Тогда для каждого $x \in X$ найдется такое число $\underline{c} > \mathbf{0}$, что при всех натуральных n справедлива оценка

$$(A^{s+n} f)(x) \geqslant \underline{c} \odot \Lambda_Y^{s+n}(x),$$

где $\Lambda_Y(\,\cdot\,)$ — спектральная функция эндоморфизма A.

Литература

1. *Маслов В. П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1987. **2.** *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* // Функц. анализ и его прилож. – 1989. – Т. 23, вып. 1. – С. 1–14. **3.** *Дудников П. И., Самборский С. Н.* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 308, №4. – С. 780–783. **4.** *Романовский И. В.* // Кибернетика. – 1967. – №2. – С. 71–83. **5.** *Дудников П. И., Самборский С. Н.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 25, №1. – С. 93–109. **6.** *Яковенко С. Ю.* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 308, №4. – С. 798–802.

Институт проблем кибернетики РАН
Институт новых технологий

Поступило в редакцию
3 января 1992 г.

УДК 517.982

Кватернионные супермногообразия

© 1993. С. А. Меркулов

Определение. Почти кватернионным супермногообразием называется комплексное супермногообразие $\mathcal{M}$ размерности $4k\,|\,2k+2$, $k \geqslant 2$, на котором заданы следующие структуры (ср. [1]):

а) Два интегрируемых комплексных распределения $\mathcal{T}_\ell\mathcal{M}, \mathcal{T}_r\mathcal{M} \subset \mathcal{TM}$ рангов $0\,|\,2$ и $0\,|\,2k$ соответственно такие, что их сумма в $\mathcal{TM}$ прямая. При этом требуется, чтобы форма Фробениуса

$$\varphi\colon \mathcal{T}_\ell\mathcal{M} \otimes \mathcal{T}_r\mathcal{M} \to \mathcal{T}_0\mathcal{M} \equiv \mathcal{TM}/(\mathcal{T}_\ell\mathcal{M} + \mathcal{T}_r\mathcal{M}),$$

определяемая соотношением

$$\varphi\colon (X \otimes Y) \to [X, Y] \bmod (\mathcal{T}_\ell\mathcal{M} + \mathcal{T}_r\mathcal{M}),$$

была изоморфизмом.

б) Вещественная структура ρ на $\mathcal{M}$ типа $(-1, 1, 1)$ по классификации Манина [1], которая оставляет инвариантными $\mathcal{T}_\ell\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}_r\mathcal{M}$ и индуцирует на этих распределениях кватернионную структуру.

Распределения $\mathcal{T}_\ell\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}_r\mathcal{M}$, будучи чисто нечетного ранга, интегрируемы до расслоений и порождают, следовательно, диаграмму (ср. [1])

$$\mathcal{M}_\ell \xleftarrow{\pi_\ell} \mathcal{M} \xrightarrow{\pi_r} \mathcal{M}_r, \tag{1}$$

где $\mathcal{M}_\ell$ и $\mathcal{M}_r$ — комплексные супермногообразия размерностей $4k\,|\,2$ и $4k\,|\,2k$ соответственно, структурные пучки $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_\ell}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_r}$ которых являются подпучками в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, аннулируемыми векторами из $\mathcal{T}_r\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}_\ell\mathcal{M}$ соответственно.

Кокасательный пучок $\Omega^1\mathcal{M} = (\mathcal{TM})^*$ на почти кватернионном супермногообразии характеризуется точной последовательностью

$$0 \to \mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}} \xrightarrow{i} \Omega^1\mathcal{M} \xrightarrow{j_\ell + j_r} \Pi\mathcal{S} + \Pi\widetilde{\mathcal{S}} \to 0, \tag{2}$$

где введены обозначения $\mathcal{S} = \Pi(\mathcal{T}_\ell\mathcal{M})^*$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \Pi(\mathcal{T}_r\mathcal{M})^*$.

Введем некоторые линейные связности $\nabla_\ell\colon \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^* \otimes \Omega^1\mathcal{M}$, $\nabla_r\colon \widetilde{\mathcal{S}}^* \to \widetilde{\mathcal{S}}^* \otimes \Omega^1\mathcal{M}$ на $\mathcal{S}^*$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^*$ и рассмотрим композиции

$$D_\ell\colon \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \xrightarrow{\nabla_\ell \otimes \mathrm{id}} \mathcal{S}^* \otimes \Omega^1\mathcal{M} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes j_r \otimes \mathrm{id}} \Pi\mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{trace}} \Pi\mathcal{S}^*,$$

$$D_r\colon \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \nabla_r} \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \otimes \Omega^1\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes j_\ell} \Pi\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \xrightarrow{\mathrm{trace} \otimes \mathrm{id}} \Pi\widetilde{\mathcal{S}}^*.$$

Отображение $\alpha\colon \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^* \to \mathcal{TM}$, определяемое формулой

$$\alpha(X \otimes Y) = [X, Y] - D_\ell(X \otimes Y) - D_r(X \otimes Y),$$

является $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-линейным морфизмом пучков и задает расщепление точной последовательности, двойственной к последовательности (2). Это расщепление определяет, в свою очередь, естественное продолжение связностей ∇_ℓ и ∇_r до полной линейной связности на $\mathcal{TM}$, которую мы будем называть (∇_ℓ, ∇_r)-связностью. Если s_α и $s_{\dot\alpha}$ (греческие индексы без точки принимают значения $1, 2$, а с точкой — $1, \dots, 2k$) — некоторые базисные сечения пучков $\mathcal{S}^*$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^*$ соответственно, то базис $\{j_\ell^*(s_\alpha), j_r^*(s_{\dot\alpha}), \alpha(s_\alpha \otimes s_{\dot\alpha})\}$ в $\mathcal{TM}$ будем называть структурным.

Определение. Калибровкой на почти кватернионном супермногообразии $\mathcal{M}$ называется пара невырожденных форм объема $v_\ell \in \Gamma(\mathcal{M}_\ell, \operatorname{Ber}\mathcal{M}_\ell)$ и $v_r \in \Gamma(\mathcal{M}_r, \operatorname{Ber}\mathcal{M}_r)$, удовлетворяющих условиям $(v_\ell)^\rho = v_\ell$, $(v_r)^\rho = v_r$.

Лемма-определение. *На почти кватернионном супермногообразии $\mathcal{M}$ с фиксированной калибровкой (v_ℓ, v_r) существует единственная (∇_ℓ, ∇_r)-связность, называемая* канонической связностью, *относительно которой формы $\pi_\ell^*(v_\ell)$ и $\pi_r^*(v_r)$ горизонтальны, а компоненты тензора кручения в соответствующем структурном базисе удовлетворяют соотношениям*

$$T_{\alpha\beta\cdot}{}^{\gamma} = T_{\alpha\beta\cdot}{}^{\dot\gamma} = T_{\alpha\beta\cdot\cdot}{}^{\gamma\dot\gamma} = T_{\dot\alpha\dot\beta\cdot}{}^{\dot\gamma} = T_{\dot\alpha\dot\beta\cdot}{}^{\gamma} = T_{\dot\alpha\dot\beta\cdot\cdot}{}^{\gamma\dot\gamma} = T_{\alpha,\beta\dot\beta\cdot\cdot}{}^{\gamma\dot\gamma} = 0,$$
$$T_{\dot\alpha,\beta\dot\delta\cdot\cdot}{}^{\gamma\dot\delta} = T_{\dot\alpha,\delta\dot\beta\cdot\cdot}{}^{\delta\dot\gamma} = 0, \qquad T_{\alpha\dot\alpha\cdot\cdot}{}^{\gamma\dot\gamma} = -\delta_\alpha^\gamma \delta_{\dot\alpha}^{\dot\gamma}.$$

Относительная проективная прямая $\mathcal{F} = P_\mathcal{M}(\mathcal{S})$ задает $(2k\,|\,2k+1)$-мерную коническую структуру $\mathcal{F} \hookrightarrow G_\mathcal{M}(2k\,|\,2k+1\,;\,\Omega^1\mathcal{M})$ на почти кватернионном супермногообразии $\mathcal{M}$, которая однозначно характеризуется тем, что сужение на $\mathcal{F}$ тавтологического пучка $\mathbb{S}$ на $G_\mathcal{M}(2k\,|\,2k+1\,;\,\Omega^1\mathcal{M})$ входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_\mathcal{F}(1) \otimes \pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}|_\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & \Pi\mathcal{O}_\mathcal{F}(1) + \pi^*(\Pi\widetilde{\mathcal{S}}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi^*(\mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}) \arrow[r] \arrow[u, "k \otimes \mathrm{id}"'] & \pi^*(\Omega^1\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \pi^*(\Pi\mathcal{S}) + \pi^*(\Pi\widetilde{\mathcal{S}}) \arrow[r] \arrow[u, "k^\Pi + \mathrm{id}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

где π — проекция $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}$, k — эпиморфизм в точной последовательности

$$0 \to \Omega^1\mathcal{F}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1) \to \pi^*(\mathcal{S}) \xrightarrow{k} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1) \to 0,$$

а $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1) = [\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1)]^*$ и $\mathcal{T}\mathcal{F}/\mathcal{M} = (\Omega^1\mathcal{F}/\mathcal{M})^*$ — тавтологический пучок и пучок π-вертикальных векторных полей на $\mathcal{F}$ соответственно. Эту $(2k\,|\,2k+1)$-коническую структуру на $\mathcal{M}$ будем называть *канонической.*

Определение. Почти кватернионное $(4k\,|\,2k+2)$-мерное супермногообразие $\mathcal{M}$ называется кватернионным, если соответствующая каноническая $(2k\,|\,2k+1)$-коническая структура допускает интегрируемую коническую связность.

Таким образом, каждому $(4k\,|\,2k+2)$-мерному кватернионному многообразию соответствует, по крайней мере локально, $(2k+1\,|\,1)$-мерное комплексное супермногообразие, параметризующее слои интегрируемой конической связности и называемое суперпространством твисторов (ср. [2]).

Кватернионные супермногообразия образуют категорию, плоской моделью в которой служит суперпространство флагов $F(1\,|\,0, 1\,|\,1\,;\,\mathbb{H}^{k+1\,|\,1})$, причем диаграмма (1) принимает вид

$$G(1\,|\,0\,;\,\mathbb{H}^{k+1\,|\,1}) \leftarrow F(1\,|\,0, 1\,|\,1\,;\,\mathbb{H}^{k+1\,|\,1}) \to G(1\,|\,1\,;\,\mathbb{H}^{k+1\,|\,1}),$$

а соответствующее суперпространство твисторов есть $\mathbb{CP}^{2k+1\,|\,1}$.

Главной мотивировкой определения кватернионного супермногообразия служит следующий факт.

Теорема. а) *Подстилающее многообразие $\mathcal{M}_{\mathrm{rd}}$ кватернионного супермногообразия $\mathcal{M}$ имеет индуцированную кватернионную структуру.*

б) *Каждому $4k$-мерному кватернионному многообразию $\mathcal{M}_0$ соответствует, по крайней мере локально, $(4k\,|\,2k+2)$-мерное кватернионное супермногообразие $\mathcal{M}$, которое индуцирует на $\mathcal{M}_{\mathrm{rd}} \cong \mathcal{M}_0$ исходную кватернионную структуру.*

Схема доказательства. Вычислением пучка коэффициентов конической связности на $\mathcal{F} = P_{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ доказывается следующая

Лемма. *Любая интегрируемая коническая связность $D_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}$ допускает подъем до некоторой канонической связности ∇ на $\mathcal{T}\mathcal{M}$.*

Анализ тождеств Бьянки для ∇ показывает, что ∇ индуцирует интегрируемую связность $D_{\mathcal{F}}$ только тогда, когда $T_{\dot\alpha,\beta\dot\beta\,\cdot\,\cdot}{}^{\gamma\dot\gamma} = 0$, из чего, в свою очередь, следует, что бесследовая часть компонент $T_{\alpha\dot\alpha,\beta\dot\beta\,\cdot\,\cdot}{}^{\gamma\dot\gamma}$ тензора кручения равна нулю. Это означает, что индуцированные на $\mathcal{M}_{\mathrm{rd}}$ данные $(\mathcal{T}\mathcal{M}_{\mathrm{rd}} \cong (\mathcal{S}^*)_{\mathrm{rd}} \otimes (\widetilde{\mathcal{S}}^*)_{\mathrm{rd}}, (\nabla)_{\mathrm{rd}}, (\rho)_{\mathrm{rd}})$ задают кватернионную структуру (ср. [2, 3]).

Литература

1. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. – М.: Наука, 1984. **2.** *Salamon S. M.* // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. – 1986. – V. 19. – C. 31–55. **3.** *Bailey T. N., Eastwood M. G.* Complex paraconformal manifolds — their differential geometry and twistor theory. – Preprint. – Adelaide University, 1988.

Отдел теоретических проблем РАН

Поступило в редакцию
14 мая 1991 г.