А. В. Липницкий, Об устойчивости по почти периодическому линейному приближению дифференциальных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 208–214

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 208–214

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОМУ ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. А. В. Липницкий

Согласно теореме Ляпунова [1, с. 351], отрицательность старшего характеристического показателя $\lambda_{\max}(A)$ системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1_A}$$

с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами в случае правильности последней достаточна для устойчивости нулевого решения возмущенной нелинейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad f \in F_m, \tag{2}$$

с любой $f(t,x) \in F_m := \{f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \|f(t,x)\| \leq \|x\|^m$ при всех $t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^2\}$, $m > 1$. В частности, это справедливо, когда матрица $A(t)$ периодическая, но, вообще говоря, как установил в 1930 г. О. Перрон, уже не имеет места [1, с. 339]. Н.А. Изобов и Р.Э. Виноград полностью решили задачу Ляпунова об устойчивости по линейному приближению в некритическом случае $\lambda_{\max}(A) \neq 0$ [2].

В.М. Миллионщиков показал [3], что почти все (в смысле любой инвариантной относительно сдвигов по t меры) системы с ограниченной равномерно непрерывной матрицей коэффициентов правильны, а в [4] и [5] доказал существование неправильных систем вида (1_A) с предельно-периодической (см. [6, с. 114]) и квазипериодической матрицей коэффициентов. Им же и В.Л. Новиковым [7, 8] установлена возможность неустойчивости особых и характеристических показателей почти периодических линейных систем в классе сколь угодно малых линейных возмущений. В [9] конструктивно построена неправильная система (1) с предельно-периодической матрицей коэффициентов любой степени гладкости.

Теорема. *Найдется экспоненциально устойчивая (т.е. $\lambda_{\max}(A) < 0$) система (1_A) с почти периодическими коэффициентами такая, что при некоторых $m > 1$, $f \in F_m$ нулевое решение соответствующей возмущенной системы (2) неустойчиво.*

Положим $B_1(t) \equiv 0$, $A_1(t) := \pi|\sin \pi t| \operatorname{diag}(1,-1)$ при $t \in [2n-1, 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $A_1(t) = 0$ при остальных $t \in \mathbb{R}$, $T_1 := 2$. Пусть $T_{k+1} := (1+n_k)T_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольных последовательностей $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\{a_k, b_k, c_k, d_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $n_k \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$.

Определим на $\mathbb{R}$ T_{k+1}-периодические матрицы $A_{k+1}(\cdot)$ и $B_{k+1}(\cdot)$ равенствами

$$A_{k+1}(t) = \begin{cases} B_k(t) + a_k J_t & \text{при} \quad t \in [0,1), \\ B_k(t) & \text{при} \quad t \in [1, T_k), \\ A_k(t) + b_k J_t & \text{при} \quad t \in [T_k, T_k + 1), \\ A_k(t) & \text{при} \quad t \in [T_k + 1, T_{k+1}), \end{cases}$$

$$B_{k+1}(t) = \begin{cases} B_k(t) + c_k J_t & \text{при} \quad t \in [0,1), \\ B_k(t) & \text{при} \quad t \in [1, T_k), \\ A_k(t) + (d_k - c_k) J_t & \text{при} \quad t \in [T_k, T_k + 1), \\ A_k(t) & \text{при} \quad t \in [1 + jT_k, (j+1)T_k), \quad j \in \{1, \ldots, n_k\}, \\ A_k(t) + d_k J_t & \text{при} \quad t \in [jT_k, jT_k + 1), \quad j \in \{2, \ldots, n_k\}, \end{cases}$$

где $J_t \equiv \dfrac{1}{2}\pi|\sin \pi t| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Лемма 1. *Для любых* $k \in \mathbb{N}$ *и четного* $m \in \mathbb{Z}$ *при всех* $t \in [m, m+1)$ *имеют место равенства* $A_k(t) = \alpha_k(m)J_t$, $B_k(t) = \beta_k(m)J_t$, *где* $\alpha_k(m), \beta_k(m) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. При всех указанных t верно равенство $B_1(t) = A_1(t) = 0$, что означает справедливость утверждения леммы в случае $k = 1$. Предположим, что оно выполняется для некоторого $k = n \in \mathbb{N}$. Если $t \in [0, T_k)$, то верны соотношения $A_{n+1}(t) - B_n(t) \in \{0, a_n J_t\}$, $B_{n+1}(t) - B_n(t) \in \{0, c_n J_t\}$, а когда $t \in [T_k, T_{k+1})$, имеем включения $A_{n+1}(t) - A_n(t) \in \{0, b_n J_t\}$, $B_{n+1}(t) - A_n(t) \in \{0, d_n J_t, (d_n - c_n)J_t\}$. При этом значение коэффициента при J_t в каждой из указанных разностей зависит только от целой части числа t. Отсюда по предположению индукции вытекает утверждение леммы в случае $k = n+1$. По индукции лемма доказана.

Обозначим через $X_A(t,s)$ матрицу Коши системы (1_A), а через $U(\varphi)$ матрицу поворота на угол $\varphi \in \mathbb{R}$ против часовой стрелки.

Пусть $X_1 := \operatorname{diag}(e^2, e^{-2})$, $Y_1 := E$ (E – единичная матрица). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $X_{k+1} = X_k^{n_k} U(b_k) Y_k U(a_k)$, $Y_{k+1} = (X_k U(d_k))^{n_k} U(-c_k) Y_k U(c_k)$.

Лемма 2. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства* $X_{A_k}(T_k, 0) = X_k$, $X_{B_k}(T_k, 0) = Y_k$,

$$X_{B_{k+1}}(2T_k, T_k) = X_k U(d_k) U(-c_k), \quad X_{B_{k+1}}((1+j)T_k, jT_k) = X_k U(d_k), \quad j \in \{2, \ldots, n_k\}. \qquad (3_k)$$

Доказательство. Равенства $X_{A_k}(T_k, 0) = X_k$, $X_{B_k}(T_k, 0) = Y_k$, очевидно, справедливы при $k = 1$. Предположим, что они выполняются для некоторого $k = n \in \mathbb{N}$. В силу совпадения на промежутках $[1, T_k)$ и $[T_k + 1, T_{k+1})$ матрицы A_{k+1} с матрицами B_k и A_k соответственно имеют место соотношения $X_{A_{k+1}}(T_k, 1) = X_{B_k}(T_k, 1)$, $X_{A_{k+1}}(T_{k+1}, 1 + T_k) = X_{A_k}(T_{k+1}, 1 + T_k)$.

В силу леммы 1 верны равенства $X_{A_{k+1}}(T_k + 1, T_k) = U(\alpha_{k+1}(T_k)) = U(\alpha_k(T_k)) U(\alpha_{k+1}(T_k) - \alpha_k(T_k)) = X_{A_k}(T_k + 1, T_k) U(\alpha_{k+1}(T_k) - \alpha_k(T_k))$, $X_{A_{k+1}}(1, 0) = X_{B_k}(1, 0) U(\alpha_{k+1}(0) - \beta_k(0))$, причем $(\alpha_{k+1}(T_k) - \alpha_k(T_k)) J_{2^{-1}} = A_{k+1}(T_k + 2^{-1}) - A_k(T_k + 2^{-1}) = b_k J_{2^{-1}}$, $(\alpha_{k+1}(0) - \beta_k(0)) J_{2^{-1}} = A_{k+1}(2^{-1}) - B_k(2^{-1}) = a_k J_{2^{-1}}$.

Таким образом, согласно предположению индукции и в силу вытекающей из периодичности матрицы $A_k(\cdot)$ T_k-периодичности по τ матрицы $X_{A_k}(t + \tau, s + \tau)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
X_{A_{k+1}}(T_{k+1}, 0) &= X_{A_{k+1}}(T_{k+1}, 1 + T_k) X_{A_{k+1}}(T_k + 1, T_k) X_{A_{k+1}}(T_k, 1) X_{A_{k+1}}(1, 0) = \\
&= X_{A_k}(T_{k+1}, 1 + T_k) X_{A_k}(T_k + 1, T_k) U(b_k) X_{B_k}(T_k, 1) X_{B_k}(1, 0) U(a_k) = \\
&= X_{A_k}(T_{k+1}, T_k) U(b_k) X_{B_k}(T_k, 0) U(a_k) = \\
&= \left(\prod_{j=0}^{n_k - 1} X_{A_k}(T_{k+1} - jT_k, T_{k+1} - (1+j)T_k) \right) U(b_k) X_{B_k}(T_k, 0) U(a_k) = \\
&= (X_{A_k}(T_k, 0))^{n_k} U(b_k) Y_k U(a_k) = X_k^{n_k} U(b_k) Y_k U(a_k) = X_{k+1}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказываются равенство $X_{B_{k+1}}(T_{k+1}, 0) = Y_{k+1}$ и соотношения (3_k). По индукции лемма доказана.

Обозначим через $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ соответственно евклидову и операторную нормы в $\mathbb{R}^2$ [10, с. 457].

Лемма 3. *Для любых* $k, t, s \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, $t \geq s$, *верна оценка* $\|X_{A_k}(2t, 2s)\| \leq e^{2(t-s)}$.

Доказательство. Согласно лемме 1, верны неравенства

$$\|X_{A_k}(2t, 2s)\| = \left\| \prod_{j=1}^{t-s} X_{A_k}(2t - 2j + 2, 2t - 2j) \right\| \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{t-s} \|X_{A_k}(2t - 2j + 2, 2t - 2j + 1) X_{A_k}(2t - 2j + 1, 2t - 2j)\| =$$

$$= \prod_{j=1}^{t-s} \|\operatorname{diag}(e^2, e^{-2}) U(\alpha_k(2t - 2j))\| \leq \prod_{j=1}^{t-s} \|\operatorname{diag}(e^2, e^{-2})\| = e^{2(t-s)}.$$

Лемма доказана.

Для всякой двумерной матрицы X обозначим через $\eta_i(X) \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, где $\operatorname{Re}\eta_1(X) \geq \operatorname{Re}\eta_2(X)$, спектр ее собственных значений.

Лемма 4. *Пусть $n_k \geq 2^{k+10}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся последовательности $\{a_j, b_j, c_j, d_j\}_{j=1}^{\infty}$ такие, что* $\max\{|a_k|, |b_k|, |c_k|, |d_k|\} \leq (2/3)^k$ *и* $\lambda_{\max}(A_k) \geq (18 + 2^{-k})/19$, *причем все собственные значения матриц Y_k и $X_kU(d_k)$, $k \in \mathbb{N}$, равны единице.*

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| = 1$, обозначим через $\angle(x, y) \in (-\pi, \pi]$ угол между векторами x и y, отсчитываемый по направлению от x к y таким образом, чтобы выполнялось равенство $y = U(\angle(y, x))x$. Положим $\sphericalangle(x, y) := |\angle(x, y)| = \arccos(x, y)$, где (x, y) обозначает скалярное произведение векторов x и y.

В случае $k = 1$ верны равенства $\eta_1(X_1) = e^2$, $\eta_2(X_1) = e^{-2}$, $\sphericalangle(s_1, u_1) = \sphericalangle((1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}) = \pi/2$, $Y_1 = E$.

Предположим, что при некотором $n = k \in \mathbb{N}$ матрица Y_k имеет инвариантный собственный вектор y_k, $|y_k| = 1$ (т.е. $y_k = Y_ky_k$), а собственные значения $\eta_i(X_k)$, $i = 1, 2$, матрицы X_k вещественны и различны, причем выполняются соотношения $1 < \exp\{T_k(18 + 2^{-k})/19\} \leq \eta_k := \eta_1(X_k) = \eta_2^{-1}(X_k)$. И пусть соответствующие им нормированные собственные векторы s_k, u_k, $|s_k| = |u_k| = 1$ ($X_ks_k = \eta_ks_k$, $X_ku_k = \eta_k^{-1}u_k$), удовлетворяют оценке

$$\max\{\sphericalangle(s_k, u_k), \sphericalangle(s_k, y_k)\} \leq (2/3)^k.$$

Положим

$$a_k := \angle(y_k, s_k + u_k), \quad b_k := \angle(z_k, y_k), \quad c_k := \angle(y_k, v_k), \quad d_k := \angle(\eta_k^{-1/2}s_k + \eta_k^{1/2}u_k, v_k),$$

где $v_k := \eta_k^{1/2}s_k + \eta_k^{-1/2}u_k$, $z_k = \eta_k^{-n_k}s_k + \eta_k^{n_k}u_k$.

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| = 1$, и неотрицательных чисел a, b, одновременно не равных нулю, справедливы соотношения $\cos\sphericalangle(x, ax + by) = (x, ax + by)|ax + by|^{-1} \geq (a + b(x, y))(a + b)^{-1} = (x, y) + a(1 - (x, y))(a + b)^{-1} \geq (x, y) = \cos\sphericalangle(x, y)$, откуда вытекает оценка $\sphericalangle(x, ax + by) = \arccos\cos\sphericalangle(x, ax + by) \leq \sphericalangle(x, y)$. Поэтому в силу предположения индукции имеют место неравенства

$$|a_k| \leq \sphericalangle(y_k, s_k) \leq (2/3)^k, \quad |b_k| \leq \sphericalangle(\eta_k^{-n_k}s_k + \eta_k^{n_k}u_k, s_k) + \sphericalangle(s_k, y_k) \leq \sphericalangle(u_k, s_k) + (2/3)^k \leq 2(2/3)^k,$$

$$|c_k| \leq \sphericalangle(y_k, s_k) + \sphericalangle(s_k, v_k) \leq (2/3)^k + \sphericalangle(u_k, s_k) \leq 2(2/3)^k,$$

$$|d_k| \leq \sphericalangle(v_k, s_k) + \sphericalangle(s_k, \eta_k^{-1/2}s_k + \eta_k^{1/2}u_k) \leq 2\sphericalangle(u_k, s_k) \leq 2(2/3)^k.$$

Таким образом, $\max\{|a_k|, |b_k|, |c_k|, |d_k|\} \leq 2(2/3)^k$.

Верны равенства $X_{k+1}(s_k + u_k) = X_k^{n_k}U(b_k)Y_kU(a_k)(s_k + u_k) = X_k^{n_k}U(b_k)Y_ky_k|s_k + u_k| = X_k^{n_k}U(b_k)y_k|s_k + u_k| = X_k^{n_k}z_k|z_k|^{-1}|s_k + u_k| = (s_k + u_k)|z_k|^{-1}|s_k + u_k|$. Следовательно, вектор $u_{k+1} := (s_k + u_k)$ собственный для матрицы X_{k+1}, причем соответствующее ему собственное значение $\eta_2(X_{k+1})$ удовлетворяет оценкам $\eta_2(X_{k+1}) = |s_k + u_k|\,|z_k|^{-1} \leq 2|z_k|^{-1}$.

В силу формулы Остроградского–Лиувилля [11, с. 119] имеют место соотношения

$$\eta_1(X_{k+1})\eta_2(X_{k+1}) = \exp\left\{\int\limits_0^{T_{k+1}} \operatorname{Tr} A_{k+1}(t)\,dt\right\} = 1,$$

откуда вытекают неравенства

$$\eta_{k+1} := \eta_1(X_{k+1}) = \eta_2^{-1}(X_{k+1}) = |z_k| \geq |\eta_k^{n_k}s_k| - |\eta_k^{-n_k}u_k| \geq \eta_k^{n_k} - 1. \tag{4}$$

Согласно лемме 1 из [12], для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| = 1$, и ненулевых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$|\sin\sphericalangle(x, ax + by)| \leq |b|/|a|. \tag{5}$$

Найдется $s_{k+1} \in \mathbb{R}^2$, $|s_{k+1}| = 1$, такой, что $X_{k+1}s_{k+1} = \eta_{k+1}s_{k+1}$. Пусть $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ таковы, что $s_k = a_k s_{k+1} + b_k u_{k+1}$. В силу лемм 2 и 3 верно неравенство $\|Y_k^{-1}\| = \|X_{B_k}(0,T_k)\| \le e^{T_k}$. Поэтому справедливы соотношения

$$|b_k|\eta_{k+1} - |a_k|\eta_{k+1}^{-1} = |X_{k+1}^{-1}b_k u_{k+1}| - |X_{k+1}^{-1}a_k s_{k+1}| \le |X_{k+1}^{-1}(a_k s_{k+1} + b_k u_{k+1})| = |X_{k+1}^{-1}s_k| =$$

$$= |U(-a_k)Y_k^{-1}U(-b_k)X_k^{-n_k}s_k| = |U(-a_k)Y_k^{-1}U(-b_k)\eta_k^{-n_k}s_k| \le \eta_k^{-n_k}\|U(-a_k)Y_k^{-1}U(-b_k)\|\,|s_k| =$$

$$= \eta_k^{-n_k}\|Y_k^{-1}\|\,|s_k| \le \eta_k^{-n_k}e^{T_k}(|a_k| + |b_k|).$$

Тогда, учитывая (4), в силу предположения индукции имеем соотношения $|b_k|/|a_k| \le$ $\le (\eta_k^{-n_k}e^{T_k} + \eta_{k+1}^{-1})(\eta_{k+1} + \eta_k^{-n_k}e^{T_k})^{-1} \le 2\eta_k^{-n_k}e^{T_k} \le 2^{-k}$. Отсюда вследствие (5), переобозначая в случае необходимости s_{k+1} на $-s_{k+1}$, получаем оценки

$$\sphericalangle(s_{k+1}, s_k) \le 2\sin\sphericalangle(s_{k+1}, s_k) \le |b_k|/|a_k| \le 2^{1-k}. \tag{6}$$

Имеют место равенства $(\cos\sphericalangle(s_k, s_k + u_k))^2 = (s_k, s_k + u_k)^2|s_k + u_k|^{-2} = (1 + (s_k, u_k))^2(2 +$ $+ 2(s_k, u_k))^{-1} = (1 + (s_k, u_k))/2 = (1 + \cos\sphericalangle(s_k, u_k))/2$, которые влекут за собой соотношение $\sphericalangle(s_k, u_k) = 2\sphericalangle(s_k, s_k + u_k)$. Тогда, учитывая (6), имеем оценки $\sphericalangle(s_{k+1}, u_{k+1}) \le \sphericalangle(s_k, s_k + u_k) +$ $+ \sphericalangle(s_{k+1}, s_k) \le 2^{-1}\sphericalangle(s_k, u_k) + 2^{1-k} \le (2/3)^{k+1}$.

Прямой проверкой с учетом равенства $X_kU(d_k)v_k = X_k(\eta_k^{-1/2}s_k + \eta_k^{1/2}u_k) = v_k$ устанавливается справедливость соотношения $y_{k+1} := v_k = Y_{k+1}v_k$, т.е. матрицы $X_kU(d_k)$ и Y_{k+1} имеют равное единице собственное значение. Вследствие леммы 2 и формулы Остроградского–Лиувилля [11, с. 119] справедливы равенства

$$\eta_1(X_kU(d_k))\eta_2(X_kU(d_k)) = \exp\left\{\int\limits_{2T_k}^{3T_k} \operatorname{Tr} B_{k+1}(t)\,dt\right\} = 1,$$

$$\eta_1(Y_{k+1})\eta_2(Y_{k+1}) = \exp\left\{\int\limits_{0}^{T_{k+1}} \operatorname{Tr} B_{k+1}(t)\,dt\right\} = 1,$$

откуда вытекает отсутствие у матриц $X_kU(d_k)$ и Y_{k+1} отличных от единицы собственных значений.

Вследствие (5) имеет место неравенство $\sin\sphericalangle(s_k, y_{k+1}) = \sin\sphericalangle(s_k, \eta_k^{1/2}s_k + \eta_k^{-1/2}u_k) \le \eta_k^{-1}$, откуда в силу (6) и предположения индукции вытекают оценки $\sphericalangle(s_{k+1}, y_{k+1}) \le \sphericalangle(s_{k+1}, s_k) +$ $+ \sphericalangle(s_k, y_{k+1}) \le 2^{1-k} + 2\eta_k^{-1} \le (2/3)^{k+1}$.

Наконец, согласно (4), при $n_k \ge 2^{k+10}$ справедливы соотношения

$$\ln\eta_{k+1} \ge (n_k - 2)\ln\eta_k \ge (n_k - 2)T_k\frac{18 + 2^{-k}}{19} \ge T_{k+1}\left(1 - \frac{3}{1 + n_k}\right)\frac{18 + 2^{-k}}{19} \ge T_{k+1}\frac{18 + 2^{-k-1}}{19}.$$

Таким образом, при указанном выборе a_k, b_k, c_k, d_k все предполагавшиеся верными в случае $n = k$ утверждения справедливы и при $n = k+1$. По индукции с учетом равенства $\lambda_{\max}(A_k) =$ $= T_k^{-1}\ln\eta_k$ лемма доказана.

Лемма 5. *Для всякой двумерной матрицы X, все собственные значения которой равны единице, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|X^n\| \le 2 + n\|X\|$.*

Доказательство. Пусть x, $|x| = 1$, – нормированный собственный вектор матрицы X. Положим $V = V_X := U(\angle(x, e_1))$, где $e_1 := (1,0)^{\mathrm{T}}$.

Тогда вследствие соотношения $x = Ve_1$ вектор e_1 собственный для матрицы $V^{-1}XV$. Поэтому эта матрица является верхнетреугольной и, следовательно, множество ее диагональных элементов совпадает с совокупностью ее же собственных значений. Последние же равны соответствующим собственным значениям $\eta_j = \eta_j(X) = 1$, $j = 1, 2$, матрицы X.

Таким образом, для некоторого $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $V^{-1}XV = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда $X^n = \left(V \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V^{-1}\right)^n = V \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n V^{-1} = V \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V^{-1}$.

Поэтому если все собственные значения матрицы X равны единице, то в силу вытекающего из унитарности матрицы V равенства $\|V\| = \|V^{-1}\| = 1$ справедлива оценка $\|X^n\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| \le 2 + n|a| \le 2 + n \left\| \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 2 + n\|X\|$. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем будем предполагать матрицы $A_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, заданными таким образом, что система (1_{A_k}) обладает указанными в лемме 4 свойствами. В этих условиях верна

Лемма 6. *При всех $t \in \mathbb{R}$ существует предел $A(t) := \lim\limits_{k \to +\infty} A_k(t)$ и матрица $A(\cdot)$ почти периодическая.*

Доказательство. В силу леммы 4 справедливы оценки $\max\limits_{t \in \mathbb{R}} \|A_k(t) - B_k(t)\| \le 2^{-1}\pi(|a_k| + |b_k| + |c_k| + |d_k|) \le 8(2/3)^k$. Отсюда и из той же леммы получаем неравенства $\max\limits_{t \in [0, T_k)} \|A_k(t) - A_{k+1}(t)\| \le \max\limits_{t \in [0, T_k)} \|A_k(t) - B_k(t)\| + \|B_k(t) - A_{k+1}(t)\| \le 8(2/3)^k + 2^{-1}\pi(|b_k| + |a_k|) \le 12(2/3)^k$. Наконец, при $t \in [T_k, T_{k+1})$ верны соотношения $\|A_k(t) - A_{k+1}(t)\| \le 2^{-1}\pi(|b_k| + |c_k| + |d_k|) \le 6(2/3)^k$.

Таким образом, в целом имеем оценку $\max\limits_{t \in \mathbb{R}} \|A_k(t) - A_{k+1}(t)\| \le 12(2/3)^k$. Поэтому матрица $A(\cdot)$ есть предел сходящейся равномерно на $\mathbb{R}$ последовательности непрерывных периодических функций $A_k(\cdot)$. Следовательно, построенная таким образом матрица $A(\cdot)$ будет предельно-периодической [6, с. 114] и, в частности, (равномерно) почти периодической [6, с. 20] функцией. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [1, T_k)$ имеет место равенство $A(t) = B_k(t)$.*

Доказательство. Для каждого натурального $l > k$ при $t \in [1, T_k) \subset [1, T_l)$ справедливо равенство $A_{l+1}(t) = A_l(t)$. Отсюда с учетом леммы 6 вытекают соотношения

$$A(t) = \lim_{l \to +\infty} A_l(t) = A_{k+1}(t) + \sum_{l=k+1}^{+\infty} (A_{l+1}(t) - A_l(t)) = A_{k+1}(t) = B_k(t).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Имеет место оценка $\lambda_{\max}(A) \le 3/4$.*

Доказательство. В силу лемм 2 и 7 для любых $k, i \in \mathbb{N}$, $i \le n_k$, верны равенства

$$X_A(iT_k, T_k) = X_{B_{k+1}}(iT_k, T_k) = \prod_{j=1}^{i-1} X_{B_{k+1}}((i-j+1)T_k, (i-j)T_k) =$$

$$= \left(\prod_{j=2}^{i-1} X_k U(d_k)\right) X_k U(d_k) U(-c_k) = (X_k U(d_k))^{i-1} U(-c_k),$$

откуда, поскольку, согласно лемме 4, все собственные значения матрицы $X_k U(d_k)$ равны единице, и из лемм 5 и 3 вытекает оценка $\|X_A(iT_k, T_k)\| \le 2 + (i-1)\|X_k U(d_k)\| \le 2 + (i-1)e^{T_k} \le 3(i-1)^2 e^{T_k}$.

Поэтому, учитывая лемму 3, для любых $k, i \in \mathbb{N}$, $i \le n_k$, и четных целых $t \in [0, T_k)$ получаем неравенства

$$\frac{\ln \|X_A(iT_k + t, T_k)\|}{iT_k + t} \le \frac{\ln(\|X_A(iT_k + t, iT_k)\| \, \|X_A(iT_k, T_k)\|)}{iT_k + t} \le \frac{t + \ln 3i^2 + T_k \operatorname{sgn}(i-1)}{iT_k + t} \le$$

$$\le \frac{\ln 3i^2}{iT_k} + \frac{\operatorname{sgn}(i-1)}{i} + \max_{0 \le t < T_k} \frac{t}{iT_k + t} \le \frac{4}{T_k} + \frac{\operatorname{sgn}(i-1)}{i} + \frac{1}{1+i} = \frac{4}{T_k} + \frac{1 + (\operatorname{sgn}(i-1))}{1+i} \tag{7}$$

(здесь $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} i = 1$, если $i > 0$).

Из лемм 3 и 7 вытекает оценка $\|X_A(T_k,1)\| = \|X_{B_k}(T_k,1)\| \le e^{T_k}$. Отсюда и из (7) при $k \ge 4$, $t = T_k$, $i = n_k$ с учетом следующего из леммы 1 равенства $\|X_A(1,0)\| = \|\lim\limits_{k\to+\infty} X_{A_k}(1,0)\| = \lim\limits_{k\to+\infty}\|U(\alpha_k(0))\| = 1$ имеем соотношения

$$\ln\|X_A(T_{k+1},0)\| \le \ln\|X_A(T_k,0)\| + \ln\|X_A(T_{k+1},T_k)\| \le T_k + T_{k+1}(4T_k^{-1} + 2(1+n_k)^{-1}) \le 2^{-5}T_{k+1}.$$

Тогда в силу (7) для таких k справедливы неравенства $\ln\|X_A(iT_k + t,0)\|/(iT_k + t) \le \le (\ln\|X_A(iT_k+t,T_k)\| + \ln\|X_A(T_k,0)\|)/(iT_k+t) \le 2^{-5}T_k(iT_k)^{-1} + 4T_k^{-1} + (1+\operatorname{sgn}(i-1))(1+i)^{-1} \le \le 2^{-4} + 2/3 < 3/4$.

Поэтому в силу [10, с. 93] и, поскольку характеристический показатель можно вычислять по временным арифметическим прогрессиям [10, с. 537], в частности, по последовательности четных целых чисел, выполняются соотношения

$$\lambda_{\max}(A) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\| = \overline{\lim_{\mathbb{N}\ni j\to+\infty}}\, \frac{1}{2j}\ln\|X_A(2j,0)\| \le \frac{3}{4}.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Для любого* $0 < \sigma \le 1/400$ *имеет место оценка* $\nabla_\sigma(A) \ge 17/19$.

Доказательство. Для всяких $0 \le k, i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le 19$, положим $t_{20k+i} := T_k(1+i)$, и пусть $\xi(0) := 0$, $\xi(j) := \max\limits_{0\le i<j}(\ln\|X_A(j,i)\| + \xi(i) - i\sigma)$. Тогда, учитывая вытекающее из формулы Остроградского–Лиувилля [11, с. 119] неравенство

$$2\ln\|X_A(T_k,0)\| \ge \sum_{i=1}^{2}\ln\eta_i(X_A(T_k,0)) = \int_0^{T_k}\operatorname{Tr}A(t)\,dt = \lim_{k\to+\infty}\int_0^{T_k}\operatorname{Tr}A_k(t)\,dt = 0$$

и следующие из лемм 2, 4 и 6 оценки $\|X_A((1+i)T_k, iT_k)\| = \|X_{B_{k+1}}((1+i)T_k, iT_k)\| = \|X_kU(d_k)\| = \|X_k\| \ge \eta(X_k) \ge T_k(18 + 2^{-k})/19$, получаем соотношения

$$\xi(t_{20k+19}) = \xi(t_{20k}) + \sum_{i=0}^{18}(\xi(t_{20k+i+1}) - \xi(t_{20k+i})) \ge$$

$$\ge \ln\|X_A(T_k,0)\| + \sum_{i=0}^{18}(-\sigma iT_k + \ln\|X_A((1+i)T_k, iT_k)\|) \ge \sum_{i=0}^{18}\left(-\sigma\cdot 19T_k + \frac{18}{19}T_k\right) \ge 17T_k.$$

Отсюда, согласно [13], вытекают неравенства

$$\nabla_\sigma(A) \ge \lim_{k\to+\infty} t_{20k+19}^{-1}\xi(t_{20k+19}) \ge \frac{17}{19}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Для любого $\delta > 0$ найдется двумерная матрица-функция $Q(t)$ такая, что $\lambda[Q] \le -\sigma$, $\sigma \le 1/400$ и $\nabla_\sigma(A) \le \lambda_{\max}(A+Q) + \delta$. Для всякого решения $x(t)$ системы (1_{A+Q}) положим $y(t) = y_x(t) := e^{-ht}x(t)$, $B = B(t) := A(t) - hE$. При любом $h \in \mathbb{R}$ прямой проверкой устанавливается равенство $\dot y = B(t)y + Q(t)y$.

Тогда в случае $h = 4/5$, $\delta = 1/40$ в силу лемм 8 и 9 имеем для старшего экспоненциального показателя $\nabla_0(B) := \sup\limits_{\sigma>0}\nabla_\sigma(B)$ системы (1_B) оценки

$$\nabla_\sigma(B) \ge \lambda_{\max}(B+Q) = \lambda_{\max}(A+Q) - h \ge \nabla_\sigma(A) - \delta - h \ge \frac{17}{19} - \frac{4}{5} - \frac{1}{40} > 0 > \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \ge$$

$$\ge \lambda_{\max}(A) - h = \lambda_{\max}(B).$$

Отсюда, согласно следствию 2 из [14], вытекает существование $m > 1$ и $f \in F_m$ таких, что нулевое решение соответствующей системы (2) неустойчиво. С учетом леммы 6 теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.
2. *Виноград Р.Э., Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 230–242.
3. *Миллионщиков В.М.* // Мат. сб. 1968. Т. 77. № 2. С. 163–173.
4. *Миллионщиков В.М.* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.
5. *Миллионщиков В.М.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10. № 3. С. 569.
6. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
7. *Миллионщиков В.М.* // Мат. сб. 1969. Т. 78. № 2. С. 179–201.
8. *Новиков В.Л.* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5. С. 795–800.
9. *Липницкий А.В.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1615–1620.
10. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
11. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.
12. *Виноград Р.Э.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 5. С. 800–813.
13. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
14. *Изобов Н.А.* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 5. С. 389–392.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
10.10.2004 г.