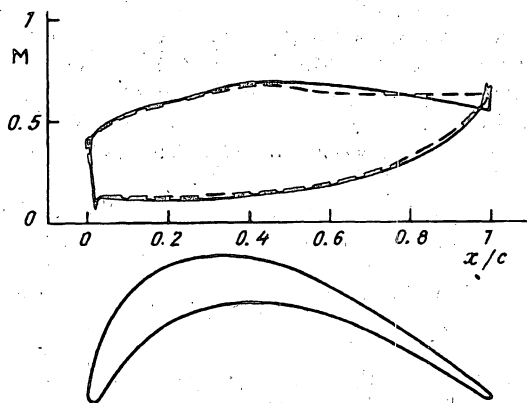
3. Течение в решетках профилей турбомашин. Проводилось моделирование течений вязкого газа в решетках плоских профилей при заданном отношении статического давления на выходе p_2 к полному на входе в решетку p_{01} . В расчетах использовалась сетка с 60×40 узлами. Ее общий вид показан на фиг. 2.

Расчеты проводились при трех значениях давления на выходе: $p_2/p_{01} = 0.75$, 0.545 и 0.375. Число Рейнольдса равнялось 10^4 , отношение удельных теплоемкостей 1.295. Температура поверхности задавалась равной температуре торможения потока. Обезразмеривание проводилось по критическим параметрам и хорде лопатки.

Поле течения, полученное при минимальном из трех соотношении $p_2/p_{01} = 0.375$, отличается сверхзвуковыми скоростями потока во всей области от минимального



Фиг. 7



Фиг. 8

проходного сечения между лопатками до выходной границы. На верхней поверхности лопатки в ее хвостовой части возникает отрыв пограничного слоя. При $p_2/p_{01} = 0.545$ в минимальном сечении между лопатками имеет место замкнутая сверхзвуковая зона. В случае $p_2/p_{01} = 0.75$ течение в канале чисто дозвуковое.

Полученные распределения давления (p_* — давление при $M = 1$) на поверхности лопатки представлены на фиг. 7. Сплошная кривая соответствует давлению на выходе $p_2/p_{01} = 0.375$, штриховая 0.545 и штрихпунктирная 0.75.

С возрастанием перепада между полным давлением на входе и статическим на выходе скорости газа в решетке растут, увеличиваются безразмерный расход и потери полного давления. Так, при $p_2/p_{01} = 0.75$ расход q составил 0.223, среднее в выходном сечении число Маха $M_2 = 0.603$ и коэффициент потерь полного давления $K_p = 1 - p_{02}/p_{01}$ равен 0.036 (p_{02} — полное давление

на выходе). При $p_{02} = 0.545 p_{01}$ расход газа $q = 0.232$, $M_2 = 0.923$ и $K_p = 0.068$. При $p_{02} = 0.375 p_{01}$ расход газа $q = 0.251$, $M_2 = 1.197$ и $K_p = 0.1$.

Проводились расчеты течения газа в решетках профилей при ламинарном ($Re = 10^4$) и турбулентном ($Re = 10^6$) режимах течения. Коэффициент турбулентной вязкости определялся по алгебраической модели [10]. Точки начала и завершения турбуликации определялись по характерным значениям местного числа Рейнольдса, определяемого по параметрам течения на границе пограничного слоя и расстоянию от точки растекания. Минимальное расстояние между узлами около твердой поверхности равнялось $5 \cdot 10^{-5}$, что должно было обеспечить попадание ближайших к телу узлов в ламинарный подслой. Форма лопатки приведена на фиг. 8. Отношение статического давления на выходе к полному на входе равнялось 0.8, отношение удельных теплоемкостей 1.4, температура поверхности 293 К.

Полученные в расчетах распределения вдоль поверхности лопатки адиабатического числа Маха представлены на фиг. 8. Турбулентный случай отмечен сплошной кривой, ламинарный — штриховой. Имеющие место отличия объясняются гораздо

более тонким пограничным слоем на нижней поверхности лопатки и большим углом разворота потока на ее верхней поверхности при турбулентном обтекании.

Турбулентный случай обтекания решетки профилей отличается от ламинарного несколько большим расходом, более высокими числом Маха и углом разворота потока на выходе, а также существенно меньшими потерями полного давления. Так если в ламинарном случае коэффициент потерь полного давления в выходном сечении канала составил $K_p = 0.0265$, то в турбулентном он равен $K_p = 0.0057$.

Во всех рассмотренных случаях полная энтальпия потока на установлении сохранялась с точностью до 2-4 сотых долей процента.

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Толстых за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов расчетов и В. А. Михалину за предоставленную информацию и полезное обсуждение методов построения вычислительных сеток.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Толстых А. И. О методе численного решения уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 48—51.
2. Толстых А. И. О неявных схемах повышенной точности для систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 2. С. 339—354.
3. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
4. Савельев А. Д., Толстых А. И. Алгоритмы расчета течений вязкого газа, основанные на компактных аппроксимациях третьего порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 11. С. 1709—1724.
5. Быркин А. П., Толстых А. И. Компактные схемы третьего и четвертого порядков в задачах о внутренних течениях вязкого и невязкого газов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 8. С. 1234—1251.
6. Стегер Дж. Л. Неявный конечно-разностный метод расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией // Ракетная техн. и космонавтика. 1978. Т. 16. № 7. С. 51—60.
7. Белоцерковский О. М., Быркин А. П., Мазуров А. П., Толстых А. И. Разностный метод повышенной точности для расчета течений вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 6. С. 1480—1490.
8. Nakamura S. Marching grid generation using parabolic partial differential equations // Numer. Grid Generat. Amsterdam etc.: Elsevier Sci. Publ. Co. Inc. 1982. P. 775—786.
9. Еремин В. А., Михалин В. А. Построение вычислительной сетки для расчета обтекания тел со сложной геометрической формой // Конструирование алгоритмов и решение задач матем. физ. М.: ИПМатем. 1991. С. 90—94.
10. Baldwin B. S., Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows: AIAA Paper № 257. 1978. 10 p.
11. Wilcox D. S. Numerical study of separated turbulent flows: AIAA Paper № 584. 1974. 11 p.
12. Гогин Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
13. Рэда Д. К., Мерфи Дж. Д. Взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем в прямоугольных каналах // Ракетная техн. и космонавтика. 1973. Т. 11. № 2. С. 15—17; Т. 10. С. 9—10.
14. Иванов М. Я., Крупа В. Г., Нигматуллин Р. З. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье — Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 6. С. 888—901.