



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Бредихин, О квазигождествах алгебр отношений с ди-
офантовыми операциями,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 29–41

<https://www.mathnet.ru/smj419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 15:45:08



О КВАЗИТОЖДЕСТВАХ АЛГЕБР ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Д. А. Бредихин

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Теория алгебр отношений берет свое начало в исследованиях Де Моргана, Пирса и Фреге, систематизированных Шредером в третьем томе своей «Алгебры и логики» [1]. Новый этап в развитии теории алгебр отношений связан с именем Тарского. Им был предложен аксиоматический подход к исследованию алгебр отношений и сформулирован ряд проблем, во многом определивших дальнейшее развитие теории (см. [2, 3]).

Рассмотрение алгебр отношений в рамках аксиоматического подхода предполагает изучение их свойств, выражимых на языке логики первого порядка и, в частности, на языке квазитожеств, что естественно приводит к проблемам описания квазиэквациональных теорий различных классов алгебр отношений и нахождения их базисов квазитожеств. Особая роль квазитожеств при изучении алгебр отношений определяется тем обстоятельством, что абстрактные замыкания многих важных классов алгебр отношений образуют квазимногообразия, и в этом случае проблема базиса становится эквивалентной одной из центральных в теории алгебр отношений задач — отыскания элементарной характеристики (системы элементарных аксиом) этих классов.

Рассмотрению квазитожеств различных классов алгебр отношений посвящены многочисленные исследования (см. обзоры [4–6]). При этом, как правило, в каждом случае используется техника, учитывающая специфику того или иного из рассматриваемых классов. Поэтому вполне естественной представляется попытка создания некоторого «индустриального» метода решения упомянутых выше проблем. Основная цель настоящей работы — создание такого метода для классов алгебр отношений с так называемыми диофантовыми операциями. Будут описаны квазиэквациональные теории этих классов и построены базисы их квазитожеств. К числу диофантовых принадлежат многие из операций, традиционно рассматриваемых над отношениями, что открывает перспективы приложения полученных результатов для изучения конкретных классов алгебр отношений. Не имея возможности в рамках данной работы подробно остановиться на этом вопросе, отметим лишь, что они позволяют получить в качестве следствий ряд результатов из [7–12], а также решить некоторые из проблем, поставленных в [5, 7] (см. соответствующие работы автора [13, 14]).

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 приведены определения основных используемых в работе понятий, § 2 посвящен формулировке основных результатов, а § 3 — их доказательству.

§ 1. Основные определения

Общие понятия и факты универсальной алгебры [15] и, в частности, теории квазимногообразий алгебраических систем предполагаются известными (см., например, [16]). В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений: \mathbb{N} — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $[m, n] = \{k \in \mathbb{N}^0 : m \leq k \leq n\}$.

Пусть $\text{Rel}(U)$ — множество всех бинарных отношений, заданных на U . Всякая формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_n)$ исчисления предикатов первого порядка, содержащая две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1 и бинарные предикатные символы r_1, \dots, r_m , определяет операцию F_φ на множестве $\text{Rel}(U)$, задаваемую следующим образом:

$$F_\varphi(R_1, \dots, R_m) = \{(x, y) \in V \times V : \varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)\},$$

где $R_1, \dots, R_m \in \text{Rel}(U)$ и запись $\varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)$ означает, что формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$ выполняется при интерпретации z_0, z_1 как x, y и r_1, \dots, r_m как R_1, \dots, R_m .

Формула φ называется *диофантовой* [17] (в другой терминологии — примитивно-позитивной [18]), если она содержит в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Операции над отношениями, задаваемые с помощью диофантовых формул, будем называть *диофантовыми*. К числу диофантовых, например, принадлежат операции умножения \circ , обращения $^{-1}$ и пересечения \cap отношений.

Множество отношений $\Phi \subset \text{Rel}(U)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Алгебру отношений назовем *диофантовой*, если таковыми являются все ее операции. Нетрудно заметить, что отношение теоретико-множественного включения \subset стабильно относительно диофантовых операций и, следовательно, всякая диофантова алгебра отношений (Φ, Ω) может быть рассмотрена как упорядоченная отношением включения \subset . (Под упорядоченной алгеброй мы понимаем алгебраическую систему (A, Ω, \leq) , где \leq — отношение порядка, стабильное относительно всех операций из Ω .)

Обозначим через $R\{\Omega\}$ (через $R\{\Omega, \subset\}$) класс всех алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с множеством операций Ω . Пусть $QR\{\Omega\}$ (соответственно $QR\{\Omega, \subset\}$) — квазимногообразие и $VR\{\Omega\}$ (соответственно $VR\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ (классом $R\{\Omega, \subset\}$), $Qeq\{\Omega\}$ ($Qeq\{\Omega, \subset\}$) и $Eq\{\Omega\}$ ($Eq\{\Omega, \subset\}$) — его квазиэквивалентные и эквивалентные теории.

Удобным способом описания диофантовых операций над отношениями является предложенное в [6, 10, 19] представление их с помощью графов. *Графом* (точнее, помеченным ориентированным графом) мы будем называть пару $G = (V, E)$, где $V = V(G)$ — множество, называемое *множеством вершин*, и $E = E(G) \subset V \times \mathbb{N} \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть *ребром с меткой k* , соединяющим вершину u с вершиной v , и графически изображать следующим образом: $u \cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Множество $\text{Lab}(G) = \{k : (\exists u, v)(u, k, v) \in E\}$ назовем *множеством меток графа G* .

Двухполюсником назовем граф G с двумя выделенными вершинами $\text{in } G$ и $\text{out } G$, называемыми соответственно *входом* и *выходом* этого двухполюсника. Двухполюсник G с входом i и выходом $o = \text{out } G$ будем в дальнейшем также обозначать через $G^{(i, o)}$ или (V, E, i, o) . Двухполюсник назовем *конечным*, если конечными являются множества его вершин и ребер.

Всякий двухполюсник G задает диофантову формулу $\varphi(G)$ с двумя

свободными переменными z_0 и z_1 , определяемую следующим образом:

$$\varphi(G) = (\exists z_2, \dots, z_m) \bigwedge_{(u, k, v, j) \in E(G)} r_k(z_i, z_j),$$

где $V(G) = \{v_0, \dots, v_m\}$ и $\text{in } G = v_0, \text{out } G = v_1$.

Обратно, всякая диофантова формула φ , содержащая две свободные переменные z_0 и z_1 , задает двухполюсник $G = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество индексов индивидуальных переменных формулы φ ; $\text{in } G = 0, \text{out } G = 1, (i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в запись формулы φ .

Таким образом, всякий двухполюсник G задает диофантову операцию $F_G = F_{\varphi(G)}$, и, обратно, всякая диофантова операция F_φ может быть задана с помощью двухполюсника $G(\varphi)$, соответствующего формуле φ . Например, операции умножения \circ и обращения $^{-1}$ отношения задаются с помощью следующих двухполюсников:

$$\text{in } G \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot \text{out } G; \quad \text{in } G \xleftarrow{1} \cdot \text{out } G.$$

Дадим ряд дополнительных определений, связанных с понятием двухполюсника. Отображение $f : V(G) \rightarrow V(G')$ называется *гомоморфизмом* двухполюсника G в двухполюсник G' , если $(f(u), k, f(v)) \in E(G')$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E(G)$ и $f(\text{in } G) = \text{in } G', f(\text{out } G) = \text{out } G'$. Будем писать $G' < G$, если существует гомоморфизм G в G' , и $G' \equiv G$, если $G' < G$ и $G < G'$.

Взаимно однозначный гомоморфизм $f : V(G) \rightarrow V(G')$ называется *изоморфизмом* двухполюсников, если обратное к нему отображение f^{-1} является гомоморфизмом G' в G . Заметим, что диофантовы формулы, задаваемые изоморфными двухполюсниками, эквивалентны и, следовательно, задают одну и ту же операцию над отношениями. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать двухполюсники с точностью до изоморфизма, в частности, для любой системы двухполюсников всегда можно предполагать, что множества их вершин попарно не пересекаются.

Будем говорить, что двухполюсник G' является *поддвухполюсником* двухполюсника G и писать $G' \subset G$, если существует взаимно однозначный гомоморфизм G' в G .

Всякое отображение $f : V(G) \rightarrow U$ индуцирует на множестве U структуру двухполюсника $f(G) = (U, f(E), f(\text{in } G), f(\text{out } G))$, где $f(E) = \{(f(u), k, f(v)) : (u, k, v) \in V(G)\}$. В том случае, если $f(w) = w$ для всякого $w \in V(G) \setminus \{u\}$ и $f(u) = v$, будем говорить, что двухполюсник $f(G)$ получен из двухполюсника G посредством *отождествления* вершины u с вершиной v .

Пусть G и G' — двухполюсники, $V(G) \cap V(G') = \emptyset$ и $u, v \in V(G)$. Обозначим через $G[u, v, G']$ двухполюсник, полученный из двухполюсника $(V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G'), \text{in } G, \text{out } G)$ отождествлением вершины $\text{in } G'$ с вершиной u и вершины $\text{out } G'$ с вершиной v . Двухполюсник $G[u, v, G']$ фактически получен из двухполюсника G «приклеиванием» к его вершинам u и v двухполюсника G' .

Будем говорить, что двухполюсник

$$G \setminus (u, k, v) = (V(G), E(G) \setminus (u, k, v), \text{in } G, \text{out } G)$$

получен из двухполюсника G *удалением* его ребра (u, k, v) .

Пусть G и G_k ($k = 1, \dots, m$) — двухполюсники и $\text{Lab}(G) \subset [1, \dots, m]$. *Композицией* $G(G_1, \dots, G_m)$ назовем двухполюсник, полученный из

двухполюсника G заменой всякого его ребра с метками k двухполюсником G_k . Более формально композиция может быть определена следующим образом. Сопоставим всякому ребру $(u, k, v) \in E(G)$ изоморфную копию $G_{(u,k,v)}$ двухполюсника G_k так, что множества вершин двухполюсников $G_{(u,k,v)}$ и G попарно не пересекаются. Тогда композиция $G(G_1, \dots, G_m)$ представляет собой двухполюсник, полученный из двухполюсника $(V(G) \cup \{V(G_{(u,k,v)}) : (u, k, v) \in E(G)\}, \cup \{E(G_{(u,k,v)}) : (u, k, v) \in E(G)\}, \text{in } G, \text{out } G)$ отождествлением вершин $\text{in } G_{(u,k,v)}$ с вершиной u и вершин $\text{out } G_{(u,k,v)}$ с вершиной v . Композицию $G(G_1, \dots, G_m)$ будем также обозначать через $G(\vec{G})$, где $\vec{G} = (G_1, \dots, G_m)$.

§ 2. Формулировка основных результатов

Фиксируем класс $R\{\Omega\}$ диофантовых алгебр отношений некоторого типа $\tau = \{n_j\}_{j \in J}$ с множеством операций $\Omega = (F_j)_{j \in J}$, задаваемых с помощью системы двухполюсников $\{G^j\}_{j \in J}$. Единственным ограничением, накладываемым на систему двухполюсников $\{G^j\}_{j \in J}$, является следующее: для каждого двухполюсника G^j различные его ребра имеют различные метки.

Обозначим через \mathbb{P} множество всех термов с функциональными символами f_j арности n_j ($j \in J$) и переменными x_k ($k \in \mathbb{N}$). Всякому терму $p \in \mathbb{P}$ сопоставим двухполюсник $G(p)$ посредством следующей индуктивной процедуры: переменной x_k сопоставим двухполюсник $(0 \xrightarrow{k} \cdot 1, 0, 1)$; терму $f_j(p_1, \dots, p_{n_j})$ — композицию двухполюсников $G^j(G(p_1), \dots, G(p_{n_j}))$.

Описание квазиэквациональных теорий $Qeq\{\Omega\}$ и $Qeq\{\Omega \subset\}$ классов $R\{\Omega\}$ и $R\{\Omega, \subset\}$ будет основано на специальном образом построенной дедуктивной системе — исчислении двухполюсников $\mathcal{L}\mathcal{D}$. Предложениями $\mathcal{L}\mathcal{D}$ являются формальные выражения вида $G_1 \Rightarrow G_2$, где G_1 и G_2 — конечные двухполюсники. Предложение $G_1 \Rightarrow G_2$ является аксиомой $\mathcal{L}\mathcal{D}$ в одном из следующих случаев:

(A1) $G_1 = G_2$;

(A2) G_1 получен из G_2 отождествлением двух его вершин;

(A3) G_2 получен из G_1 удалением некоторого его ребра.

Правила вывода для $\mathcal{L}\mathcal{D}$ задаются следующим образом:

$$\frac{G_1 \Rightarrow G_2, G_2 \Rightarrow G_3}{G_1 \Rightarrow G_3}, \quad (R1)$$

$$\frac{G_1 \Rightarrow G_2}{G_3[u, v, G_1] \Rightarrow G_3[u, v, G_2]}. \quad (R2)$$

Будем говорить, что предложение φ_0 *выводимо* из предложений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в исчислении $\mathcal{L}\mathcal{D}$, и писать $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, если существует последовательность предложений $\psi_1, \dots, \psi_l = \varphi_0$, называемая *выводом* φ_0 , такая, что для всякого $k \leq l$ выполняется одно из следующих условий: ψ_k — аксиома; $\psi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$; ψ_k получена из $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$ посредством применения одного из правил вывода (R1), (R2).

Пусть $\mathcal{A} = (A, \{f_j\}_{j \in J}, \leq)$ — упорядоченная алгебра типа τ . Заметим, что так как равенство термов $p = q$ может быть представлено в виде конъюнкции $p \leq q \wedge q \leq p$, то всякое квазитождество на \mathcal{A} сводится к одному или двум квазитожествам вида

$$\bigwedge_{k=1}^{k=n} p_k \leq q_k \rightarrow p_0 \leq q_0, \quad (1)$$

где $p_k, q_k \in \mathbb{P}$ ($k = 0, \dots, n$).

Теорема 1. Квазитожество вида (1) тогда и только тогда принадлежит квазиэквациональной теории $Qeq\{\Omega, \mathbb{C}\}$, когда $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$ ($k = 0, \dots, n$).

В качестве непосредственного следствия получаем характеристику квазиэквациональной теории $Qeq\{\Omega\}$.

Следствие 1. Квазитожество

$$\bigwedge_{k=1}^{k=n} p_k = q_k \rightarrow p_0 = q_0$$

тогда и только тогда принадлежит квазиэквациональной теории $Qeq\{\Omega\}$, когда $\tilde{\varphi}_1, \varphi_1, \dots, \tilde{\varphi}_n, \varphi_n \vdash \varphi_0$ и $\tilde{\varphi}_1, \varphi_1, \dots, \tilde{\varphi}_n, \varphi_n \vdash \tilde{\varphi}_0$, где $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$ и $\tilde{\varphi}_k = G(q_k) \Rightarrow G(p_k)$ ($k = 0, \dots, n$).

В качестве еще одного следствия теоремы 1 получаем следующий результат из [10].

Следствие 2. Тожество $p = q$ ($p \leq q$) принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ (теории $Eq\{\Omega, \mathbb{C}\}$) класса $R\{\Omega\}$ (класса $R\{\Omega, \mathbb{C}\}$) тогда и только тогда, когда $G(p) \equiv G(q)$ (соответственно $G(p) \prec G(q)$).

Перейдем к описанию базиса квазитожеств квазимногообразия $QR\{\Omega, \mathbb{C}\}$.

Пусть $\Omega_0 = \Omega \setminus \{-1, \cap\} = \{F_j\}_{j \in J_0} = \{F_{G^j}\}_{j \in J_0}$ и $V(G^j) = [0, h_j]$, $\text{in } G^j = 0$, $\text{out } G^j = 1$, $\text{Lab}(G^j) = [1, n_j]$.

Назовем n -системой ($n \in \mathbb{N}^0$) тройку $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$, где $\alpha, \beta : [1, n] \rightarrow \mathbb{N}^0$, $\gamma : [1, n] \rightarrow J_0$ — отображения (при $n = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = \emptyset$), удовлетворяющие для всякого $k = 1, \dots, n$ условию

$$\alpha(k), \beta(k) \leq 2 + \sum_{l=1}^{k-1} (h_{\gamma(l)} - 1).$$

Для каждой n -системы $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ построим с помощью индукции последовательность графов $G_0 \subset \dots \subset G_n = G_\omega$, для которых $V(G_k) = [0, l_k]$ и $\text{Lab } V(G_k) = [0, m_k]$, где $l_k = 2 + \sum_{l=1}^k (h_{\gamma(l)} - 1)$ и $m_k = 1 + \sum_{l=1}^k n_{\gamma(l)}$ ($k = 1, \dots, n$).

Положим G_0 равным графу $0 \cdot \xrightarrow{1} \cdot 1$ и $G_k = G_{k-1} \cup \tilde{G}^{\gamma(k)}$, где граф $\tilde{G}^{\gamma(k)}$ получен из графа $G^{\gamma(k)}$ посредством следующей процедуры переиндексации его вершин и меток:

$$V(\tilde{G}^{\gamma(k)}) = f(G^{\gamma(k)}), \quad \text{in } \tilde{G}^{\gamma(k)} = f(\text{in } G^{\gamma(k)}), \quad \text{out } \tilde{G}^{\gamma(k)} = f(\text{out } G^{\gamma(k)})$$

и

$$E(\tilde{G}^{\gamma(k)}) = \{(f(u), g(k), f(v)) : (u, k, v) \in E(G^{\gamma(k)})\},$$

где $f(0) = \varphi(k)$, $f(1) = \psi(k)$ и $f(t) = t - 1 + l_{k-1}$ для $t = 2, \dots, h_{\gamma(k)}$; $g(t) = t + m_{k-1}$ для $t = 1, \dots, n_{\gamma(k)}$.

В том случае, когда операции $^{-1}$ или \cap принадлежат Ω , соответствующие им операции алгебры $\mathcal{A} = (A, \{f_j\}_{j \in J}, \leq)$ обозначим соответственно через $^{-1}$ и \wedge .

Теорема 2. Упорядоченная алгебра $\mathcal{A} = (A, \{f_j\}_{j \in J}, \leq)$ тогда и только тогда принадлежит квазимногообразию $QR\{\Omega, \mathbb{C}\}$, когда она удовлетворяет тождествам $(x_1^{-1})^{-1} = x_1$; $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$, $x_1 \wedge x_2 \leq x_1$ (в том случае, если операции $^{-1}$ или \cap принадлежат Ω) и для всякой

n -системы $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ и любых термов p_0, \dots, p_n таких, что $G_\omega^{(0,1)} \prec G(p_0)$ и $G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))} \prec G(p_k)$ ($k = 1, \dots, n$), выполняется квазитождество

$$\bigwedge_{k=1}^n p_k \leq f_{\gamma(k)}(x_{m_{k-1}+1}, \dots, x_{n_{\gamma(k)}+m_{k-1}+1}) \rightarrow x_1 \leq p_0. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Все основные результаты работы могут быть без особого труда перенесены на случай операций, заданных с помощью диофантовых формул исчисления предикатов первого порядка с равенством, однако это приводит к несколько более громоздкой формулировке теоремы 2.

§ 3. Доказательства

Доказательства теорем 1 и 2 будут проведены по единой схеме и используют некоторые идеи работ [7-10, 20].

Обозначим через Σ систему квазитождеств, определяемую условиями теоремы 1, и через $\tilde{\Sigma}$ — систему квазитождеств, определяемую условиями теоремы 2, включая квазитождества вида

$$x_1 \leq x_2 \wedge \dots \wedge x_{2n_j-1} \leq x_{2n_j} \rightarrow f_j(x_1, \dots, x_{2n_j-1}) \leq f_j(x_2, \dots, x_{2n_j}),$$

выражающие стабильность отношения \leq относительно операций f_j .

Доказательства теорем 1 и 2 сводятся к следующим утверждениям:

- a) $\Sigma \subset \text{Qeq}\{\Omega, \mathbb{C}\}$;
- b) $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$;
- c) всякая упорядоченная алгебра \mathcal{A} , удовлетворяющая системе квазитождеств $\tilde{\Sigma}$, принадлежит $\text{QR}\{\Omega, \mathbb{C}\}$;

d) всякое квазитождество вида (1) из $\text{Qeq}\{\Omega, \mathbb{C}\}$ принадлежит Σ .

Докажем предварительно ряд лемм. В дальнейшем, если не оговорено противное, множество вершин $V(G_k)$ и ребер $E(G_k)$ двухполюсника G_k будем обозначать через V_k и E_k , а его вход $\text{in } G_k$ и выход $\text{out } G_k$ — через i_k и o_k . Для всякого кортежа $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ элементов алгебры типа τ и терма p , содержащего в своей записи переменные (не обязательно все) x_1, \dots, x_m , значение терма p при $x_k = a_k$ ($k = 1, \dots, m$) будем обозначать через $p(\vec{a})$ или $p(a_1, \dots, a_m)$.

Лемма 1. Если $G_1 \prec G_2$, то $G_3[u, v, G_1] \prec G_3[u, v, G_2]$.

Пусть $f : V_2 \rightarrow V_1$ — гомоморфизм G_2 в G_1 . Положим $\tilde{f}(u) = u$ для $u \in V_3$ и $\tilde{f}(u) = f(u)$ для $u \in V_2 \setminus \{i_2, o_2\}$. Тогда \tilde{f} — гомоморфизм $G_3[u, v, G_2]$ в $G_3[u, v, G_1]$. \square

Лемма 2. Если $G_1 \prec G_2$, то $G_1[u, v, G_3] \prec G_2[u, v, G_3]$.

Пусть $f : V_2 \rightarrow V_1$ — гомоморфизм G_2 в G_1 . Положим $\tilde{f}(u) = f(u)$ для $u \in V_2$ и $\tilde{f}(u) = u$ для $u \in V_3 \setminus \{i_3, o_3\}$. Тогда \tilde{f} — гомоморфизм $G_2[u, v, G_3]$ в $G_1[u, v, G_3]$. \square

Лемма 3. Если $G_1^{(u,v)} \prec G_2$, то $G_1 \prec G_1[u, v, G_2]$.

Пусть $f : V_2 \rightarrow V_1$ — гомоморфизм G_2 в $G_1^{(u,v)}$. Положим $\tilde{f}(w) = w$ для $w \in V_1$ и $\tilde{f}(w) = f(w)$ для $w \in V_2 \setminus \{i_2, o_2\}$. Тогда \tilde{f} — гомоморфизм $G_1[u, v, G_2]$ в G_1 . \square

Лемма 4. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_1 \Rightarrow G_2$, то $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_3[u, v, G_1] \Rightarrow G_3[u, v, G_2]$.

Лемма 4 следует непосредственно из определений и правила вывода (R2).

Лемма 5. $\vdash G_1 \Rightarrow G_2$ тогда и только тогда, когда $G_1 < G_2$.

Если $G_1 \Rightarrow G_2$ — аксиома исчисления \mathcal{LQ} , то, как легко видеть, $G_1 < G_2$. Отсюда, используя лемму 1, индукцией по длине вывода предложения $G_1 \Rightarrow G_2$ получаем, что $\vdash G_1 \Rightarrow G_2$ влечет $G_1 < G_2$. Обратно, предположим, что $G_1 < G_2$, т. е. существует гомоморфизм $f: V_2 \rightarrow V_1$ двухполюсника G_2 в двухполюсник G_1 . Положим $V'_1 = f(V_1)$, $E'_1 = E_1 \cap V'_1 \times V'_1$ и $G'_1 = (V'_1, E'_1, i_1, o_1)$. Тогда $G'_1 \subset G_1$, откуда, используя аксиому (A3) и правило вывода (R1), легко получаем, что $\vdash G_1 \Rightarrow G'_1$. Таким образом, достаточно показать, что $\vdash G'_1 \Rightarrow G_2$. Доказательство проводим индукцией по числу вершин $|V_2|$ двухполюсника G_2 . Если $|V_2| = |V'_1|$, то f взаимно однозначно, т. е. $G_2 \subset G'_1$, откуда $\vdash G'_1 \Rightarrow G_2$. Предположим, что утверждение верно в случае $|V_2| = k \geq |V'_1|$. Пусть $|V_2| = k + 1$. Тогда $f(u) = f(v)$ для некоторых двух различных вершин $u, v \in V_2$. Пусть G'_2 — двухполюсник, полученный из двухполюсника G_2 посредством отождествления вершины u с вершиной v . Тогда, как легко видеть, ограничение f на $V(G'_2)$ является гомоморфизмом G'_2 в G'_1 , откуда по предположению индукции $\vdash G'_1 \Rightarrow G'_2$. Учитывая, что $G'_2 \Rightarrow G_2$ — аксиома, и используя правило вывода (R2), получаем $\vdash G'_1 \Rightarrow G_2$. \square

Лемма 6. Пусть $\vec{G} = (G_1, \dots, G_m)$ и $(u_1, k_1, v_1), \dots, (u_n, k_n, v_n)$ — некоторая нумерация ребер двухполюсника G . Положим $\tilde{G}_0 = G$ и $\tilde{G}_l = (\tilde{G}_{l-1} \setminus \{(u_l, k_l, v_l)\})[u_l, v_l, G_{k_l}]$ ($l = 1, \dots, n$). Тогда $G(\vec{G}) = \tilde{G}_n$.

Лемма 6 следует непосредственно из определения композиции двухполюсников.

Лемма 7. Пусть $\vec{G} = (G_1, \dots, G_m)$ и $G < Q$. Тогда $G(\vec{G}) < Q(\vec{G})$.

Лемма 7 следует непосредственно из лемм 2 и 6.

Лемма 8. Пусть $\vec{G} = (G_1, \dots, G_m)$, $\vec{G}' = (G'_1, \dots, G'_m)$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_k \Rightarrow G'_k$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G(\vec{G}) \Rightarrow G(\vec{G}')$.

Лемма 8 следует непосредственно из лемм 4, 6 и правила вывода (R1).

Лемма 9. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = Q_k \Rightarrow Q'_k$ ($k = 0, \dots, n$) и $\vec{G} = (G_1, \dots, G_m)$. Тогда $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n \vdash \tilde{\varphi}_0$, где $\tilde{\varphi}_k = Q_k(\vec{G}) \Rightarrow Q'_k(\vec{G})$.

Используем индукцию по длине вывода предложения φ_0 . Пусть $\psi_1, \dots, \psi_l = \varphi_0$ — вывод предложения φ_0 , где $\psi_k = D_k \Rightarrow D'_k$ для $k = 0, \dots, l$. Положим $\tilde{\psi}_k = D_k(\vec{G}) \Rightarrow D'_k(\vec{G})$ ($k = 0, \dots, l$). Покажем, что $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l$ — вывод предложения $\tilde{\psi}_l = D_0(\vec{G}) \Rightarrow D'_0(\vec{G})$. Если $\psi_k = D_k \Rightarrow D'_k$ — аксиома, то $D_k < D'_k$, откуда, используя леммы 2 и 6, получаем $D_k(\vec{G}) < D'_k(\vec{G})$, следовательно, $\vdash \tilde{\psi}_k$.

Предположим, что предложение ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R1), т. е. $D_{k+1} = D_i$, $D'_j = D'_{k+1}$ и $D'_i = D_j$ для некоторых $i, j \leq k$. Тогда $D_{k+1}(\vec{G}) = D_i(\vec{G})$, $D'_j(\vec{G}) = D'_{k+1}(\vec{G})$ и $D'_i(\vec{G}) = D_j(\vec{G})$, т. е. и $\tilde{\psi}_k$ также может быть получена посредством применения правила (R1).

Пусть теперь ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R2), т. е. $D_{k+1} = G[u, v, D_i]$ и $D'_{k+1} = G[u, v, D'_i]$ для некоторого $i \leq k$. Тогда

$$\begin{aligned} D_{k+1}(\vec{G}) &= G[u, v, D_i](\vec{G}) = G(\vec{G})[u, v, D_i(\vec{G})], \\ D'_{k+1}(\vec{G}) &= G[u, v, D'_i](\vec{G}) = G(\vec{G})[u, v, D'_i(\vec{G})], \end{aligned}$$

т. е. и $\tilde{\psi}_k$ также может быть получена посредством применения правила (R2). \square

В формулировке лемм 10–14 $\vec{R} = (R_1, \dots, R_m)$, где $R_1, \dots, R_m \in \text{Rel}(U)$, и множества меток всех рассматриваемых двухполюсников включаются в $[1, m]$.

Лемма 10. Пусть $G = (V, E, i, o)$. Пара $(x, y) \in U \times U$ принадлежит $F_G(\vec{R})$ тогда и только тогда, когда существует отображение $g : V \rightarrow U$ такое, что $g(i) = x$, $g(o) = y$ и $(g(u), g(v)) \in R_k$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E$.

Лемма 10 следует непосредственно из определения операции $F_G = F_{\varphi(G)}$ и формулы $\varphi(G)$, задаваемой двухполюсником G .

Лемма 11. Пусть $G_1 < G_2$. Тогда $F_{G_1}(\vec{R}) \subset F_{G_2}(\vec{R})$.

Пусть $f : V_2 \rightarrow V_1$ — гомоморфизм G_2 в G_1 . Предположим, что $(x, y) \in F_{G_1}(\vec{R})$. Тогда существует отображение $g : V_1 \rightarrow U$ такое, что $g(i_1) = x$, $g(o_1) = y$ и $(g(u), g(v)) \in R_k$, если $(u, k, v) \in E_1$. Построим отображение $\tilde{g} : V_2 \rightarrow U$, положив $\tilde{g}(u) = g(f(u))$. Тогда $\tilde{g}(i_2) = x$, $\tilde{g}(o_2) = y$ и $(\tilde{g}(u), \tilde{g}(v)) \in R_k$, если $(u, k, v) \in E_2$. Следовательно, $(x, y) \in F_{G_2}(\vec{R})$. \square

Лемма 12. Пусть $G_1 = G_3[u, v, G_4]$, $G_2 = G_3[u, v, G_5]$, $F_{G_4}(\vec{R}) \subset F_{G_5}(\vec{R})$. Тогда $F_{G_1}(\vec{R}) \subset F_{G_2}(\vec{R})$.

Согласно определению $V_1 = V_3 \cup V_4 \setminus \{i_4, o_4\}$, $V_2 = V_3 \cup V_5 \setminus \{i_5, o_5\}$, $i_1 = i_2 = i_3$, $o_1 = o_2 = o_3$ и $V_3 \cap V_4 = V_3 \cap V_5 = \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что и $V_4 \cap V_5 = \emptyset$.

Предположим, что $(x, y) \in F_{G_1}(\vec{R})$. Тогда существует отображение $g_1 : V_1 \rightarrow U$ такое, что $g_1(i_1) = x$, $g_1(o_1) = y$ и $(g_1(w), g_1(t)) \in R_k$, если $(w, k, t) \in E_1$. Положим $g_4(w) = g_1(w)$ для всех $w \in V_4 \setminus \{i_4, o_4\}$ и $g_4(i_4) = g_1(i_1)$, $g_4(o_4) = g_1(o_1)$. Тогда $g_4 : V_3 \rightarrow U$ и $(g_4(w), g_4(t)) \in R_k$, если $(w, k, t) \in E_4$, откуда $(g_4(i_4), g_4(o_4)) \in F_{G_4}(\vec{R}) \subset F_{G_5}(\vec{R})$. Следовательно, существует отображение $g_5 : V_5 \rightarrow U$ такое, что $g_5(i_5) = g_4(i_4) = g_1(i_1)$, $g_5(o_5) = g_4(o_4) = g_1(o_1)$ и $(g_5(w), g_5(t)) \in R_k$, если $(w, k, t) \in E_5$. Положим $g_2(w) = g_1(w)$ для $w \in V_3$ и $g_2(w) = g_5(w)$ для $w \in V_5 \setminus \{i_5, o_5\}$. Тогда $g_2 : V_2 \rightarrow U$, $g_2(i_2) = g_1(i_1) = x$, $g_2(o_2) = g_1(o_1) = y$ и $(g_2(w), g_2(t)) \in R_k$, если $(w, k, t) \in E_2$. Следовательно, $(x, y) = (g_2(i_2), g_2(o_2)) \in F_{G_2}(\vec{R})$. \square

Лемма 13. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G_k \Rightarrow G'_k$ ($k = 0, \dots, n$) и $F_{G_k}(\vec{R}) \subset F_{G'_k}(\vec{R})$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда $F_{G_0}(\vec{R}) \subset F_{G'_0}(\vec{R})$.

Используем индукцию по длине вывода предложения φ_0 . Пусть $\psi_1, \dots, \psi_l = \varphi_0$ — вывод предложения φ_0 , где $\psi_k = D_k \Rightarrow D'_k$ для $k = 0, \dots, l$. Покажем, что $F_{D_k}(\vec{R}) \subset F_{D'_k}(\vec{R})$ для любого $k = 1, \dots, l$. Если $\psi_k = D_k \Rightarrow D'_k$ — аксиома, то это утверждение следует из лемм 5 и 11, а если совпадает с одним из φ_i , то из условий леммы.

Пусть утверждение верно для всех $i \leq k$. Предположим, что предложение ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R1), т. е. $D_{k+1} = D_i$, $D'_j = D'_{k+1}$ и $D'_i = D_j$ для некоторых $i, j \leq k$. Тогда

$$F_{D_{k+1}}(\vec{R}) = F_{D_i}(\vec{R}) \subset F_{D'_i}(\vec{R}) = F_{D_j}(\vec{R}) \subset F_{D'_j}(\vec{R}) = F_{D'_{k+1}}(\vec{R}).$$

Пусть теперь предложение ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R2). Тогда $D_{k+1} = G[u, v, D_i]$ и $D'_{k+1} = G[u, v, D'_i]$ для некоторого $i \leq k$. Отсюда, используя лемму 3, получаем $F_{D'_{k+1}}(\vec{R}) \subset F_{D'_{k+1}}(\vec{R})$. \square

Лемма 14. Для всякого терма $p \in \mathbb{P}$ имеет место равенство $F_{G(p)}(\vec{R}) = p(\vec{R})$.

Очевидно, что утверждение леммы справедливо для $p = x_k$. Заметим, что $F_{G(G_1, \dots, G_m)} = F_G(F_{G_1}, \dots, F_{G_m})$, где $F_G(F_{G_1}, \dots, F_{G_m})$ — суперпозиция операций F_G и F_{G_1}, \dots, F_{G_m} . Предположим, что $p = f_j(p_1, \dots, p_m)$ и $p_1(\vec{R}) = F_{G(p_1)}(\vec{R}), \dots, p_m(\vec{R}) = F_{G(p_m)}(\vec{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{G(p)}(\vec{R}) &= F_{G^j(G(p_1), \dots, G(p_m))}(\vec{R}) = F_{G^j}(F_{G_1}(\vec{R}), \dots, F_{G_m}(\vec{R})) \\ &= F_j(F_{G_1}(\vec{R}), \dots, F_{G_m}(\vec{R})) = F_j(p_1(\vec{R}), \dots, p_m(\vec{R})) = p(\vec{R}). \end{aligned} \square$$

Переходим непосредственно к доказательству теорем.

(а) Рассмотрим упорядоченную алгебру отношений $\text{Rel}(U, \Omega, \subset)$, и пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$ ($k = 0, \dots, n$). Предположим, что выполняется посылка квазитожества (1), т. е. $p_k(\vec{R}) \subset q_k(\vec{R})$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда, используя лемму 5, получаем $F_{G(p_k)}(\vec{R}) = p_k(\vec{R}) \subset q_k(\vec{R}) = F_{G(q_k)}(\vec{R})$, откуда согласно лемме 4 $F_{G(p_0)}(\vec{R}) \subset F_{G(q_0)}(\vec{R})$. Таким образом, $\Sigma \subset QR\{\Omega, \subset\}$.

(б) Покажем, что $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$. Из леммы 8 непосредственно следует, что квазитожества, выражающие стабильность отношения \leq относительно операций f_j , принадлежат Σ .

Так как $G((x_1^{-1})^{-1}) = G(x_1)$, $G(x_1 \wedge x_2) = G(x_2 \wedge x_1)$ и $G(x_1) \subset G(x_1 \wedge x_2)$, тождества $(x^{-1})^{-1} = x$, $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$, $x_1 \wedge x_2 \leq x_1$ принадлежат Σ .

Пусть $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ и $G_\omega^{(0,1)} \prec G(p_0)$ и $G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))} \prec G(p_k)$ ($k = 1, \dots, n$) для некоторой n -системы $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ и термов $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}$. Положим $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow Q_k$, где $Q_k = G(f_{\gamma(k)}(x_{m_{k-1}+1}, \dots, x_{n_{\gamma(k)}+m_{k-1}+1}))$. Используя индукцию, покажем, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G_k^{(0,1)}$ для любого $k \leq n$. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G_{k-1}^{(0,1)}$. Так как по предположению $G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))} \prec G(p_k)$, то $\vdash G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))} \Rightarrow G(p_k)$, следовательно, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))} \Rightarrow Q_k$. Отсюда, используя лемму 4, получаем

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_{k-1}[\alpha(k), \beta(k), G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))}] \Rightarrow G_{k-1}[\alpha(k), \beta(k), Q_k].$$

Так как по построению

$$\begin{aligned} G_k &= G_{k-1} \cup \tilde{G}^{\gamma(k)} = G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), \tilde{G}^{\gamma(k)}] \\ &= G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), G(f_{\gamma(k)}(x_{m_{k-1}+1}, \dots, x_{n_{\gamma(k)}+m_{k-1}+1}))] \\ &= G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), Q_k], \end{aligned}$$

имеем

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_{k-1}[\alpha(k), \beta(k), G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))}] \Rightarrow G_k.$$

Согласно лемме 3

$$G_{k-1}^{(0,1)} \prec G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k)\beta(k), G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))}],$$

следовательно,

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_{k-1}^{(0,1)} \Rightarrow G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))}].$$

Таким образом, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_{k-1}^{(0,1)} \Rightarrow G_k$, откуда, используя предположение индукции, получаем $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G_k$.

Так как $G_n^{(0,1)} = G_{\omega}^{(0,1)} \prec G(p_0)$, имеем $\vdash G_n^{(0,1)} \Rightarrow G(p_0)$, откуда $\vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G(p_0)$. Учитывая, что $G_1^{(0,1)} = G(x_1)$, получаем $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash G(x_1) \Rightarrow G(p_0)$ и, следовательно, всякое квазитожество вида (2) принадлежит Σ .

(с) Пусть упорядоченная алгебра $\mathcal{A} = (A, \{f_j\}_{j \in J}, \leq)$ удовлетворяет квазитожествам из $\tilde{\Sigma}$. Покажем, что $\mathcal{A} \in QR\{\Omega, \mathcal{C}\}$. Так как $QR\{\Omega, \mathcal{C}\}$ обладает локальным свойством, достаточно ограничиться конечно порожденными алгебрами. Отсюда, учитывая, что множество операций Ω не более чем счетно, мы без ограничения общности можем полагать, что множество A не более чем счетно.

Положим $J_0(A) = \{(j, \vec{a}) : j \in J_0, \vec{a} = (a_1, \dots, a_{n_j}) \in A^{n_j}\}$ и $\Lambda = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{P} \times J_0(A)$. Так как множества \mathbb{P} и $J_0(A)$ не более чем счетны, то существует биекция $\theta : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$.

Построим следующие последовательности (возможно, бесконечные): натуральных чисел $t_n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$); n -систем $\omega_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ ($n \geq 0$); графов $G_n = G_{\omega_n}$ ($n \geq 0$); кортежей $\vec{b}^n = (b_1, \dots, b_{\lambda(n)}) \in A^{\lambda(n)}$, где $\lambda(n) = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} n_{\gamma(l)}$ ($n \geq 0$).

Положим $\omega_0 = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, G_0 равным графу $0 \cdot \xrightarrow{k} \cdot 1$ и $\vec{b}^0 = (a)$.

Предположим, что t_k для $k = 1, \dots, n-1$ и ω_k, G_k, \vec{b}^k для $k = 0, \dots, n-1$ уже построены. Положим

$$\Lambda_n = \{(u, v, p, j, \vec{a}) \in \Lambda : G_{n-1}^{(u,v)} \prec G(p), p(\vec{b}^{n-1}) \leq f_j(\vec{a}), \theta(u, v, p, j, \vec{a}) \notin \{t_1, \dots, t_{n-1}\}\}.$$

Если $\Lambda_n = \emptyset$, то процесс построения последовательностей на этом заканчивается, т. е. построенные последовательности конечны.

Предположим теперь, что $\Lambda_n \neq \emptyset$. Пусть (u, v, p, j, \vec{a}) — элемент Λ_n , для которого $\theta(u, v, p, j, \vec{a})$ имеет наименьшее значение. Положим $t_n = \theta(u, v, p, j, \vec{a})$; $\alpha_n(k) = \alpha_{n-1}(k)$, $\beta_n(k) = \beta_{n-1}(k)$, $\gamma_n(k) = \gamma_{n-1}(k)$ для $k = 1, \dots, n-1$ и $\alpha_n(n) = u$, $\beta_n(n) = v$, $\gamma_n(n) = j$; $G_n = G_{\omega_n}$ и $b_{\lambda(n-1)+k} = a_k$ для $k = 1, \dots, n_i$.

По построению $\omega_{n-1} \subset \omega_n$, $G_{n-1} \subset G_n$, $\vec{b}^{n-1} \subset \vec{b}^n$. Положим

$$\alpha = \cup\{\alpha_n : n \geq 0\}, \quad \beta = \cup\{\beta_n : n \geq 0\}, \\ \gamma = \cup\{\gamma_n : n \geq 0\}, \quad G = \cup\{G_n : n \geq 0\}, \quad \vec{b} = \cup\{\vec{b}^n : n \geq 0\}.$$

Лемма 15. Пусть $x, y \in \mathbb{N}^0$, $j \in J_0$, $\vec{c} \in A^{n_j}$, $p \in \mathbb{P}$ и $G^{(x,y)} \prec G(p)$, $p(\vec{b}) \leq f_j(\vec{c})$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_n(n) = x$, $\beta_n(n) = y$, $\gamma_n(n) = j$, $G_n = G_{n-1} \cup \tilde{G}^{\gamma(n)}$ и $b_{\lambda(n-1)+k} = c_k$ для $k = 1, \dots, n_j$.

Достаточно показать, что $\theta(x, y, p, j, \vec{c}) = t_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим противное. Так как $G^{(x,y)} \prec G(p)$, то $G_m^{(x,y)} \prec G(p)$ для некоторого m . Тогда $(x, y, p, j, \vec{c}) \in \Lambda_k$ для всех $k \geq m$. Поскольку существует лишь конечное число натуральных чисел, меньших $\theta(x, y, p, j, \vec{c})$, существует такое n , что $\theta(x, y, p, j, \vec{c}) \leq \theta(x', y', p', j', \vec{c}')$ для всякого $(x', y', p', j', \vec{c}') \in \Lambda_n$. Отсюда по построению $\theta(x, y, p, j, \vec{c}) = t_n$, что противоречит предположению. \square

Рассмотрим отображение $P_a : A \rightarrow \text{Rel}(\mathbb{N}^0)$, определяемое следующим образом:

$$F_a(c) = \{(x, y) : (\exists p \in \mathbb{P}(X)) G^{(x,y)} \prec G(p), p(\vec{b}) \leq c\}.$$

Покажем, что P_a — гомоморфизм упорядоченной алгебры $(A, \{f_j\}_{j \in J}, \leq)$ в упорядоченную алгебру отношений $(\text{Rel}(\mathbb{N}^0), \Omega, \subset)$.

Отображение P_a очевидным образом удовлетворяет условию: $c \leq d$ влечет $P_a(c) \subset P_a(d)$.

Предположим, что $(x, y) \in F_j(P_a(c_1), \dots, P_a(c_{n_j}))$, где $j \in J_0$. Тогда по лемме 10 существует отображение $g : V(G^j) \rightarrow \mathbb{N}^0$ такое, что $g(\text{in } G^j) = x$, $g(\text{out } G^j) = y$ и $(g(u), g(v)) \in P_a(c_k)$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E(G^j)$. По условию число ребер двухполюсника G^j равно n_j , следовательно, для некоторых $p_1, \dots, p_{n_j} \in \mathbb{P}$ будет $p(\vec{b}) \leq c_k$ ($k = 1, \dots, n_j$) и $G^{(g(u), g(v))} \prec G(p_k)$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E(G^j)$, откуда $f_j(p_1(\vec{b}), \dots, p_{n_j}(\vec{b})) \leq f_j(c_1, \dots, c_{n_j})$ и для каждого ребра $r_k = (u, k, v) \in E(G^j)$ существует гомоморфизм f_k двухполюсника $G(p_k)$ в двухполюсник $G^{(g(u), g(v))}$. Таким образом, отображение $f = \cup \{f_k : k \in [1, n_j]\}$ будет гомоморфизмом двухполюсника $G^j(G(p_1), \dots, G(p_{n_j}))$ в двухполюсник $G^{(x,y)}$, т. е. $G^{(x,y)} \prec G^j(G(p_1), \dots, G(p_{n_j})) = G(f_j(p_1, \dots, p_{n_j}))$. Следовательно, $(x, y) \in P_a(f_j(c_1, \dots, c_{n_j}))$.

Обратно, пусть $(x, y) \in P_a(f_j(c_1, \dots, c_{n_j}))$. Тогда $p(\vec{b}) \leq f_j(c_1, \dots, c_{n_j})$ и $G^{(x,y)} \prec G(p)$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Отсюда, используя лемму 15, получаем, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_n(n) = x$, $\beta_n(n) = y$, $\gamma_n(k) = j$, $G_n = G_{n-1} \cup \tilde{G}^{\gamma(n)}$ и $b_{\lambda(n-1)+k} = c_k$ для $k = 1, \dots, n_j$. Тогда $(u, v) \in P_a(c_k)$ для всякого ребра $(u, \lambda(n-1) + k, v) \in \tilde{G}^{\gamma(n)}$ и, следовательно, $(x, y) \in F_j(P_a(c_1), \dots, P_a(c_{n_j}))$.

Таким образом, $F_j(P_a(c_1), \dots, P_a(c_{n_j})) = F_j(P_a(c_1), \dots, P_a(c_{n_j}))$ для всякого $j \in J_0$.

Пусть $c^{-1} \in \Omega$ и $(x, y) \in P_a(c^{-1})$, т. е. $p(\vec{b}) \leq c^{-1}$ и $G^{(x,y)} \prec G(p)$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Тогда $p^{-1}(\vec{b}) \leq c$ и $G^{(y,x)} \prec G(p^{-1})$, т. е. $(y, x) \in P_a(c)$. Следовательно, $P_a(c^{-1}) \subset P_a^{-1}(c)$. Так как $(c^{-1})^{-1} = c$, то $(P_a(c))^{-1} = (P_a((c^{-1})^{-1}))^{-1} \subset ((P_a(c^{-1}))^{-1})^{-1} = P_a(c^{-1})$. Таким образом, $P_a(c^{-1}) = P_a(c)$.

Пусть $\cap \in \Omega$ и $(x, y) \in P_a(c_1) \cap P_a(c_2)$. Тогда $(x, y) \in P_a(c_1)$ и $(x, y) \in P_a(c_2)$, т. е. $p_1(\vec{b}) \leq c_1$, $p_2(\vec{b}) \leq c_2$ и $G^{(x,y)} \prec G(p_1)$, $G^{(x,y)} \prec G(p_2)$ для некоторых $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Следовательно, $(p_1 \wedge p_2)(\vec{b}) = p_1(\vec{b}) \wedge p_2(\vec{b}) \leq c_1 \wedge c_2$ и $G^{(x,y)} \prec G(p_1 \wedge p_2)$, т. е. $(x, y) \in P_a(c_1 \wedge c_2)$.

Обратно, так как $c_1 \wedge c_2 \leq c_1$ и $c_1 \wedge c_2 = c_2$, то $P_a(c_1 \wedge c_2) \subset P_a(c_1)$ и $P_a(c_1 \wedge c_2) \subset P_a(c_2)$, т. е. $P_a(c_1 \wedge c_2) \subset P_a(c_1) \cap P_a(c_2)$.

Таким образом, $P_a(c_1 \wedge c_2) = P_a(c_1) \cap P_a(c_2)$.

Итак, P_a — гомоморфизм упорядоченной алгебры $(A, \{f_j\}_{j \in J}, \leq)$ в упорядоченную алгебру отношений $(\text{Rel}(\mathbb{N}^0), \Omega, \subset)$. Более того, он удовлетворяет условию: если $P_a(a) \subset P_a(c)$, то $a \leq c$. Действительно,

пусть $P_a(a) \subset P_a(c)$. Так как $b_1 = a$, то $(0, 1) \in P_a(c) \subset P_a(c)$, т. е. $p_0(\vec{b}) \leq c$ и $G^{(0,1)} \prec G(p_0)$ для некоторого $p_0 \in \mathbb{P}$. Тогда $G_n^{(0,1)} \prec G(p_0)$ для некоторого n . Так как по построению существуют такие $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$, что $p_k(\vec{b}) \leq f_{\gamma(k)}(\vec{b})$ и $G^{(\alpha(k), \beta(k))} \prec G(p_k)$, то, используя тождество (2), получаем $a \leq p_0(\vec{b}) \leq c$.

Положим $X_a = \mathbb{N}^0 \times \{a\}$ и $\tilde{P}(c) = \{\tilde{P}_a(c)\}_{a \in A}$, где $\tilde{P}_a(c) = \{(x, a), (y, a)\} : (x, y) \in P_a(c)\}$. Тогда \tilde{P} — гомоморфизм \mathcal{A} в $\prod\{(\text{Rel}(X_a), \Omega, \subset) : a \in A\}$. Предположим, что $\tilde{P}(c) \subset \tilde{P}(d)$. Тогда $P_c(c) \subset P_c(d)$, откуда $c \leq d$. Таким образом, \tilde{P} — изоморфное вложение \mathcal{A} в $\prod\{(\text{Rel}(X_a), \Omega, \subset) : a \in A\}$. Учитывая, что $\prod\{(\text{Rel}(X_a), \Omega, \subset) : a \in A\} \in QR\{\Omega\}$, получаем $\mathcal{A} \in QR\{\Omega\}$.

(d) Рассмотрим некоторое квазиотношение

$$\bigwedge_{k=1}^{k=l} \tilde{p}_k \leq \tilde{q}_k \rightarrow \tilde{p}_0 \leq \tilde{q}_0, \quad (*)$$

принадлежащее $Qeq\{\Omega, \subset\}$, и покажем, что оно принадлежит и Σ .

Положим $\tilde{\varphi}_k = G(\tilde{p}_k) \Rightarrow G(\tilde{q}_k)$ ($k = 1, \dots, l$). Рассмотрим алгебру термов \mathbb{P} . Введем на \mathbb{P} отношение квазиупорядка \ll и отношение эквивалентности \cong :

$p \ll q$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_l \vdash G(p) \Rightarrow G(q)$;

$p \cong q$ тогда и только тогда, когда $p \ll q$ и $q \ll p$.

Из леммы 8 следует, что отношение \ll стабильно относительно операций алгебры \mathbb{P} и \cong — конгруэнтность алгебры \mathbb{P} . Элемент фактор-множества \mathbb{P}/\cong , содержащий терм p , обозначим через $[p]$.

Покажем, что упорядоченная алгебра $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ принадлежит $QR\{\Omega, \subset\}$. Для этого достаточно показать, что она удовлетворяет системе квазиотноществ Σ . Рассмотрим некоторое квазиотножество из Σ :

$$\bigwedge_{k=1}^{k=n} p_k \leq q_k \rightarrow p_0 \leq q_0. \quad (**)$$

Тогда $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$. Предположим, что формулы $p_k \leq q_k$ ($k = 1, \dots, n$) выполняются на упорядоченной алгебре $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ для некоторых $[p'_1], \dots, [p'_m] \in \mathbb{P}/\cong$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_l \vdash G(p_k(p'_1, \dots, p'_m)) \Rightarrow G(q_k(p'_1, \dots, p'_m)),$$

т. е.

$$\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_l \vdash G(p_k)(G(p'_1), \dots, G(p'_m)) \Rightarrow G(q_k)(G(p'_1), \dots, G(p'_m)).$$

Положим

$$\varphi'_k = G(p_k)(G(p'_1), \dots, G(p'_m)) \Rightarrow G(q_k)(G(p'_1), \dots, G(p'_m)) \quad (k = 0, \dots, n).$$

Тогда, используя лемму 12, получаем, что $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n \vdash \varphi'_0$.

Таким образом, $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_l \vdash \varphi'_0$, т. е. формула $p_0 \leq q_0$ выполняется на упорядоченной алгебре $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ для $[p'_1], \dots, [p'_m] \in \mathbb{P}/\cong$, что означает выполнимость квазиотнощества (**).

Окончательно, так как формулы $\tilde{p}_k \leq \tilde{q}_k$ ($k = 1, \dots, l$) выполняются на упорядоченной алгебре $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ для $[x_1], \dots, [x_m] \in \mathbb{P}/\cong$ и $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ принадлежит $QR\{\Omega, \subset\}$, то и формула $\tilde{p}_0 \leq \tilde{q}_0$ выполняется на $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$, т. е. $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_l \vdash \tilde{\varphi}_0$. Последнее означает, что квазиотножество (*) принадлежит Σ .

Теоремы 1 и 2 доказаны. Следствие 2 вытекает непосредственно из теоремы 1 и леммы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logic 3, Algebra und Logic der Relative. Leipzig: Teubner, 1895.
2. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73–89.
3. Tarski A. Some metalogical results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 188–189.
4. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1, N 1. P. 1–62.
5. Schein B. M. Representation of reducts of Tarski relation algebras // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1991. V. 54. P. 621–635.
6. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1991. V. 54. P. 111–124.
7. Jónsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92, N 3. P. 449–464.
8. Schein B. M. Representation of involuted semigroups by binary relations // Fund. Math. 1974. V. 82, N 2. P. 121–141.
9. Бредихин Д. А. Представление упорядоченных инволютированных полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1975. № 7. С. 19–29.
10. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
11. Andréka H. On union-relation composition reducts of relation algebras // Abstracts Amer. Math. Soc. 1989. Issue 62, N 2. P. 174.
12. Andréka H. Representations of distributive lattice-ordered semigroups with binary relations // Algebra Universalis. 1991. V. 28, N 1. P. 12–25.
13. Bredikhin D. A. On semigroups of binary relations pointed by universal relations // Тез. докл. междунар. конф. «Полугруппы и их приложения, включая полугрупповые кольца». Санкт-Петербург, 1995. С. 6–7.
14. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations // Algebra Universalis. 1995. V. 33, N 4. P. 516–532.
15. Grätzer G. Universal algebra. Princeton: Van Nostrand, 1968.
16. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
17. Мальцев А. И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики // Тр. междунар. конгресса математиков. М., 1966. С. 217–231.
18. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 37–108.
19. Böner F., Pöschel R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. Wien, 1991. V. 7. P. 50–70.
20. Haiman M. Proof theory for linear lattices // Adv. Math. 1985. V. 58. P. 209–242.