

УДК 517.926+517.938

Растягивающие эндоморфизмы на бесконечномерном торе¹

© 2020. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается некоторый естественный класс растягивающих эндоморфизмов $G \in C^1$, действующих из \mathbb{T}^∞ в \mathbb{T}^∞ , где \mathbb{T}^∞ — бесконечномерный тор (прямое произведение счетного числа окружностей с топологией равномерной покоординатной сходимости). Интересующие нас эндоморфизмы допускают представление в виде суммы линейного растягивающего отображения и периодической добавки. Устанавливаются следующие стандартные факты из гиперболической теории: топологическая сопряженность растягивающего эндоморфизма G из нашего класса с линейным эндоморфизмом тора, структурная устойчивость отображения G , справедливость для G на \mathbb{T}^∞ свойства топологического перемешивания.

DOI: <https://doi.org/10.1134/faa3767>

§ 1. Постановка задачи и описание результатов

История развития гиперболической теории и основные ее достижения подробно описаны в обзоре [1] и монографиях [2], [3]. В настоящей статье некоторые результаты этой теории, касающиеся так называемых растягивающих отображений, распространяются на бесконечномерный случай.

Прежде всего, дадим соответствующие определения. В связи с этим рассмотрим банахово пространство ℓ_∞ , состоящее из бесконечномерных векторов

$$\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots), \quad \varphi_{(k)} \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1, \quad \sup_{k \geq 1} |\varphi_{(k)}| < \infty$$

(здесь и далее символом colon обозначаются различные вектор-столбцы). Считаем, что в ℓ_∞ задана произвольная норма, эквивалентная стандартной норме

$$\|\varphi\| = \sup_{k \geq 1} |\varphi_{(k)}|. \quad (1.1)$$

Следует сразу отметить, что в дальнейшем (если не оговорено противное) одним и тем же символом $\|\cdot\|$ будем обозначать как норму в ℓ_∞ , так и индуцированные этой нормой операторные нормы (из контекста всегда будет ясно, о какой именно норме идет речь).

Бесконечномерным тором \mathbb{T}^∞ назовем множество вида

$$\mathbb{T}^\infty = \{\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots) \in \ell_\infty : 0 \leq \varphi_{(k)} \leq 2\pi \pmod{2\pi}, \quad k \geq 1\}, \quad (1.2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10055).

снабженное метрикой

$$\rho(\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}}) = \inf_{l \in \mathbb{Z}^\infty} \|\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} + 2\pi l\| \quad \text{для любых } \overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}} \in \mathbb{T}^\infty. \quad (1.3)$$

Здесь \mathbb{Z}^∞ — целочисленная решетка

$$\{l = \text{colon}(l_1, \dots, l_k, \dots) \in \ell_\infty : l_k \in \mathbb{Z}, k \geq 1\},$$

а в качестве $\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\varphi}}$ под знаком нормы фигурируют не сами точки $\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}} \in \mathbb{T}^\infty$, а их «поднятия» из \mathbb{T}^∞ в ℓ_∞ , для которых мы сохранили прежние обозначения. Поскольку упомянутые поднятия определяются с точностью до аддитивных добавок вида $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}^\infty$, то метрика (1.3) не зависит от их конкретного выбора. Заметим также, что в силу определения (1.1) сходимость по данной метрике совпадает с равномерной покоординатной сходимостью.

Далее, опишем необходимый в дальнейшем класс бесконечномерных матриц $\Lambda = (\lambda_{kj})_{k,j=1}^\infty$ с целочисленными элементами λ_{kj} . Будем считать, что в каждой строке любой из рассматриваемых матриц содержится лишь конечное число ненулевых элементов и выполнено условие

$$\sup_{k \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{kj}| < \infty. \quad (1.4)$$

В этом случае, как нетрудно проверить, матрица Λ порождает в пространстве ℓ_∞ ограниченный линейный оператор. Предполагаем еще, что спектр $\sigma(\Lambda)$ этого оператора удовлетворяет требованию

$$\sigma(\Lambda) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}. \quad (1.5)$$

Любую матрицу с перечисленными свойствами назовем *растягивающей*, а совокупность всех таких матриц обозначим через $\text{Lin}(\ell_\infty)$.

Заметим, что класс $\text{Lin}(\ell_\infty)$ заведомо непуст. Простейшими его представителями являются так называемые диагональные матрицы

$$\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, \dots\}, \quad (1.6)$$

где Λ_k — различные конечномерные блоки с целочисленными элементами, размерности которых ограничены при $k \rightarrow +\infty$. Предполагаем, естественно, что для матриц (1.6) выполнено условие (1.4). Считаем еще, что спектры $\sigma(\Lambda_k)$ матриц Λ_k таковы, что

$$\sigma(\Lambda_k) \subset \sigma_* \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\} \quad \text{для любого } k \geq 1. \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что фигурирующее в (1.7) замкнутое и ограниченное множество $\sigma_* \subset \mathbb{C}$ фиксировано, т. е. не зависит от k . В этом случае спектр $\sigma(\Lambda)$ оператора (1.6), задающийся равенством

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} \sigma(\Lambda_k)}$$

(черта здесь означает замыкание), обладает свойством (1.5).

Для пояснения причин справедливости приведенной формулы для спектра оператора (1.6) обратим внимание, что любое значение $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\Lambda)$ принадлежит резольвентному множеству данного оператора. Действительно, в этом случае справедливо представление

$$(\lambda I - \Lambda)^{-1} = \text{diag}\{(I_1 \lambda - \Lambda_1)^{-1}, \dots, (I_k \lambda - \Lambda_k)^{-1}, \dots\},$$

где I — единичный оператор в ℓ_∞ , I_k — единичные матрицы тех же размерностей, что и Λ_k . А поскольку очевидным образом

$$\sup_{k \geq 1} \|(I_k \lambda - \Lambda_k)^{-1}\| < \infty,$$

то оператор $(\lambda I - \Lambda)^{-1}$ заведомо ограничен в ℓ_∞ .

Типовым примером матрицы вида (1.6) служит

$$\Lambda = \text{diag}\{m_1, \dots, m_k, \dots\}, \quad m_k \in \mathbb{Z}, \quad |m_k| \geq 2 \text{ при } k \geq 1, \quad \sup_{k \geq 1} |m_k| < \infty. \quad (1.8)$$

Следует, однако, отметить, что класс $\text{Lin}(\ell_\infty)$ не исчерпывается лишь диагональными матрицами. В качестве примера рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что спектр порожденного этой матрицей линейного оператора состоит из одной точки $\lambda = 2$.

Опишем теперь интересующий нас класс вектор-функций $g(\varphi)$, $\varphi \in \ell_\infty$, со значениями в ℓ_∞ . Считаем, что все они непрерывны по $\varphi \in \ell_\infty$, их производные Фреше $g'(\varphi)$ непрерывны по $\varphi \in \ell_\infty$ в равномерной операторной топологии (т. е. в топологии операторной нормы на пространстве $L(\ell_\infty)$ ограниченных линейных операторов) и выполняются требования

$$\sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|g(\varphi)\| < \infty, \quad \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|g'(\varphi)\| < \infty, \quad g(\varphi + 2\pi l) \equiv g(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty. \quad (1.9)$$

Предполагаем также, что отображение

$$\varphi \mapsto g(\varphi) \quad (1.10)$$

вполне непрерывно в ℓ_∞ (напомним, что нелинейный оператор называется вполне непрерывным, если он непрерывен и переводит любое ограниченное множество в предкомпактное).

Совокупность вектор-функций с перечисленными свойствами обозначим через $C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$, а норму в пространстве $C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$ зададим равенством

$$\|g\|_{C_{\text{per}}^1} = \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|g(\varphi)\| + \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|g'(\varphi)\|. \quad (1.11)$$

В силу условий (1.9) правая часть из (1.11) заведомо конечна, а само пространство $C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$, как нетрудно убедиться, является банаховым.

Введенные выше пространства $\text{Lin}(\ell_\infty)$ и $C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$ порождают соответствующий класс отображений, действующих на торе (1.2). А именно, фиксируем произвольно $\Lambda \in \text{Lin}(\ell_\infty)$ и $g(\varphi) \in C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$ и рассмотрим отображение

$$G: \varphi \mapsto G(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi) \pmod{2\pi}, \quad (1.12)$$

где вектор $\Lambda\varphi + g(\varphi) \pmod{2\pi}$ представляет собой естественную проекцию исходного вектора $\Lambda\varphi + g(\varphi)$ из ℓ_∞ на тор \mathbb{T}^∞ . Иными словами,

$$\Lambda\varphi + g(\varphi) \pmod{2\pi} = p(\Lambda\varphi + g(\varphi)), \quad (1.13)$$

где

$$p(\varphi) = \text{colon} \left(\varphi_{(1)} - 2\pi \left\lfloor \frac{\varphi_{(1)}}{2\pi} \right\rfloor, \dots, \varphi_{(k)} - 2\pi \left\lfloor \frac{\varphi_{(k)}}{2\pi} \right\rfloor, \dots \right) \in \mathbb{T}^\infty$$

для любого $\varphi = \text{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots) \in \ell_\infty$, (1.14)

а через $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначена целая часть числа.

Отдельно остановимся на известных определениях растягивания, структурной устойчивости и топологического перемешивания (см., например, [2], [3]), адаптированных к нашему случаю. В связи с этим введем в рассмотрение линейный оператор $DG(\varphi) = \Lambda + g'(\varphi): \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ (дифференциал), а также операторы $D(G^n(\varphi))$, $n \in \mathbb{N}$, задающиеся равенствами

$$D(G^n(\varphi)) = DG(\varphi_{n-1}) \circ DG(\varphi_{n-2}) \circ \dots \circ DG(\varphi_0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.15)$$

где $\varphi_j = G^j(\varphi)$, $j \geq 0$. Обратим внимание, что формула (1.15) вытекает из известного цепного правила дифференцирования сложного отображения, примененного к C^1 -гладкому оператору $G^n(\varphi)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что отображение (1.12) — *растягивающий эндоморфизм*, если найдутся такие постоянные $c > 0$, $\mu > 1$, что

$$\|D(G^n(\varphi))\xi\| \geq c\mu^n \|\xi\| \quad \text{для любых } \varphi \in \mathbb{T}^\infty, \xi \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

Следует особо отметить, что вопрос о представлении произвольного растягивающего отображения G бесконечномерного тора в виде суммы линейного ограниченного оператора и периодической добавки является открытым. В связи с этим мы сознательно ограничили наше рассмотрение содержательным подклассом растягивающих эндоморфизмов, имеющих вид (1.12). Связано это с двумя обстоятельствами. Во-первых, и это главное, только для таких эндоморфизмов удастся установить приводимые ниже классические результаты о топологической сопряженности, структурной устойчивости и топологическом перемешивании. Во-вторых, введенный нами класс эндоморфизмов позволяет привести и проанализировать некоторые конкретные примеры растягивающих эндоморфизмов. В связи с последним обстоятельством мы, в частности, предпо-

лагаем, что фигурирующий в (1.12) линейный оператор Λ допускает матричное представление. Хотя от этого требования можно и отказаться, считая, что Λ — произвольный ограниченный в ℓ_∞ линейный оператор, преобразующий в себя целочисленную решетку \mathbb{Z}^∞ и удовлетворяющий требованию (1.5).

Определение 1.2. Отображение (1.12) назовем C^1 -структурно устойчивым, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $\Delta(\varphi) \in C^1_{\text{per}}(\ell_\infty)$, $\|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} < \varepsilon$, соответствующее возмущенное отображение

$$G_\Delta: \varphi \mapsto G_\Delta(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi) + \Delta(\varphi) \pmod{2\pi} \quad (1.17)$$

топологически сопряжено с невозмущенным отображением G .

Определение 1.3. Отображение (1.12) является C^1 -сильно структурно устойчивым, если, во-первых, оно C^1 -структурно устойчиво и, во-вторых, найдется такое $\varepsilon > 0$, что при всех $\Delta \in C^1_{\text{per}}(\ell_\infty)$, $\|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} < \varepsilon$, определено семейство гомеоморфизмов $\tau_\Delta: \mathbb{T}^\infty \rightarrow \mathbb{T}^\infty$ со следующими свойствами:

$$G_\Delta = \tau_\Delta^{-1} \circ G \circ \tau_\Delta, \quad \tau_\Delta \rightarrow \text{id}, \quad \tau_\Delta^{-1} \rightarrow \text{id} \quad \text{при} \quad \|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} \rightarrow 0. \quad (1.18)$$

Здесь id — тождественный оператор на торе \mathbb{T}^∞ , а сходимость предполагается равномерной по $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$.

Определение 1.4. Свойство *топологического перемешивания* означает существование для любых двух непустых открытых множеств $U, V \subset \mathbb{T}^\infty$ такого натурального $n_0 = n_0(U, V)$, что $G^n(U) \cap V \neq \emptyset$ при всех $n \geq n_0$.

Как оказывается, для введенного нами класса отображений (1.12) сохраняется известный результат Шуба [4], состоящий в следующем.

Теорема 1.1. *Предположим, что эндоморфизм (1.12) является растягивающим. Тогда он топологически сопряжен со своей линейной частью, т. е. с линейным эндоморфизмом*

$$L: \varphi \mapsto \Lambda\varphi \pmod{2\pi}. \quad (1.19)$$

Из сформулированной теоремы, представляющей собой основной результат данной статьи, нетрудно получить C^1 -структурную устойчивость любого растягивающего отображения G . Однако, как показывает дополнительный анализ, справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 1.2. *Каждый растягивающий эндоморфизм (1.12) тора (1.2) обладает свойством C^1 -сильной структурной устойчивости.*

Еще одним стандартным свойством, присущим растягивающим отображениям, является топологическое перемешивание. В бесконечномерном случае указанное свойство сохраняется. А именно, имеет место следующая

Теорема 1.3. *В рамках условий теоремы 1.1 эндоморфизм (1.12) является топологически перемешивающим.*

Доказательства приведенных теорем содержатся в §2. При обосновании теоремы 1.1 используется подход, основанный на методах функционального анализа. Суть этого подхода состоит в том, что, во-первых, сначала определяется

полусопрягающий эндоморфизм как неподвижная точка некоторого нелинейного оператора в соответствующем функциональном пространстве; во-вторых, отдельно устанавливается, что полученный на этом пути эндоморфизм на самом деле есть гомеоморфизм, сопрягающий отображения (1.12) и (1.19).

В случае теоремы 1.2 ситуация аналогичная. При ее обосновании выявляется характер зависимости упомянутого выше сопрягающего гомеоморфизма от периодической добавки $g(\varphi)$, что, в свою очередь, сводится к анализу некоторых функциональных уравнений. Что же касается теоремы 1.3, то она вытекает из теоремы 1.1 и из свойства топологического перемешивания для растягивающего линейного эндоморфизма (1.19) (наличие такого свойства у отображения (1.19) проверяется отдельно).

§ 2. Обоснование результатов

2.1. Доказательство теоремы 1.1. Во всех дальнейших построениях существенную роль играет отображение

$$\tilde{G}: \varphi \mapsto \tilde{G}(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi), \quad (2.1)$$

действующее из ℓ_∞ в ℓ_∞ и являющееся поднятием эндоморфизма (1.12) из T^∞ в ℓ_∞ . А именно, нам потребуется следующая

Лемма 2.1. *При выполнении условий теоремы 1.1 оператор (2.1) диффеоморфно отображает пространство ℓ_∞ на ℓ_∞ и удовлетворяет неравенствам*

$$\|\tilde{G}^n(\varphi_1) - \tilde{G}^n(\varphi_2)\| \geq c\mu^n \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

где c, μ — постоянные из (1.16).

Доказательство. Убедимся сначала в том, что \tilde{G} отображает ℓ_∞ на все пространство ℓ_∞ . В связи с этим фиксируем произвольно элемент $z \in \ell_\infty$, рассмотрим уравнение $\tilde{G}(\varphi) = z$ и выполним в нем замену $\varphi = \Lambda^{-1}z + \Delta$ (в силу условия (1.5) на спектр оператора Λ обратный оператор Λ^{-1} заведомо существует). В результате для отыскания Δ приходим к уравнению вида

$$\Delta = -\Lambda^{-1}g(\Lambda^{-1}z + \Delta). \quad (2.3)$$

Опираясь на свойства (1.9) и тот факт, что оператор (1.10) вполне непрерывен, заключаем, что по переменной Δ правая часть уравнения (2.3) порождает в ℓ_∞ вполне непрерывный оператор, преобразующий в себя шар с центром в нуле радиуса

$$r = \|\Lambda^{-1}\| \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|g(\varphi)\|.$$

Таким образом, в силу принципа Шаудера упомянутое уравнение допускает хотя бы одно решение $\Delta \in \ell_\infty$, а значит, справедливо соотношение $\tilde{G}(\ell_\infty) = \ell_\infty$.

Покажем теперь, что при любом $\varphi \in \ell_\infty$ непрерывно обратим дифференциал $D\tilde{G}(\varphi): \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ отображения (2.1). В связи с этим привлечем вытекающие из (1.13) равенства

$$D\tilde{G}(\varphi) = DG(p(\varphi)), \quad G^n(p(\varphi)) = p(\tilde{G}^n(\varphi)) \quad \text{для любых } \varphi \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

где p — проекция (1.14). Подставляя, далее, соотношения (2.4) в (1.15), (1.16), приходим к выводу, что условие растягивания (1.16) эквивалентно требованию

$$\|D\tilde{G}(\varphi_{n-1}) \circ D\tilde{G}(\varphi_{n-2}) \circ \dots \circ D\tilde{G}(\varphi_0)\xi\| \geq c\mu^n \|\xi\|$$

для любых $\varphi \in \ell_\infty$, $\xi \in \ell_\infty$ и $n \in \mathbb{N}$, (2.5)

где $\varphi_j = \tilde{G}^j(\varphi)$, $j \geq 0$.

При $n = 1$ неравенство (2.5) приобретает вид

$$\|\Lambda(I + A(\varphi))\xi\| \geq c\mu \|\xi\| \quad \text{для любых } \varphi \in \ell_\infty \text{ и } \xi \in \ell_\infty, \quad (2.6)$$

где $A(\varphi) = \Lambda^{-1}g'(\varphi)$ и I — единичный оператор в ℓ_∞ . В свою очередь, из (2.6) следует, что число $\lambda = -1$ заведомо не является собственным значением оператора $A(\varphi)$. А так как отображение (1.10) вполне непрерывно, то данный оператор компактен, а значит, указанное значение регулярно для $A(\varphi)$. Таким образом, уравнение $D\tilde{G}(\varphi)\xi = z$ при любом $z \in \ell_\infty$ имеет единственное решение $\xi = (I + A(\varphi))^{-1}\Lambda^{-1}z \in \ell_\infty$, что и доказывает непрерывную обратимость оператора $D\tilde{G}(\varphi)$.

Итак, мы установили, что оператор \tilde{G} отображает ℓ_∞ на ℓ_∞ и представляет собой локальный диффеоморфизм (это вытекает из обратимости дифференциала $D\tilde{G}(\varphi)$ и теоремы о неявном отображении). Согласно известным результатам Банаха и Мазура (см. [5], [6]), если в дополнение к указанным свойствам отображение \tilde{G} является собственным (т.е. прообраз $\tilde{G}^{-1}(Y)$ любого компактного множества Y компактен), то оно будет и глобальным диффеоморфизмом из ℓ_∞ в ℓ_∞ . Следовательно, в проверке нуждается факт компактности множества $\tilde{G}^{-1}(Y)$ при любом компактном множестве $Y \subset \ell_\infty$.

Фиксируем произвольно компакт $Y \subset \ell_\infty$ и бесконечную последовательность точек $x_n \in \tilde{G}^{-1}(Y)$, $n \geq 1$. Без ограничения общности можно считать, что соответствующая последовательность $y_n = \Lambda x_n + g(x_n) \in Y$ сходится при $n \rightarrow +\infty$ к некоторому элементу $y_* \in Y$. Принимая во внимание этот факт, из соотношения

$$x_n = \Lambda^{-1}y_n - \Lambda^{-1}g(x_n) \quad (2.7)$$

и свойств (1.9) заключаем, что последовательность x_n ограничена. А поскольку оператор (1.10) компактен, то из последовательности $g(x_n)$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем предполагать, что имеет место сходимость $g(x_n) \rightarrow z_* \in \ell_\infty$, $n \rightarrow +\infty$. Тогда, опираясь на формулу (2.7) и свойство непрерывности вектор-функции $g(\varphi)$, последовательно выводим:

$$x_n \rightarrow x_* = \Lambda^{-1}y_* - \Lambda^{-1}z_*, \quad g(x_n) \rightarrow g(x_*) = z_*, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \Lambda x_* + g(x_*) = y_*.$$

Тем самым установлено включение $x_* \in \tilde{G}^{-1}(Y)$, доказывающее компактность множества $\tilde{G}^{-1}(Y)$.

Для завершения доказательства леммы остается убедиться в справедливости неравенств (2.2). В связи с этим введем в рассмотрение дифференци-

лы $D(\tilde{G}^{-n}(\varphi))$, $n \in \mathbb{N}$, задающиеся аналогичными формулам (1.15) формулами

$$D(\tilde{G}^{-n}(\varphi)) = [D\tilde{G}(\varphi_{-n})]^{-1} \circ [D\tilde{G}(\varphi_{-(n-1)})]^{-1} \circ \cdots \circ [D\tilde{G}(\varphi_{-1})]^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

где $\varphi_j = \tilde{G}^j(\varphi)$, $j \in \mathbb{Z}$. Полагая, далее, в (2.5)

$$\xi = [D\tilde{G}(\varphi_0)]^{-1} \circ [D\tilde{G}(\varphi_1)]^{-1} \circ \cdots \circ [D\tilde{G}(\varphi_{n-1})]^{-1} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi} \in \ell_\infty, \quad (2.9)$$

и учитывая соотношения (2.8), приходим к выводу, что

$$\|D(\tilde{G}^{-n}(\tilde{G}^n(\varphi)))\bar{\xi}\| \leq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \|\bar{\xi}\| \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

А отсюда в силу произвольности $\varphi \in \ell_\infty$ и $\bar{\xi} \in \ell_\infty$ последовательно заключаем, что

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|D(\tilde{G}^{-n}(\varphi))\| &\leq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}, \\ \|\tilde{G}^{-n}(\varphi_1) - \tilde{G}^{-n}(\varphi_2)\| &\leq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Что же касается требуемых оценок (2.2), то они — очевидные следствия неравенств (2.11). Лемма 2.1 полностью доказана.

Еще одно свойство вспомогательного отображения (2.1), которое нам потребуется в дальнейшем, связано с линейным оператором $\tilde{L}: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ вида

$$\tilde{L}: \varphi \mapsto \Lambda \varphi, \quad (2.12)$$

где Λ — матрица из (1.12). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. *При выполнении условий теоремы 1.1 диффеоморфизм (2.1) топологически сопряжен со своей линейной частью, т. е. с отображением (2.12).*

Доказательство. Построим сначала полусопрягающее непрерывное отображение

$$\varkappa: \varphi \mapsto \varkappa(\varphi) = \varphi + \tilde{\varkappa}(\varphi), \quad \tilde{\varkappa}(\varphi + 2\pi l) \equiv \tilde{\varkappa}(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \quad (2.13)$$

удовлетворяющее соотношению

$$\varkappa \circ \tilde{G} = \tilde{L} \circ \varkappa. \quad (2.14)$$

Используя явные выражения для \tilde{G} , \varkappa , \tilde{L} (см. (2.1), (2.12), (2.13)), перепишем равенство (2.14) в виде

$$\tilde{\varkappa}(\varphi) = \Lambda^{-1}[g(\varphi) + \tilde{\varkappa}(\tilde{G}(\varphi))]. \quad (2.15)$$

При анализе получившегося уравнения нам потребуется полное метрическое пространство \mathcal{H} , элементами которого являются вектор-функции $\tilde{\varkappa}(\varphi)$ со зна-

чениями в ℓ_∞ , обладающие свойствами

$$\tilde{\varkappa}(\varphi + 2\pi l) \equiv \tilde{\varkappa}(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \quad \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}(\varphi)\| < \infty. \quad (2.16)$$

Кроме этого, предполагаем, что вполне непрерывен в пространстве ℓ_∞ оператор

$$\varphi \mapsto \tilde{\varkappa}(\varphi). \quad (2.17)$$

Метрику в \mathcal{H} зададим соотношением

$$\rho(\tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varkappa}_2) = \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}_1(\varphi) - \tilde{\varkappa}_2(\varphi)\|_* \quad \text{для любых } \tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varkappa}_2 \in \mathcal{H}. \quad (2.18)$$

Здесь $\|\cdot\|_*$ — специальная норма в ℓ_∞ , такая, что соответствующая индуцированная норма $\|\Lambda^{-1}\|_*$ оператора Λ^{-1} строго меньше единицы. Согласно предполагаемым спектральным свойствам оператора Λ (см. (1.5)), указанная норма заведомо существует и эквивалентна исходной норме (1.1).

Опираясь на свойства (1.9), (2.16), формулу (2.18) и на тот факт, что отображения (1.10), (2.17) вполне непрерывны, убеждаемся в том, что введенное пространство \mathcal{H} действительно является полным, а оператор, порожденный правой частью равенства (2.15), переводит \mathcal{H} в себя и оказывается сжимающим (с константой сжатия $q = \|\Lambda^{-1}\|_* < 1$). Таким образом, уравнение (2.15) допускает единственное решение $\tilde{\varkappa}_*(\varphi) \in \mathcal{H}$.

Из проделанных построений следует, что функция

$$\tilde{\varkappa}(\varphi) = \tilde{\varkappa}_*(\varphi) \quad (2.19)$$

обладает свойствами (2.16), а отвечающее ей отображение (2.17) вполне непрерывно в ℓ_∞ . Кроме этого, по построению функция (2.19) является решением уравнения (2.15). Тем самым мы нашли требуемое отображение (2.13), удовлетворяющее условию полусопряженности (2.14).

Покажем, что отображение (2.13) представляет собой гомеоморфизм пространства ℓ_∞ . Для этого фиксируем произвольно вектор $\bar{\varphi} \in \ell_\infty$ и рассмотрим уравнение $\varkappa(\varphi) = \bar{\varphi}$ относительно $\varphi \in \ell_\infty$. Подставляя в него $\varphi = \bar{\varphi} + \psi$, для отыскания $\psi \in \ell_\infty$, в свою очередь, приходим к уравнению $\psi = -\tilde{\varkappa}(\bar{\varphi} + \psi)$. Остается заметить, что в силу свойств (2.16) и того, что отображение (2.17) вполне непрерывно, правая часть получившегося уравнения порождает по переменной $\psi \in \ell_\infty$ нелинейный вполне непрерывный оператор, переводящий в себя замкнутый шар из ℓ_∞ с центром в нуле радиуса

$$r = \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}(\varphi)\|.$$

Таким образом, согласно теореме Шаудера, это уравнение допускает хотя бы одно решение $\psi \in \ell_\infty$.

Итак, мы установили, что $\varkappa(\ell_\infty) = \ell_\infty$. Далее, нетрудно видеть, что отображение (2.13) собственное (см. аналогичный фрагмент доказательства леммы 2.1). Следовательно, для проверки того, что (2.13) — гомеоморфизм, достаточно убедиться во взаимной однозначности данного отображения.

Предположим противное: найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, для которых $\varkappa(\varphi_1) = \varkappa(\varphi_2)$. Рассмотрим затем последовательности $\varphi_n^j = \tilde{G}^n(\varphi_j)$, $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$, и заметим, что вследствие вытекающих из свойства (2.14) соотношений $\varkappa \circ \tilde{G}^n = \tilde{L}^n \circ \varkappa$, $n \geq 1$, справедлива цепочка равенств

$$\varkappa(\varphi_n^1) = \varkappa(\tilde{G}^n(\varphi_1)) = \tilde{L}^n(\varkappa(\varphi_1)) = \tilde{L}^n(\varkappa(\varphi_2)) = \varkappa(\tilde{G}^n(\varphi_2)) = \varkappa(\varphi_n^2). \quad (2.20)$$

Объединяя равенства (2.20) с формулами (2.13), (2.16), приходим к выводу, что

$$\|\varphi_n^1 - \varphi_n^2\| = \|\tilde{\varkappa}(\varphi_n^2) - \tilde{\varkappa}(\varphi_n^1)\| \leq 2 \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}(\varphi)\| < \infty. \quad (2.21)$$

Остается добавить, что свойство ограниченности (2.21) противоречит вытекающим из (2.2) соотношениям

$$\|\varphi_n^1 - \varphi_n^2\| \geq c\mu^n \|\varphi_1 - \varphi_2\| \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Подводя итог, отметим, что отображение (2.13) действительно является гомеоморфизмом из ℓ_∞ в ℓ_∞ , а значит, операторы (2.1) и (2.12) топологически сопряжены. Лемма 2.2 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению эндоморфизма

$$\bar{\varkappa}(\varphi) = p(\varkappa(p^{-1}(\varphi))), \quad \varphi \in \mathbb{T}^\infty, \quad (2.22)$$

порожденного отображением \varkappa на торе \mathbb{T}^∞ . Подчеркнем, что в качестве $p^{-1}(\varphi)$ здесь выступает любой прообраз точки $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$. А так как в силу (2.13) имеем

$$\varkappa(\varphi + 2\pi l) \equiv 2\pi l + \varkappa(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \quad (2.23)$$

то формула (2.22) заведомо корректна (т.е. не зависит от выбора конкретного прообраза $p^{-1}(\varphi)$).

Покажем, что (2.22) представляет собой гомеоморфизм тора \mathbb{T}^∞ . Предположим, напротив, существование таких точек $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, что $\bar{\varkappa}(\varphi_1) = \bar{\varkappa}(\varphi_2)$. Тогда в силу (2.22) имеем $p(\varkappa(p^{-1}(\varphi_1))) = p(\varkappa(p^{-1}(\varphi_2)))$ и, следовательно,

$$\varkappa(p^{-1}(\varphi_1)) = \varkappa(p^{-1}(\varphi_2)) + 2\pi l \quad (2.24)$$

при некотором $l \in \mathbb{Z}^\infty$. Далее, при анализе равенства (2.24) воспользуемся свойством (2.23). Учитывая данное свойство и факт взаимной однозначности отображения \varkappa , приходим к выводу, что

$$\varkappa(p^{-1}(\varphi_1)) = \varkappa(p^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l), \quad p^{-1}(\varphi_1) = p^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l.$$

А это значит, что вопреки предполагаемому выше точки $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$ совпадают. Полученное противоречие доказывает, что $\bar{\varkappa}$ — гомеоморфизм тора (1.2).

Обратим внимание, что по своему построению отображение (2.22) удовлетворяет условию полусопряженности, аналогичному условию (2.14):

$$\bar{\varkappa} \circ G = L \circ \bar{\varkappa},$$

где, напомним, L — линейный эндоморфизм (1.19). Таким образом, оно представляет собой искомый гомеоморфизм, сопрягающий отображения (1.12) и (1.19). Теорема 1.1 полностью доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1.2. Обоснование факта C^1 -сильной структурной устойчивости эндоморфизма (1.12) разбивается на три этапа. Сначала мы убедимся в том, что при достаточно малой по норме (1.11) добавке $\Delta(\varphi)$ из пространства $C^1_{\text{per}}(\ell_\infty)$ отображение

$$\tilde{G}_\Delta: \varphi \mapsto \tilde{G}_\Delta(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi) + \Delta(\varphi), \quad (2.25)$$

являющееся поднятием отображения (1.17), представляет собой диффеоморфизм из ℓ_∞ в ℓ_∞ . Затем проверим, что при малых $\Delta(\varphi) \in C^1_{\text{per}}(\ell_\infty)$ для оператора (1.17) сохраняется свойство растягивания. И наконец, на заключительном третьем этапе установим существование гомеоморфизма $\tau_\Delta: \mathbb{T}^\infty \rightarrow \mathbb{T}^\infty$ с требуемыми свойствами (1.18).

Для реализации первого из описанных выше этапов фиксируем произвольно элемент $\bar{\varphi} \in \ell_\infty$ и рассмотрим уравнение $\tilde{G}_\Delta(\varphi) = \bar{\varphi}$ относительно $\varphi \in \ell_\infty$. Привлекая отображение (2.1), перепишем его в эквивалентной форме

$$\varphi = \tilde{G}^{-1}(\bar{\varphi} - \Delta(\varphi)) \quad (2.26)$$

и убедимся в том, что оно имеет единственное решение $\varphi \in \ell_\infty$ при любом векторе $\bar{\varphi} \in \ell_\infty$.

При анализе уравнения (2.26) нам потребуется некоторая информация о вектор-функции $\tilde{G}^{-1}(\varphi)$. Для ее получения объединим равенство (2.8) в случае $n = 1$ с вытекающим из (2.10) свойством ограниченности

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|(\Lambda + g'(\varphi))^{-1}\| < \infty.$$

Кроме того, будем считать добавку Δ в (2.25) настолько малой, что

$$q_1(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} q_0 \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\Delta'(\varphi)\| < 1. \quad (2.27)$$

В результате приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}^{-1}(\varphi_1) - \tilde{G}^{-1}(\varphi_2)\| &\leq q_0 \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty, \\ \|\tilde{G}^{-1}(\bar{\varphi} - \Delta(\varphi_1)) - \tilde{G}^{-1}(\bar{\varphi} - \Delta(\varphi_2))\| &\leq q_1(\Delta) \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Неравенства (2.27), (2.28) и принцип сжимающих отображений гарантируют требуемую однозначную разрешимость уравнения (2.26). Таким образом, обратное отображение \tilde{G}_Δ^{-1} существует и допускает представление вида

$$\tilde{G}_\Delta^{-1}(\varphi) = \tilde{G}^{-1}(\varphi) + \omega_\Delta(\varphi), \quad (2.29)$$

где непрерывная по $\varphi \in \ell_\infty$ добавка $\omega_\Delta(\varphi)$ такова, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\omega_\Delta(\varphi)\| = 0. \quad (2.30)$$

Действительно, объединяя формулу

$$\omega_{\Delta}(\varphi) = \tilde{G}^{-1}(\varphi - \Delta(\theta))\Big|_{\theta=\tilde{G}_{\Delta}^{-1}(\varphi)} - \tilde{G}^{-1}(\varphi)$$

с первой оценкой из (2.28), приходим к выводу, что

$$\|\omega_{\Delta}(\varphi)\| \leq q_0 \sup_{\varphi \in \ell_{\infty}} \|\Delta(\varphi)\|.$$

А отсюда требуемое предельное равенство (2.30) вытекает автоматически.

Покажем теперь, что при всех достаточно малых $\Delta(\varphi) \in C_{\text{per}}^1(\ell_{\infty})$ отображение (1.17) является растягивающим. Как было установлено в процессе доказательства теоремы 1.1, неравенства вида (1.16) для G_{Δ} эквивалентны аналогичным неравенствам (2.5) оценкам

$$\|D\tilde{G}_{\Delta}(\varphi_{n-1}) \circ D\tilde{G}_{\Delta}(\varphi_{n-2}) \circ \dots \circ D\tilde{G}_{\Delta}(\varphi_0)\xi\| \geq \tilde{c}\tilde{\mu}^n\|\xi\|$$

для любых $\varphi \in \ell_{\infty}$, $\xi \in \ell_{\infty}$ и $n \in \mathbb{N}$, (2.31)

где $\varphi_j = \tilde{G}_{\Delta}^j(\varphi)$, $j \geq 0$, а постоянные $\tilde{c} > 0$, $\tilde{\mu} > 1$, вообще говоря, отличны от соответствующих констант c , μ из (1.16). В свою очередь, в силу соотношений вида (2.8), (2.9) (выписанных для $\tilde{G}_{\Delta}(\varphi)$) требования (2.31) эквивалентны неравенствам

$$\sup_{\varphi \in \ell_{\infty}} \|D(\tilde{G}_{\Delta}^{-n}(\varphi))\| \leq \frac{1}{\tilde{c}} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\right)^n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}, \quad (2.32)$$

аналогичным неравенствам (2.10), (2.11).

Для доказательства оценок (2.32) предпримем некоторые дополнительные построения. Сначала, объединяя аналогичные формулам (2.8) явные формулы для дифференциалов $D(\tilde{G}_{\Delta}^{-n}(\varphi))$ с установленными ранее свойствами (2.29), (2.30) обратного оператора $\tilde{G}_{\Delta}^{-1}(\varphi)$, убеждаемся в том, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \ell_{\infty}} \|D(\tilde{G}_{\Delta}^{-n}(\varphi))\| = \sup_{\varphi \in \ell_{\infty}} \|D(\tilde{G}^{-n}(\varphi))\| \quad (2.33)$$

при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Далее, выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ настолько большим, что

$$\frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{n_0} < 1, \quad (2.34)$$

где c , μ — постоянные из (1.16). Тогда в силу (2.11), (2.33)

$$q_2(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in \ell_{\infty}} \|D(\tilde{G}_{\Delta}^{-n_0}(\varphi))\| \rightarrow \sup_{\varphi \in \ell_{\infty}} \|D(\tilde{G}^{-n_0}(\varphi))\| < 1, \quad \|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0,$$

а значит, при всех достаточно малых $\Delta(\varphi) \in C_{\text{per}}^1(\ell_{\infty})$ справедливо неравенство

$$q_2(\Delta) < 1. \quad (2.35)$$

Это неравенство представляет собой условие на выбор $\Delta(\varphi)$, которое наряду с (2.27) всюду ниже считаем выполненным.

Перейдем затем непосредственно к обоснованию требуемых оценок (2.32). С этой целью возьмем произвольное натуральное n и представим его в виде $n = kn_0 + r$, где $r \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$. Тогда при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty$

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}_\Delta^{-n}(\varphi_1) - \tilde{G}_\Delta^{-n}(\varphi_2)\| &= \|\tilde{G}_\Delta^{-kn_0}(\tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_1)) - \tilde{G}_\Delta^{-kn_0}(\tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_2))\| \\ &\leq q_2^k(\Delta) \|\tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_1) - \tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_2)\| \\ &\leq q_2^{-(n_0-1)+n/n_0}(\Delta) \|\tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_1) - \tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_2)\| \\ &\leq q_2^{-(n_0-1)+n/n_0}(\Delta) \sup_{\substack{\varphi \in \ell_\infty \\ r \in \{0, 1, \dots, n_0-1\}}} \|D(\tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi))\| \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

А отсюда, поскольку φ_1, φ_2 произвольны, нужные неравенства (2.32) получаются с константами

$$\frac{1}{\tilde{c}} = q_2^{-(n_0-1)}(\Delta) \sup_{\substack{\varphi \in \ell_\infty \\ r \in \{0, 1, \dots, n_0-1\}}} \|D(\tilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi))\|, \quad \frac{1}{\tilde{\mu}} = q_2^{1/n_0}(\Delta).$$

Остается лишь добавить, что, согласно (2.35), условие $\tilde{\mu} > 1$ здесь справедливо автоматически.

Установленные факты свидетельствуют о том, что к оператору (1.17) применима теорема 1.1. Из этой теоремы следует, что отображения (1.12) и (1.17) топологически подобны линейному эндоморфизму (1.19). Поэтому и сами они топологически сопряжены. Таким образом, свойство C^1 -структурной устойчивости (см. определение 1.2) для отображения (1.12) полностью обосновано.

Для доказательства более сильного варианта структурной устойчивости (см. определение 1.3) сначала необходимо изучить характер зависимости от Δ аналогичного отображению (2.13) отображения

$$\varkappa_\Delta: \varphi \mapsto \varkappa_\Delta(\varphi) = \varphi + \tilde{\varkappa}_\Delta(\varphi), \quad \tilde{\varkappa}_\Delta(\varphi + 2\pi l) \equiv \tilde{\varkappa}_\Delta(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \quad (2.36)$$

удовлетворяющего уравнению

$$\varkappa_\Delta \circ \tilde{G}_\Delta = \tilde{L} \circ \varkappa_\Delta, \quad (2.37)$$

аналогичному соотношению (2.14).

Как и ранее, подставляя в (2.37) соотношения (2.12), (2.25), (2.36), для отыскания $\tilde{\varkappa}_\Delta(\varphi)$ получаем аналогичное (2.15) уравнение

$$\tilde{\varkappa}_\Delta(\varphi) = \Lambda^{-1}[g(\varphi) + \Delta(\varphi) + \tilde{\varkappa}_\Delta(\tilde{G}_\Delta(\varphi))]. \quad (2.38)$$

При анализе этого уравнения используется то же самое метрическое пространство \mathcal{H} , что и при исследовании уравнения (2.15). Однако здесь мы дополнительно предполагаем, что входящие в \mathcal{H} вектор-функции равномерно непрерывны по $\varphi \in \ell_\infty$. Повторяя, далее, соответствующий фрагмент обоснования

леммы 2.2, убеждаемся в том, что уравнение (2.38) имеет единственное решение $\tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi) \in \mathcal{H}$.

Покажем теперь, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi) - \tilde{\varkappa}_*(\varphi)\| = 0, \quad (2.39)$$

где через $\tilde{\varkappa}_*(\varphi)$ обозначена функция $\tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi)|_{\Delta=0}$. С этой целью вычтем из уравнения (2.38) при $\tilde{\varkappa}_\Delta(\varphi) = \tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi)$ аналогичное уравнение при $\Delta = 0$. В результате приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi) - \tilde{\varkappa}_*(\varphi)\|_* &\leq q(\|\Delta(\varphi)\|_* + \|\tilde{\varkappa}_\Delta^*(\tilde{G}_\Delta(\varphi)) - \tilde{\varkappa}_*(\tilde{G}_\Delta(\varphi))\|_* \\ &\quad + \|\tilde{\varkappa}_*(\tilde{G}(\varphi) + \Delta(\varphi)) - \tilde{\varkappa}_*(\tilde{G}(\varphi))\|_*), \\ \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi) - \tilde{\varkappa}_*(\varphi)\|_* &\leq \frac{q}{1-q} \left(\sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\Delta(\varphi)\|_* \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\tilde{\varkappa}_*(\tilde{G}(\varphi) + \Delta(\varphi)) - \tilde{\varkappa}_*(\tilde{G}(\varphi))\|_* \right), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма из (2.18), $q = \|\Lambda^{-1}\|_* < 1$. А отсюда и из равномерной непрерывности функции $\tilde{\varkappa}_*(\varphi)$ требуемое предельное равенство (2.39) вытекает автоматически.

Проделанные построения показывают, что функция $\varkappa_\Delta(\varphi)$ из (2.36) задается формулой $\varkappa_\Delta(\varphi) = \varphi + \tilde{\varkappa}_\Delta^*(\varphi)$ и в силу (2.39) обладает свойством

$$\lim_{\|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\varkappa_\Delta(\varphi) - \varkappa(\varphi)\| = 0, \quad (2.40)$$

где $\varkappa(\varphi) = \varkappa_\Delta(\varphi)|_{\Delta=0}$.

Рассмотрим также обратное к (2.36) отображение \varkappa_Δ^{-1} и убедимся в том, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\varkappa_\Delta^{-1}(\varphi) - \varkappa^{-1}(\varphi)\| = 0, \quad (2.41)$$

где $\varkappa^{-1}(\varphi) = \varkappa_\Delta^{-1}(\varphi)|_{\Delta=0}$. Как оказывается, для этого достаточно показать равномерную непрерывность отображения $\varkappa^{-1}(\varphi)$.

Действительно, пусть упомянутая равномерная непрерывность уже установлена. Тогда обратимся к уравнению $\varkappa_\Delta(\varphi) = \bar{\varphi}$ при любом фиксированном $\bar{\varphi} \in \ell_\infty$ и перепишем его в виде

$$\varphi + \tilde{\varkappa}(\varphi) + f_\Delta(\varphi) = \bar{\varphi}, \quad (2.42)$$

где в силу (2.40) добавка $f_\Delta(\varphi)$ такова, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|f_\Delta(\varphi)\| = 0. \quad (2.43)$$

Далее, поскольку, согласно лемме 2.2, отображение $\varkappa_\Delta(\varphi)$ является гомеоморфизмом, то уравнение (2.42) имеет единственное решение $\varphi = \varkappa_\Delta^{-1}(\bar{\varphi})$, которое одновременно удовлетворяет и уравнению

$$\varphi = \varkappa^{-1}(\bar{\varphi} - f_\Delta(\varphi)). \quad (2.44)$$

Объединяя затем информацию (2.43), (2.44) с фактом равномерной непрерывности отображения $\varkappa^{-1}(\varphi)$, приходим к выводу, что

$$\|\varkappa_\Delta^{-1}(\bar{\varphi}) - \varkappa^{-1}(\bar{\varphi})\| = \|\varkappa^{-1}(\bar{\varphi} - f_\Delta(\theta))\big|_{\theta=\varkappa_\Delta^{-1}(\bar{\varphi})} - \varkappa^{-1}(\bar{\varphi})\| \rightarrow 0$$

при $\|\Delta\|_{C_{\text{per}}^1} \rightarrow 0$ равномерно по $\bar{\varphi} \in \ell_\infty$.

Для проверки свойства равномерной непрерывности отображения \varkappa^{-1} представим его в виде

$$\varkappa^{-1}: \varphi \mapsto \varkappa^{-1}(\varphi) = \varphi + \tilde{\varkappa}(\varphi), \quad \tilde{\varkappa}(\varphi + 2\pi l) \equiv \tilde{\varkappa}(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty. \quad (2.45)$$

Далее, фиксируем произвольно натуральное n_0 , удовлетворяющее требованию (2.34), и заметим, что из аналогичного (2.14) соотношения $G^{n_0} \circ \varkappa^{-1} = \varkappa^{-1} \circ \tilde{L}^{n_0}$ для отыскания вектор-функции $\tilde{\varkappa}(\varphi)$ получаем уравнение

$$\tilde{\varkappa}(\varphi) = \tilde{G}^{-n_0}(\Lambda^{n_0}\varphi + \tilde{\varkappa}(\Lambda^{n_0}\varphi)) - \varphi, \quad (2.46)$$

аналогичное уравнению (2.15).

Как и при анализе уравнения (2.38), для исследования уравнения (2.46) нам потребуется введенное при доказательстве леммы 2.2 полное метрическое пространство \mathcal{H} с дополнительным условием равномерной непрерывности всех входящих в него вектор-функций. Кроме того, считаем, что метрика в нем задана равенством (2.18), в котором вместо специальной нормы $\|\cdot\|_*$ фигурирует обычная норма $\|\cdot\|$ в ℓ_∞ .

Привлекая вторую оценку из (2.11) и условие (2.34), приходим к выводу, что оператор, порожденный правой частью уравнения (2.46), переводит пространство \mathcal{H} в себя и является сжимающим. Таким образом, это уравнение допускает в \mathcal{H} единственное решение $\tilde{\varkappa}(\varphi) = \tilde{\varkappa}_*(\varphi)$, а значит, фигурирующая в (2.45) функция $\tilde{\varkappa}(\varphi)$ обладает требуемым свойством равномерной непрерывности.

Для завершения обоснования теоремы 1.2 рассмотрим гомеоморфизмы $\bar{\varkappa}_\Delta, \bar{\varkappa}$ тора \mathbb{T}^∞ , порожденные отображением (2.36) при $\Delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ соответственно. Из соотношений

$$G_\Delta = \bar{\varkappa}_\Delta^{-1} \circ L \circ \bar{\varkappa}_\Delta, \quad G = \bar{\varkappa}^{-1} \circ L \circ \bar{\varkappa},$$

справедливых в силу равенства (2.37), следует, что искомым гомеоморфизм τ_Δ , о котором говорится в определении 1.3, имеет вид $\tau_\Delta = \bar{\varkappa}^{-1} \circ \bar{\varkappa}_\Delta$. Что же касается требуемых свойств (1.18), то они — очевидные следствия предельных равенств (2.40), (2.41). Теорема 1.2 полностью доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1.3. Как уже отмечалось в §1, проблема обоснования теоремы 1.3 сводится к проверке свойства топологического перемешивания для линейного эндоморфизма (1.19). Но этот факт верен, о чем свидетельствует следующая

Лемма 2.3. *Для любой матрицы $\Lambda \in \text{Lin}(\ell_\infty)$ соответствующий эндоморфизм (1.19) является топологически перемешивающим.*

Доказательство. Отрезком B_r длины $r > 0$ назовем множество вида

$$B_r = \{\varphi \in \ell_\infty : \|\varphi\|_* \leq r\}, \quad (2.47)$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма из (2.18). Заметим, далее, что при некотором $r = r_0$ имеет место равенство

$$p(B_{r_0}) = \mathbb{T}^\infty, \quad (2.48)$$

где p — проекция (1.14).

Действительно, согласно (1.14), точки тора \mathbb{T}^∞ отождествляются с точками из фундаментальной области

$$\mathcal{U} = \{\varphi = \text{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots) \in \ell_\infty : 0 \leq \varphi_{(k)} < 2\pi, k \geq 1\}.$$

Ясно также, что в силу ограниченности области \mathcal{U} имеем $\mathcal{U} \subset B_{r_0}$ при подходящем увеличении $r_0 > 0$. А отсюда требуемое свойство (2.48) вытекает автоматически.

Помимо отрезка (2.47) введем в рассмотрение аналогичные отрезки

$$B_r(\varphi_0) = \{\varphi \in \ell_\infty : \|\varphi - \varphi_0\|_* \leq r\}, \quad (2.49)$$

где $\varphi_0 \in \ell_\infty$ — фиксированная точка. Заметим, далее, что поскольку все отрезки вида (2.49) одной и той же длины являются параллельными переносами друг друга, выполняется равенство

$$p(B_{r_0}(\varphi_0)) = \mathbb{T}^\infty \quad \text{для любого } \varphi_0 \in \ell_\infty \quad (2.50)$$

с той же самой постоянной r_0 , что и в (2.48). Кроме того, в силу оценки

$$\|\Lambda\varphi\|_* \geq \lambda_* \|\varphi\|_* \quad \text{для любого } \varphi \in \ell_\infty, \quad (2.51)$$

где

$$\lambda_* = \frac{1}{\|\Lambda^{-1}\|_*} > 1,$$

имеет место следующее свойство, которое будет использоваться при завершении доказательства леммы. А именно, для любых $R, r > 0, \varphi_0 \in \ell_\infty$ найдется такое натуральное N , что при любом $n \geq N$ образ $\tilde{L}^n(B_r(\varphi_0))$ отрезка (2.49) содержит целиком некоторый отрезок длины R .

Приступим теперь непосредственно к проверке для отображения (1.19) свойства топологического перемешивания. Точнее говоря, для любого непустого

открытого множества $U \subset \mathbb{T}^\infty$ докажем существование такого натурального N , что при любом $n \geq N$ имеет место равенство $L^n(U) = \mathbb{T}^\infty$.

Действительно, в силу условия $U \neq \emptyset$ заведомо найдется отрезок $B_r(\varphi_0)$ длины $r > 0$, проекция $p(B_r(\varphi_0))$ которого целиком содержится в U . Опираясь затем на свойство растягивания (2.51), убеждаемся в существовании такого натурального N , что при любом $n \geq N$ множество $\tilde{L}^n(B_r(\varphi_0))$ содержит некоторый отрезок длины r_0 , где r_0 — величина из (2.48), (2.50). Таким образом, автоматически

$$p[\tilde{L}^n(B_r(\varphi_0))] = \mathbb{T}^\infty \quad \text{для любого } n \geq N. \quad (2.52)$$

Остается воспользоваться соотношением

$$L(\varphi) = p[\tilde{L}(p^{-1}(\varphi))] \quad \text{для любого } \varphi \in \mathbb{T}^\infty,$$

из которого с учетом (2.52) получаем

$$\mathbb{T}^\infty = p[\tilde{L}^n(B_r(\varphi_0))] = L^n[p(B_r(\varphi_0))] \subset L^n(U) \subset \mathbb{T}^\infty.$$

Лемма 2.3, а значит, и теорема 1.3 полностью доказаны.

§ 3. Заключение

Из построений, проделанных при обосновании теорем 1.1, 1.2, удастся вывести некоторый критерий, позволяющий судить о наличии у отображения (1.12) свойства растягивания (1.16). Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, рассмотрим операторы

$$A_n(\varphi) = [DG(\varphi_0)]^{-1} \circ [DG(\varphi_1)]^{-1} \circ \dots \circ [DG(\varphi_{n-1})]^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где $\varphi_j = G^j(\varphi)$, $j \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Эндоморфизм (1.12) с матрицей $\Lambda \in \text{Lin}(\ell_\infty)$ и периодической добавкой $g(\varphi) \in C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$ является растягивающим в том и только в том случае, когда*

- (а) *при всех $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$ обратим дифференциал $DG(\varphi): \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$;*
- (б) *при некотором натуральном n_0 выполняется неравенство*

$$\theta_{n_0} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in \mathbb{T}^\infty} \|A_{n_0}(\varphi)\| < 1. \quad (3.2)$$

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости данной теоремы в части необходимости. В связи с этим напомним, что обратимость линейного оператора $DG(\varphi) = D\tilde{G}(p^{-1}(\varphi))$ для любого $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$ установлена в процессе доказательства леммы 2.1. Далее, в силу соотношений (2.4) и (2.8)–(2.11)

$$\theta_{n_0} = \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|D(\tilde{G}^{-n_0}(\varphi))\|, \quad \theta_{n_0} \leq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu} \right)^{n_0}. \quad (3.3)$$

А отсюда, выбирая n_0 из условия (2.34), получаем требуемое неравенство (3.2).

Для доказательства теоремы 3.1 в части достаточности напомним (см. соответствующий фрагмент обоснования леммы 2.1), что из обратимости дифференциала $D\tilde{G}(\varphi) = DG(p(\varphi))$ для любого $\varphi \in \ell_\infty$ вытекает взаимная однозначность отображения (2.1). А отсюда, в свою очередь, следует (см. соотношения (2.4), (2.8)), что постоянная (3.2) допускает представление из (3.3).

Упомянутое выше представление для θ_{n_0} позволяет воспользоваться построениями, проделанными при обосновании оценок (2.32), и получить аналогичные неравенства

$$\sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|D(\tilde{G}^{-n}(\varphi))\| \leq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

где

$$\frac{1}{c} = \theta_{n_0}^{-(n_0-1)} \sup_{\substack{\varphi \in \ell_\infty \\ r \in \{0,1,\dots,n_0-1\}}} \|D(\tilde{G}^{-r}(\varphi))\|, \quad \frac{1}{\mu} = \theta_{n_0}^{1/n_0} < 1.$$

Остается лишь добавить, что из оценок (3.4) требуемое условие растягивания (1.16) вытекает автоматически. Теорема 3.1 доказана.

В заключение приведем конкретный пример растягивающего эндоморфизма тора \mathbb{T}^∞ . При его анализе будем считать, что норма в ℓ_∞ задана стандартной формулой (1.1).

В координатах $\varphi_{(k)}$, $k \geq 1$ (см. (1.2)), интересующее нас отображение записывается в виде

$$G: \varphi_{(k)} \mapsto m_k \varphi_{(k)} + \delta_k \sin \varphi_{(k+1)} \pmod{2\pi}, \quad k \geq 1. \quad (3.5)$$

Здесь числовые последовательности m_k , δ_k обладают свойствами

$$m_k \in \mathbb{Z}, \quad \delta_k \in \mathbb{R}, \quad |m_k| \geq 2 \quad \text{для любого } k \geq 1, \quad \sup_{k \geq 1} |m_k| < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = 0. \quad (3.6)$$

Кроме того, предполагаем еще, что

$$\sup_{s \geq 1} \left(\frac{1}{|m_s|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|m_{s+k}|} \prod_{n=1}^k \left| \frac{\delta_{s+n-1}}{m_{s+n-1}} \right| \right) < 1. \quad (3.7)$$

Несложная проверка показывает, что в случае (3.5), (3.6) матрица Λ задается равенством (1.8) и принадлежит классу $\text{Lin}(\ell_\infty)$, а вектор-функция

$$g(\varphi) = \text{colon}(\delta_1 \sin \varphi_{(2)}, \delta_2 \sin \varphi_{(3)}, \dots, \delta_k \sin \varphi_{(k+1)}, \dots)$$

принадлежит пространству $C_{\text{per}}^1(\ell_\infty)$. Что же касается оператора $DG(\varphi)$, то он действует на любой вектор $\xi = \text{colon}(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots) \in \ell_\infty$ по правилу

$$DG(\varphi)\xi = \text{colon}(a_1 \xi_1 + b_1 \xi_2, a_2 \xi_2 + b_2 \xi_3, \dots, a_k \xi_k + b_k \xi_{k+1}, \dots), \quad (3.8)$$

где

$$a_k = m_k, \quad b_k = \delta_k \cos \varphi_{(k+1)}, \quad k \geq 1. \quad (3.9)$$

При изучении вопроса об обратимости оператора (3.8) воспользуемся следующим утверждением.

Теорема 3.2. Пусть заданы две последовательности $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, обладающие свойствами

$$a_k \neq 0 \text{ для любого } k \geq 1, \quad \sup_{k \geq 1} |a_k| < \infty, \quad (3.10)$$

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \geq 1} \left(\frac{1}{|a_s|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_{s+k}|} \prod_{n=1}^k \left| \frac{b_{s+n-1}}{a_{s+n-1}} \right| \right) < \infty.$$

Тогда для любого вектора $y = \text{colon}(y_1, \dots, y_k, \dots) \in \ell_\infty$ система уравнений

$$a_k x_k + b_k x_{k+1} = y_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

допускает единственное решение $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_k, \dots) \in \ell_\infty$ и выполняется оценка

$$\|x\| \leq \theta \|y\|, \quad (3.12)$$

где θ — постоянная из (3.10).

Доказательство. Фиксируем произвольно $y = \text{colon}(y_1, \dots, y_k, \dots) \in \ell_\infty$ и рассмотрим вектор $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_k, \dots)$ с компонентами

$$x_s = \frac{y_s}{a_s} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{y_{s+k}}{a_{s+k}} \prod_{n=1}^k \frac{b_{s+n-1}}{a_{s+n-1}}, \quad s \geq 1. \quad (3.13)$$

Опираясь на соотношения (3.10), (3.13), несложно показать, что, во-первых, этот вектор принадлежит пространству ℓ_∞ и удовлетворяет системе (3.11), а во-вторых, для него справедлива оценка (3.12). Поэтому для завершения доказательства теоремы остается проверить, что соответствующая однородная система

$$a_k x_k + b_k x_{k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.14)$$

имеет в ℓ_∞ только нулевое решение.

Пусть $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_k, \dots) \in \ell_\infty$ — произвольное решение системы (3.14). Тогда, привлекая первые k уравнений этой системы, выражаем x_1 через x_{k+1} по формуле

$$x_1 = (-1)^k \prod_{n=1}^k \frac{b_n}{a_n} x_{k+1}. \quad (3.15)$$

Заметим, далее, что $\sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$, а из условий (3.10) последовательно получаем

$$\sup_{s \geq 1} \frac{1}{|a_s|} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_{k+1}|} \prod_{n=1}^k \left| \frac{b_n}{a_n} \right| < \infty, \quad \prod_{n=1}^k \left| \frac{b_n}{a_n} \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Объединяя эти факты и переходя в равенстве (3.15) к пределу при $k \rightarrow +\infty$, убеждаемся в том, что $x_1 = 0$.

Аналогичным образом, привлекая блок соотношений (3.14) с номерами $s, s + 1, \dots, s + k - 1$, приходим к выводу, что

$$x_s = (-1)^k \prod_{n=1}^k \frac{b_{s+n-1}}{a_{s+n-1}} x_{s+k}, \quad s \geq 1. \quad (3.16)$$

Как и в предыдущем случае, нетрудно увидеть, что при любом фиксированном $s \geq 1$ и при $k \rightarrow +\infty$ правая часть формулы (3.16) стремится к нулю. Таким образом, автоматически $x_s = 0$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Теорема 3.2 доказана.

Возвращаясь к оператору $DG(\varphi)$, заметим, что в силу условия (3.7) фигурирующие в (3.8) коэффициенты (3.9) удовлетворяют требованиям (3.10). А это значит (см. теорему 3.2), что упомянутый оператор заведомо обратим и справедлива оценка (3.2) при $n_0 = 1$. Остается воспользоваться теоремой 3.1, гарантирующей наличие у эндоморфизма (3.5) свойства растягивания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Динамические системы–9*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 66, ВИНТИ, М., 1991.
- [2] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [3] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений*, МЦНМО, М., 2005.
- [4] M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Amer. J. Math., **91**:1 (1969), 175–199.
- [5] S. Banach, S. Mazur, *Über mehrdeutige stetige Abbildungen*, Studia Math., **5** (1934), 174–178.
- [6] R. Plastock, *Homeomorphisms between Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **200** (1974), 169–183.

С. Д. Глызин

Ярославский государственный университет имени

П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию

4 марта 2020 г.

После доработки

13 июня 2020 г.

Принята к публикации

18 июня 2020 г.

А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет имени

П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: andkolesov@mail.ru

Н. Х. Розов

Московский государственный университет имени

М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: fpo.mgu@mail.ru