И. А. Дынников, Гомотопическая классификация сферических пространственных форм, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1992, номер 5, 3–8

МАТЕМАТИКА

УДК 515.16.165.7

И. А. Дынников

# ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ

Сферической пространственной формой называется многообразие постоянной положительной скалярной кривизны. Любое такое многообразие есть фактор $S^{2n-1}$ по свободному действию конечной группы $G$.

Двум неэквивалентным представлениям $\rho_1, \rho_2 : G \to SO(2n)$ без неподвижных векторов соответствуют недиффеоморфные многообразия $S^{2n-1}/\rho_1 \neq S^{2n-1}/\rho_2$. В работе [1] дана гомотопическая классификация сферических пространственных форм и вычислено кручение Райдемайстера для случая $G=\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, т. е. для линз. Мы произведем гомотопическую классификацию сферических пространственных форм для всех возможных фундаментальных групп $G$ и вычислим $R$-кручение для случая $G \subset SU(2)$. Список групп, имеющих ортогональные представления без неподвижных векторов, приведен в работе [2].

**Гомотопическая классификация.** Пусть $M_1$ и $M_2$ — многообразия постоянной положительной кривизны и

$$\dim M_1 = \dim M_2 = 2n-1,\ \pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2) \cong G,$$

$\psi : \pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2)$ — изоморфизм.

Лемма. 1. *Существует такое отображение $f$ из $M_1$ в $M_2$, что*

$$\psi = f_* : \pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2).$$

2. *Вычет* $\deg f \pmod N$ *зависит только от многообразий $M_1$, $M_2$ и изоморфизма $\psi$, где $N = |G|$.*

3. *Если* $\deg f \equiv \pm 1 \pmod N$, *то* $M_1 \sim M_2$.

Доказательство. 1. Многообразия $M_1$ и $M_2$ разобьем на клетки. Изоморфизм $\psi$ определяет отображение $sk_1(M_1) \to sk_1(M_2)$, которое можно продолжить до отображения $M_1 \to M_2$, так как $\pi_i(M_2)=0$ при $1<i<2n-1$.

2. Препятствием к гомотопии двух отображений $f_1, f_2 : M_1 \to M_2$, таких, что $f_{1*}=f_{2*}=\psi$, может быть лишь элемент группы $\pi_{2n-1}(M_2) \cong \mathbf{Z}$, образующая которой есть $N$-листное накрытие $p : S^{2n-1} \to M_2$. Отсюда

$$(\deg f_1 - \deg f_2) \equiv 0 \pmod N.$$

3. Пусть $f$ — отображение многообразия $M_1$ в $M_2$. Рассмотрим шар $B^{2n-1}$, вложенный в $M_1$. Стягивание его границы в точку задает отображение $h : M_1 \to M_1 \vee S^{2n-1}$. Композиция $f_1 = (f \vee p) \circ h : M_1 \to M_2$ имеет степень $\deg f_1 = \deg f + N$. Аналогично можно получить отображение $M_1$ в $M_2$ степени $\deg f - N$. Если $\deg f \equiv \pm 1 \pmod N$, то $\exists f_1 : M_1 \to M_2 : \deg f_1 = \pm 1$, $f_{1*}=\psi$. Отображение $f_1$ и будет гомотопической эквивалентностью. Доказательство п. 3 можно найти также в [3].

Вычет $\deg f \pmod N$, где $f_*=\psi$, будем обозначать через $q(M_1, M_2, \psi)$. Для вычисления $q(M_1, M_2, \psi)$ рассмотрим сначала два частных случая.

1. $G \cong \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Введем следующее обозначение. Для комплексной $n \times n$ или вещественной $2n \times 2n$ матрицы $A$, приводимой к виду

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi k_1 i/K} & & & \\ & e^{2\pi k_2 i/K} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{2\pi k_n i/K} \end{pmatrix}$$

или соответственно к виду

$$\begin{pmatrix} T(2\pi k_1/K) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T(2\pi k_n/K) \end{pmatrix}, \quad T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

где $(k_i, K) = 1$, $0 < k_i < K$, обозначим $\prod\limits_{i=1}^{n} k_i$ через $Q(A)$. Пусть $a$ — образующая группы $\pi_1(M_1) \cong \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Группа $\pi_1(M_1)$ естественно действует на накрывающей сфере $S^{2n-1}$, и это действие можно привести к виду $a: z \to \rho_1(a)z$, где $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n) \in C^n$, $S^{2n-1} = \{z \mid |z| = 1\}$,

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} e^{2\pi k_1 i/N} & & & \\ & e^{2\pi k_2 i/N} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{2\pi k_n i/N} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, действие $\pi_1(M_2)$ на $S^{2n-1}$ приводится к виду $\psi(a): z \to \rho_2(a) z$, где

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} e^{2\pi m_1 i/N} & & & \\ & e^{2\pi m_2 i/N} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{2\pi m_n i/N} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $\hat{f}: S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, заданное формулой

$$\hat{f}(z) = (z_1^{l_1}/|z_1|^{l_1-1}, \ldots, z_n^{l_n}/|z_n|^{l_n-1}),$$

где $l_i$ определяются из уравнений $k_i l_i \equiv m_i \pmod N$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\hat{f} \circ \rho_1(a)\,|_{S^{2n-1}} = \rho_2(a)|_{S^{2n-1}} \circ \hat{f}$, т. е. определено отображение $f: M_1 \to M_2$, поднятием которого является $\hat{f}$;

$$q(M_1, M_2, \psi) = \overline{\deg f} = \overline{\deg \hat{f}} = \overline{\prod_{i=1}^{n} l_i} = \overline{Q(\rho_2(a))}\,(\overline{Q(\rho_1(a))})^{-1}$$

(черта сверху обозначает вычет $\bmod N$).

2. $G$ — бинарная группа диэдра $D_r^*$, $N = 4r$. Она порождается двумя образующими $a$, $b$ и соотношениями $a^r = b^2$, $bab^{-1} = a^{-1}$. В этом случае $n$ четно, и действие группы приводится к виду

$$\rho_i(a) = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_i(b) = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

где $A_i$ — диагональные унитарные матрицы $(n/2) \times (n/2)$, $A_i^{2r} = E$. Как и в п. 1, строим отображение $\widehat{f}$ (с той лишь разницей, что $l_i = l_{i+n/2}$), степень которого также равна

$$\overline{\deg \widehat{f}} = \overline{Q(\rho_2(a))}\,(\overline{Q(\rho_1(a))})^{-1} = q(M_1,\ M_2,\ \psi)\ (\operatorname{mod} N).$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда группа $G$ произвольна. Изоморфизмы $\psi_1 : G \to \pi_1(M_1)$, $\psi_2 : G \to \pi_1(M_2)$ определяют изометрические действия группы $G$ на накрывающей $S^{2n-1}$, т. е. ортогональные представления $\rho_1, \rho_2 : G \to SO(2n)$. Пусть $P$ — произвольная подгруппа группы $G$, $M_1'$ и $M_2'$ — фактормногообразия $S^{2n-1}/P$ по действиям $\rho_1$ и $\rho_2$ соответственно. Тогда, очевидно, $q(M_1',\ M_2',\ \psi|_P) = q(M_1,\ M_2,\ \psi)$ $(\operatorname{mod} |P|)$. Теперь для вычисления $q$ осталось воспользоваться тем, что любая силовская подгруппа группы $G$ есть либо циклическая, либо обобщенная кватернионная группа $D^*_{2^m}$.

Теорема 1. *Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — полный набор несопряженных силовских подгрупп группы $G$, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — их элементы, такие, что $a_i \in P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и*

$$(\text{порядок } a_i) = \begin{cases} |P_i|, & \text{если } P_i \text{ — циклическая;} \\ |P_i|/2, & \text{если } P_i \text{ — обобщенная кватернионная.} \end{cases}$$

*Тогда $Q(\rho_1(a_i))\,q(M_1,\ M_2,\ \psi) \equiv Q(\rho_2(a_i))$ $(\operatorname{mod} |P_i|)$. Так как*

$$|G| = \prod_{i=1}^{m} |P_i| \text{ и } (|P_i|,\ |P_j|) = 1\ \ \forall i,\ j \leqslant m,\ i \neq j,$$

*то $q$ из этих условий определяется однозначно.*

Следствие 1. *Если $\varphi : G \to G$ — автоморфизм и $\varphi(a_i) = c_i a_i^{k_i} c_i^{-1}$, $i \leqslant m$ (к такому виду приводится любой автоморфизм, так как силовские подгруппы сопряжены), то $q(M_2,\ M_2,\ \varphi) \equiv k_i^n$ $(\operatorname{mod} |P_i|)$, т. е. $q(M_2,\ M_2,\ \varphi)$ зависит только от размерности многообразия $M_2$ и автоморфизма $\varphi$.*

Обозначим $q(M_2,\ M_2,\ \varphi)$ через $q_n(\varphi)$. Заметим теперь, что $q(M_1,\ M_2,\ \varphi \circ \psi) = q(M_1,\ M_2,\ \psi)\,q(M_2,\ M_2,\ \varphi) = q(M_1,\ M_2,\ \psi)\,q_n(\varphi)$. Когда $\varphi$ пробегает все множество $\operatorname{Aut}(G)$, $\varphi \circ \psi$ пробегает все изоморфизмы $\pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2)$. Отсюда получаем

Следствие 2. $M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists\, \varphi \in \operatorname{Aut}(G)$: $q(M_1,\ M_2,\ \psi) = \pm q_n(\varphi)$.

Обозначим через $Q(\rho)$ вычет $\operatorname{mod} N$, такой, что $Q(\rho) \equiv Q(\rho(a_i))$ $(\operatorname{mod} |P_i|)$. Следствие 2 примет вид

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists\, \varphi : Q(\rho_2) = \pm Q(\rho_1)\, q_n(\varphi).$$

Рассмотрим случай, когда группа $G$ имеет представление $\rho_0 : G \to SO(4)$ без неподвижных векторов и не является циклической. Тогда любое ортогональное представление $\rho : G \to SO(2n)$ без неподвижных векторов имеет вид $\rho \bigoplus_{i=1}^{n'} \rho_0 \circ \varphi_i$, где $n = 2n'$, $\varphi_i \in \operatorname{Aut}(G)$, $i = 1, 2, \ldots, n'$. Легко показать, что $Q(\rho) = \left(\prod_{i=1}^{n} q_2(\varphi_i)\right) Q^n(\rho_0)$. Множество $\{q_2(\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Aut}(G)\}$ совпадает с множеством обратимых квадратичных вычетов $\operatorname{mod} N$, что устанавливается перебором групп $G$ и их автоморфизмов. Отсюда

$$\{q_{2n'}(\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Aut}(G)\} = ((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^{2n'},$$

$$\{Q(\rho) \mid \dim \rho = 4n'\} = ((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^2.$$

Множество ориентированных гомотопических типов многообразий вида $S^{4n'-1}/\rho$ совпадает с $((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^2/((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^{2n'}$.

Пример. $G\cong I^*$ — бинарная икосаэдральная группа, порожденная образующими $a$, $b$ и соотношениями $a^{-5}=b^2=(ab)^3$. Тогда $N=120$, $((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^2\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. В случае $\dim M=8n''+3$ имеется один, в случае $\dim M=8n''+7$ — два гомотопических типа сферических пространственных форм с фундаментальной группой $\pi_1(M)\cong I^*$, в то время как число неизоморфных сферических пространственных форм размерности $4n'-1$ равно $[(n'+2)/2]$.

**Кручение Райдемайстера.** Напомним определение $R$-кручения $R(M,\rho)$, где $\rho$ — правое представление группы $\pi_1(M)$ в пространстве $V$. Пусть многообразие $M$ разбито на клетки $\sigma_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. Поднимем это клеточное разбиение до разбиения универсальной накрывающей $\hat{M}$. Для каждой клетки $\sigma_i$ зафиксируем одну из накрывающих ее клеток в $\hat{M}$, которую будем обозначать $\widehat{\sigma}_i$. Разбиение $\hat{M}$ дает цепной комплекс

$$C: C_n\to C_{n-1}\to \ldots \to C_0$$

$\pi_1(M)[\mathbf{Z}]$-модулей с базисом $\widehat{\sigma}_i$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Определение. Кручением Райдемайстера $R(M, \rho)$ называется кручение комплекса $V\otimes_{\pi_1(M)[\mathbf{Z}]}C$, если этот комплекс ацикличен. В противном случае по определению $R=0$. В качестве базиса в $V\otimes_{\pi_1(M)[\mathbf{Z}]}C$ берутся элементы $e_i\otimes\widehat{\sigma}_j$, где $\{e_i\}$ — базис в $V$.

Очевидно, что $R(M, \rho_1\oplus\rho_2)=R(M, \rho_1)R(M, \rho_2)$. Если $M$ — сферическая пространственная форма и $\rho$ — нетривиальное неприводимое представление, то $H_*(M, \rho)=0$ и $R(M, \rho)\neq 0$. Это следует из того, что $H_*(M, \rho_{\text{рег}})=H_*(M, \rho_{\text{тр}})$, где $\rho_{\text{рег}}$ — регулярное, $\rho_{\text{тр}}$ — тривиальное представления. Для вычисления $R$-кручения сферических пространственных форм нам будет полезна следующая

Теорема 2. *Пусть $\rho_1$, $\rho_2$ — ортогональные представления группы $G$ без неподвижных векторов, $\dim\rho_i=2n_i$, $i=1, 2$, $\rho$ — правое представление группы $G$. Тогда $R(S^{2(n_1+n_2)-1}/\rho_1\oplus\rho_2, \rho)=R(S^{2n_1-1}/\rho_1, \rho)R(S^{2n_2-1}/\rho_2, \rho)$.*

Доказательство. Пусть сфера $S^{2n_i-1}$ разбита на клетки $\sigma_1^i$, $\sigma_2^i, \ldots$ $\ldots, \sigma_{k_i}^i$ инвариантно относительно действия $\rho_i$, $i=1, 2$, причем так, что соответствующее разбиение $S^{2n_1-1}/\rho_1$ имеет одну $(2n_1-1)$-мерную клетку, а $S^{2n_2-1}/\rho_2$ — одну 0-мерную. Разбиению отвечают комплексы $C^i: C^i_{2n_i-1}\to\ldots$ $\ldots\to C^i_0$. Разобьем сферу $S^{2(n_1+n_2)-1}=S^{2n_1-1}*S^{2n_2-1}$ на клетки $\sigma_1^1, \ldots, \sigma_{k_1}^1$, $S^{2n_1-1}*\sigma_1^2, \ldots, S^{2n_1-1}*\sigma_{k_2}^2$. Полученное разбиение инвариантно относительно $\rho_1\oplus\rho_2$. Ему соответствует комплекс $C^2_{2n_2-1}\to\ldots\to C^2_0\to C^1_{2n_1-1}\to\ldots\to C^1_0$, составленный из $C^2$ и $C^1$, где $C^2_0\cong C^1_{2n_1-1}\cong G[\mathbf{Z}]$, и гомоморфизм $\partial_{2n}: C^2_0\to$ $\to C^1_{2n_1-1}$ есть просто умножение на $\sum\limits_{g\in G} g$. Если $\rho$ — нетривиальное неприводимое представление, то $\sum\limits_{g\in G}\rho(g)=0$, и гомоморфизм $V\otimes_{G[\mathbf{Z}]}C^2_0\to$ $\to V\otimes_{G[\mathbf{Z}]}C^1_{2n_1-1}$ — нулевой. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Перейдем теперь к конкретным вычислениям. 1. $G$ — бинарная группа диэдра $D^*_r$, порожденная образующими $a$, $b$; $a^r=b^2=(ab)^2$. Обозначим через $\rho_0$ представление $G$ в $SU(2)$, такое, что

$$\rho_0(a)=\begin{pmatrix} e^{\pi i/r} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/r}\end{pmatrix},\quad \rho_0(b)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Разобьем $S^3$ на клетки инвариантно относительно $\rho_0$. Разбиение фундаментальной области изображено на рис. 1. Одномерные клетки, переходящие при факторизации $S^3$ по $\rho_0$ в образующие $a$ и $b$, обозначены соответствующими буквами. Получаем следующий вид оператора $\partial$:

$$\partial\sigma^3=(a-1)\,\sigma_1^2+(ba^{-1}-1)\,\sigma_2^2;$$

$$\partial\sigma_1^2=(b^{-1}+b^{-1}a+b^{-1}a^2+\ldots+b^{-1}a^{r-1})\,\sigma_1^1-(b^{-1}+1)\,\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_2^2=(ab^{-1}+1)\,\sigma_1^1-(ab^{-1}-b^{-1})\,\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_1^1=(a-1)\,\sigma^0;\ \ \partial\sigma_2^1=(b-1)\,\sigma^0.$$

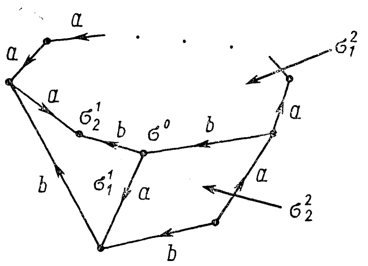


Рис. 1

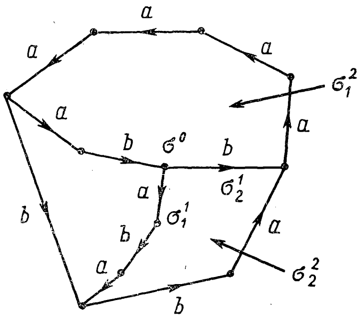


Рис. 2

Элементарные вычисления в случае $\det(\rho(a)-E)\neq 0\neq\det(\rho(b)-E)$ дают

$$R(S^3/\rho_0,\ \rho)=\det(\rho(a)-E). \tag{1}$$

Любая сферическая пространственная форма $M$ с $\pi_1(M)=G$ имеет вид $M=S^{4n'-1}/\bigoplus\limits_{i=1}^{n'}\rho_0\circ\varphi_i$, где $\varphi_i\in\mathrm{Aut}(G)$, $\varphi_i(b)=b$, $\varphi_i(a)=a^{k_i}$, $(k_i\ 2r)=1$. Из формулы (1) и теоремы 2 следует, что

$$R(M,\ \rho)=\prod_{i=1}^{n'}\det((\rho(a))^{l_i}-E),$$

где $k_il_i\equiv 1\pmod{2r}$. В частности, если $\rho=\rho_0^{\mathsf{T}}$, то

$$R(M,\ \rho)=\prod_{j=1}^{n'}(e^{\pi l_j i/r}-1)(e^{-\pi l_j i/r}-1).$$

2. Теперь пусть $G\cong I^*$ — бинарная икосаэдральная группа, порожденная элементами $a$, $b$; $a^{-5}=b^2=(ab)^3$. Поступаем, как и в случае $D_r^*$:

$$\rho_0(a)=\begin{pmatrix}(\sqrt{5}+1)/4 & (1-\sqrt{5}+2i)/4\\ (\sqrt{5}-1+2i)/4 & (\sqrt{5}+1)/4\end{pmatrix},\quad \rho_0(b)=\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}.$$

Разбиение фундаментальной области показано на рис. 2. Оператор $\partial$ имеет вид

$$\partial\sigma^3=(aba-1)\,\sigma_1^2+(b^{-1}a^{-1}-1)\,\sigma_2^2;$$

$$\partial\sigma_1^2=(b+ba+ba^2+ba^3+ba^4)\,\sigma_1^1+(b^{-1}+1)\,\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_2^2=(1+ab+abab)\,\sigma_1^1+(a+aba-1)\,\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_1^1=(a-1)\,\sigma^0;\ \partial\sigma_2^1=(b-1)\,\sigma^0.$$

Если $\det(\rho(a)-E)$, $\det(\rho(b)+E)$, $\det(\rho(ab)-E)\neq 0$, то

$$R(S^3/\rho_0,\ \rho)=\det(\rho(a)-E)(\det(\rho(ab)-E)(\det(\rho(b)+E))^{-1}.$$

Дальнейшие вычисления ввиду их громоздкости опускаем. Окончательный результат для неприводимых представлений $\rho$ запишем в виде таблицы. У группы $I^*$ имеется единственный внешний автоморфизм $\varphi$. Двумерные представления в таблице — это $\rho_0$ и $\rho_0\circ\varphi$. Трехмерные получаются из них стандартным гомоморфизмом $SU(2)\to\to SO(3)$. Сферические пространственные формы $M$ с $\pi_1(M)\cong I^*$ имеют вид

| Размерность $\rho$ | 2 | 2 | 4 | 6 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $tr\,\rho(a)$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | 1 | $-1$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | $-1$ | 0 |
| $R(S^3/\rho_0,\ \rho)$ | $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ | $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ | 1 | 2 | $-1+\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $-1-\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{5}{3}$ | $-\frac{3}{2}$ |

$$M=S^{2(n_1+n_2)-1}/(\bigoplus_{i=1}^{n_2}\rho_0\circ\varphi)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n_1}\rho_0).$$

В этом случае $R(M,\ \rho_0^{\mathrm{T}})=\tau^{n_1-n_2}$, $R(M,\ \rho_0^{\mathrm{T}}\circ\varphi)=\tau^{n_2-n_1}$, где $\tau=(3-\sqrt{5})/4$.

В заключение автор благодарит С. П. Новикова за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милнор Дж. Кручение Уайтхеда // Математика. Сб. переводов. 1967. **11**, № 1. 3—42.
2. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М., 1982.
3. Olum P. Mappings of manifolds and the notion of degree // Ann. Math. 1953. **58**, N 3. 458—572.

Поступила в редакцию 18.03.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1992. № 5

УДК 512.547

Нгуен Хунг Шон

## ТОЖДЕСТВА КОНЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП В АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Мы будем рассматривать представления $(A,\ G)$, где $A$ — ассоциативная алгебра над фиксированным конечным полем $\Lambda$ с некоторым заданным гомоморфизмом группы $G$ в группу автоморфизмов алгебры $A$. Рассматриваются два алфавита $X=\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$, $Y=\{y_1,\ y_2,\ \ldots\}$ и свободная ассоциативная алгебра $L^X[Y]$ над $\Lambda$, порожденная элементами вида $y_i^{f_j}$, где $y_i\in Y$, $f_j\in F_\infty(X)$— свободная группа счетного ранга.