



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Соответствие между тетра-
рядами тернарных и кватернарных квадратич-
ных форм, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1991,
том 196, 61–82

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

22 января 2025 г., 21:53:32



СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ТЕТА-РЯДАМИ ТЕРНАРНЫХ И КВАТЕРНАРНЫХ
КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Введение

В [6] построен в терминах матриц Эйхлера-Брандта подъем Шимурь тета-рядов тернарных квадратичных форм. В данной работе для общих тета-рядов со сферическими коэффициентами показано, что указанный подъем индуцирован эпиморфизмом ι группы кватернионов \mathcal{O}^X на ортогональную группу O трехмерного квадратичного пространства кватернионов с нулевым следом $V = \mathcal{O}_0$.

Более конкретно, пусть \mathcal{O} - алгебра определенных кватернионов над полем рациональных чисел \mathbb{Q} , d - произведение простых чисел, нерасщепляющих \mathcal{O} ; n - неотрицательное целое число и $\mathcal{M}_{n+3/2} = \mathcal{M}(L, \Phi(L), P_1)$ - пространство тета-рядов $\theta(x, f)$ (п.3.6) полуцелого веса $n+3/2$ для решеток из рода $[L]$ решетки $L = V \cap \Omega$, где Ω (п.1.5) - некоторый порядок алгебры \mathcal{O} дискриминанта Δ и функция f' из множества $F'_{2n} = F_{2n}(U \setminus \mathcal{O}_\Delta / \mathcal{O})$ (п.2.3); аналогично, $\mathcal{M}_{2n+2} = \mathcal{M}(\Omega, \Phi(\Omega, I), \xi)$ - пространство тета-рядов $\theta(x, f)$ (п.4.6) целого веса $2n+2$ для решеток из рода $[\Omega]$ и f из множества функций $F'_{2n} = F_{2n}(U \setminus \mathcal{O}'_\Delta / \mathcal{O}^X)$ (п.2.1); δ - мономорфизм (2.7) из F'_{2n} в F_{2n}

$$\mathcal{M}_{n+3/2} \xrightarrow{\delta} \mathcal{M}_{2n+2} : \theta(x, f') \mapsto \theta(x, \delta(f')) ; \quad (1)$$

пусть $T(p)$ и $\hat{T}(p^2)$ - операторы Гекке (4.9) и (3.8) группы GL_2 и ее накрывающей и $T'(p^2)$ - оператор Гекке из п.3.5 на пространстве F'_{2n} . В этих обозначениях имеет место

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для четных n и простых чисел $p \nmid \Delta$ или $p \mid d$ выполняются следующие утверждения.

1. Подпространство $\delta(\mathcal{M}_{n+3/2}) \subset \mathcal{M}_{2n+2}$ инвариантно относительно операторов Гекке $T(p)$.

2. Если $f' \in F'_{2n}$ - собственная функция оператора $T'(p^2)$ с собственным значением $\lambda'(p^2)$, то

$$\theta(x, f') \Big|_{m/n, x} \hat{T}(p^2) = p^n \lambda'(p^2) \theta(x, f') \quad (2)$$

и

$$\theta(x, \delta(f')) \Big|_{m, \gamma} T(p) = p^n \lambda'(p^2) \theta(x, \delta(f')).$$

Если же $p \mid d$, то любая функция f' - собственная и $\lambda'(p^2) = 1$.

3. Пусть \bar{f}' - столбец из функций, образующих базис пространства F'_{2n} , и $\Lambda'(p^2)$ - матрица оператора Гекке $T'(p^2)$ в этом базисе. Тогда справедливы следующие тождества для векторных тета-рядов

$$\theta(x, \bar{f}') \Big|_{m/2, \gamma} \hat{T}(p^2) = p^n \Lambda'(p^2) \theta(x, \bar{f}')$$

и

(3)

$$\theta(x, \delta(\bar{f}')) \Big|_{m, \gamma} T(p) = p^n \Lambda'(p^2) \theta(x, \delta(\bar{f}')).$$

Для простых $p \mid d$ матрица $\Lambda'(p^2)$ единичная.

Выбирая другие параметры пространств $\mathcal{M}_{n+3/2}$ и \mathcal{M}_{2n+2} , можно получить новые тета-ряды и эти тета-ряды, ассоциированные с собственной функцией f' операторов Гекке $T'(p^2)$, имеют прежние собственные значения.

§ I. Трехмерные квадратичные пространства и кватернионы

I.1. Пусть V - невырожденное трехмерное квадратичное пространство над полем рациональных чисел \mathbb{Q} с положительно определенной квадратичной формой $q(x)$. Согласно [4, с.29], можно считать, что

$$V = \mathcal{O}_0 = \{ \alpha \in \mathcal{O} ; T(\alpha) = 0 \},$$

где \mathcal{O} - отвечающая V алгебра кватернионов, $T(\alpha) = \alpha + \bar{\alpha}$ и $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ - главная инволюция алгебры \mathcal{O} , при этом $q(x) = N(x) = x \cdot \bar{x}$ (норма x). В этих обозначениях ассоциированная с q симметрическая билинейная форма $B(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ примет вид

$$B(x, y) = T(x \cdot \bar{y}) = -T(x; y) \text{ для } x, y \in V = \mathcal{O}_0. \quad (\text{I.1})$$

Любое ортогональное преобразование σ пространства V , т.е. линейное преобразование с условием $B(x, y) = B(\sigma x, \sigma y)$ для всех $x, y \in V$, имеет вид

$$\sigma x = \alpha x \alpha^{-1} \quad \text{для } x \in V \quad \text{и } \alpha \in \mathcal{A}^x = \mathcal{A} \setminus \{0\}.$$

Обозначим через $O = O(V)$ группу ортогональных преобразований V и определим эпиморфизм

$$\iota : \mathcal{A}^x \rightarrow O,$$

полагая $\iota(\alpha) = \sigma$, где σ - отображение (I.2). Ядро $\text{Ker } \iota$ совпадает с $\mathcal{Q}^x = \mathcal{Q} \setminus \{0\}$. Если \mathcal{A}_A^x и O_A - аделизации групп \mathcal{A}^x и O , то отображение ι полагаем распространенным на эти группы.

I.2. Алгебру кватернионов \mathcal{A} можно рассматривать как четырехмерное квадратичное пространство над \mathbb{Q} с квадратичной формой $N(x)$ и билинейной формой $B(x, y) = T(x \cdot y)$ для $x, y \in \mathcal{A}$. Поскольку \mathcal{A} положительно определенная, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ совпадает с алгеброй гамильтоновых кватернионов \mathbb{H} . Для почти всех простых чисел p

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p) \quad (\text{I.3})$$

(множество 2×2 -матриц с коэффициентами из поля p -адических чисел \mathbb{Q}_p). Пусть p_1, \dots, p_e - все простые числа (их нечетное число [5]), не удовлетворяющие условию (I.3), и пусть $d = p_1 \dots p_e$. Для $p = p_i$ \mathcal{A}_p совпадает с единственной алгеброй с делением над \mathbb{Q}_p .

I.3. Решетками L в V и M в \mathcal{A} называются свободные над кольцом целых чисел \mathbb{Z} модули ранга 3 и 4 соответственно.

Если M - решетка в \mathcal{A} , то $L = V \cap M$ - решетка в V .

Чтобы не усложнять работу, в качестве решеток M рассмотрим

$M = \Omega$, где Ω - некоторый порядок в \mathcal{A} (решетка, являющаяся кольцом с единицей).

Если $\Omega = \Omega_{\max}$ - максимальный порядок, то локализации $\Omega_p = \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, где \mathbb{Z}_p - кольцо

p -целых чисел из \mathbb{Q}_p , обладают свойствами:

$$\Omega_p \cong_{\mathbb{Z}_p} M_2(\mathbb{Z}_p) \quad \text{и} \quad \Omega_p = \{ \alpha_p \in \mathcal{A}_p ; N(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_p \} \quad (\text{I.4})$$

соответственно для $p \nmid d$ и $p \mid d$. В дальнейшем будем рассматривать такие порядки $\Omega = \Omega(h)$ с h , равным произведению

различных простых чисел $p \nmid d$, для которых Ω_p удовлетворяют соответствующему свойству из (I.4) для любого $p \nmid h$, а

для $p \mid h$ группа единиц Ω_p^x является конгруэнц-подгруппой

из $GL_n(\mathbb{Z}_p)$, т.е. для некоторого $q = p^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Ω_p^x содержит подгруппу матриц $M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$.
 Например, такими являются порядки Эйхлера [5], удовлетворяющие условиям:

$$\Omega_p \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p); c \equiv 0 \pmod{p} \right\} \text{ для } p|h. \quad (I.5)$$

I.4. Дискриминантом Ω называется определитель

$$\Delta = \Delta(\Omega) = \det B, \quad \text{где } B = (B(v_i, v_j))_{4 \times 4}$$

для некоторого \mathbb{Z} -базиса v_1, \dots, v_4 решетки Ω . Из определения следует, что B - целая симметрическая матрица с четной диагональю. Ее ступень $q = q(\Omega)$ - наименьшее натуральное число такое, что $B^{\#} = q \cdot B^{-1}$ - снова целая матрица с четной диагональю. Аналогично определяются дискриминант $\Delta' = \Delta(L)$ и ступень $q' = q(L)$ для решетки $L = L(\Omega) = \mathbb{V} \cap \Omega$. Для порядков Эйхлера [5, с.95] $\Delta = d^2 \cdot h^2$ и $q = d \cdot h$.

I.5. В группе \mathcal{O}_A^x выделим подгруппу

$$\mathcal{O}_A^1 = \left\{ \alpha = (\alpha_p) \in \mathcal{O}_A^x; \prod_p |N(\alpha_p)|_p = 1 \right\}, \quad (I.6)$$

где произведение включает $p = \infty$ и $|\dots|_p$ - p -норма в поле \mathbb{Q}_p . Используя для произвольной решетки $M \subset \mathcal{O}$ равенство $M = \mathcal{O} \cap (\bigcap_p M_p)$, зададим действие группы \mathcal{O}_A^1 на множестве решеток формулой

$$\alpha M = \mathcal{O} \cap \left(\bigcap_p \alpha_p \cdot M_p \right). \quad (I.7)$$

Начиная с этого места, фиксируем некоторый порядок $\Omega = \Omega(h)$, и пусть

$$U = U(\Omega) = \{ u \in \mathcal{O}_A^1; u\Omega = \Omega \}$$

и группа \mathcal{O}_A^x диагонально вложена в \mathcal{O}_A^1 . Отображение $(U\alpha^{-1}\mathcal{O}_A^x) \mapsto \{\alpha\Omega\}$ задает взаимно однозначное соответствие между двойными классами и \mathcal{O}_A^x -классами решеток вида $\alpha\Omega$ из рода $[\Omega]$ решетки Ω . Поэтому число двойных классов конечно. В пространстве V фиксируем решетку $L = L(h) = \mathbb{V} \cap \Omega$ и аналогично (I.7) зададим действие группы \mathcal{O}_A на множестве решеток из V . По той же причине конечно множество классов $U' \setminus \mathcal{O}_A / \mathcal{O}$, где $U' = U(L)$ - стабилизатор решетки L в группе \mathcal{O}_A . В общем случае число двойных классов и число классов решеток из рода $[L]$ равны.

§ 2. Автоморфные формы

2.1. Пусть ν - неотрицательное целое число и ξ_ν - симметрическое тензорное представление группы $GL_n(\mathbb{C})$ степени ν [5, с.104], [9, с.196]. Считая \mathbb{H}^x вложенным в $GL_n(\mathbb{C})$, определим представление $\sigma_\nu(\alpha) = N(\alpha)^{-\nu/2} \xi_\nu(\alpha)$ мультипликативной группы \mathbb{H}^x и далее - группы \mathcal{O}_A^x , полагая $\sigma_\nu((\alpha_\infty, \dots, \alpha_p, \dots)) = \sigma_\nu(\alpha_\infty)$. Введем конечномерное \mathbb{C} -пространство $F_\nu = F_\nu(U \setminus \mathcal{O}_A^x / \mathcal{O}_A^x)$ функций $f(q)$ на группе \mathcal{O}_A^x со значениями в пространстве $W \cong \mathbb{C}^{\nu+1}$ представления ξ_ν , удовлетворяющих условию

$$f(uq\gamma) = \sigma_\nu(u) f(q) \quad (2.1)$$

для всех $u \in U$, $q \in \mathcal{O}_A^x$ и $\gamma \in \mathcal{O}_A^x$. Функции $f(q)$ будем называть автоморфными формами степени ν .

2.2. (U, \mathcal{O}_A^x) образуют пару Гекке [1]. Обозначим через $L(\mathcal{O}_A^x)$ соответствующее кольцо Гекке, и если $T = \sum_k a_k(g_k U)$ - разложение на левые классы смежности элемента $T \in L(\mathcal{O}_A^x)$, то полагаем

$$(Tf)(q) = \sum_k a_k \sigma_\nu(g_k) f(g_k^{-1} \cdot q). \quad (2.2)$$

$(Tf)(q)$ не зависит от выбора представителей g_k из классов смежности $g_k U$ и формула (2.2) задает представление кольца Гекке $L(\mathcal{O}_A^x)$ на пространстве F_ν .

2.3. Для ортогональной группы O введем пространство $F'_\nu = F_\nu(U' \setminus \mathcal{O}_A / O)$ функций $f'(q)$ на группе \mathcal{O}_A также со значениями в пространстве W и удовлетворяющих условию

$$f'(u'q\gamma) = \sigma_\nu(u) f'(q) \quad (2.3)$$

для всех $u' \in U'$, $q \in \mathcal{O}_A$ и $\gamma \in O$, где $u' \in \mathcal{O}_A^x$ - произвольный ι -прообраз элемента u' . Так как ι - эпиморфизм и $\sigma_\nu(i\alpha) = \sigma_\nu(\alpha)$ для любого i из группы идеалов I поля \mathbb{Q} , то u существует и $\sigma_\nu(u)$ не зависит от выбора элемента u . Равенство $\sigma_\nu(u') = \sigma_\nu(u)$ задает представление группы \mathcal{O}_A на пространстве W .

С помощью формулы (2.2) определим представление кольца $L(O_A)$ для пары Гекке (U', \mathcal{O}_A) на пространстве функций F'_ν .

2.4. Согласно (I.1) и (I.4), для стабилизаторов U_p и U'_p решеток Ω_p и $L_p = \bigvee_p \cap \Omega_p$ выполняются следующие формулы:

$$U_p = \Omega_p^x = \{ \alpha_p \in \mathcal{O}_p^x; N(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_p^x \}, \quad U'_p = \Omega_p^x / \mathbb{Q}_p^x \quad (2.4)$$

для $p \mid h$;

$$U_p = \Omega_p^x, \quad U'_p = \mathcal{N}(\Omega_p^x) / \mathbb{Q}_p^x, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{N}(\Omega_p^x)$ - нормализатор Ω_p^x в группе \mathcal{O}_p^x , для $p \nmid h$;

$$U_p = \Omega_p^x \cong GL_2(\mathbb{Z}_p), \quad U' = U_p \cdot \mathbb{Q}_p^x / \mathbb{Q}_p^x \quad (2.6)$$

для $p \nmid h$. Таким образом, имеет место включение $\nu(U) \subset U'$ и поэтому, принимая во внимание (2.1) и (2.3), с помощью эпиморфизма ν можно определить подъем автоморфных форм

$$F'_p \xrightarrow{\delta} F_p: f' \mapsto f = (\delta f')(q) = f'(\nu(q)), \quad (2.7)$$

являющийся мономорфным отображением.

2.5. ЛЕММА 2.1. Предположим, что $\mathcal{N}(\Omega_p^x) = \Omega_p^x \cdot \mathbb{Q}_p^x$ для всех $p \mid h$. Тогда отображение

$$T = \sum_k a_k (g_k U) \mapsto T' = \sum_k a_k (\nu(g_k) U') \quad (2.8)$$

определяет эпиморфизм кольца Гекке $L(\mathcal{O}_A^1)$ на кольцо $L(\mathcal{O}_A)$. Если f' принадлежит пространству F'_p , $T \in L(\mathcal{O}_A^1)$ и δ - отображение (2.7), то выполняется формула коммутирования

$$T \delta(f') = \delta(T' f'), \quad \text{где } T' = \nu(T). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемые кольца Гекке порождаются своими локальными подкольцами $L_p(\mathcal{O}_A^1)$ и $L_p(\mathcal{O}_A)$, которые, в свою очередь, порождаются двойными классами $T(q) = (U_q U)$ и $T'(q') = (U' q' U')$ элементов $q = (q_\infty, \dots, q_p, \dots)$ из \mathcal{O}_A^1 с $q_p = 1$ для всех $p \neq \infty$ или $1/p$ и $q' = \nu(q)$. Отсюда и из (2.4)-(2.6) следует, что $\varepsilon: L_p(\mathcal{O}_A^1) \rightarrow L_p(\mathcal{O}_A)$ - гомоморфизм. Эпиморфность же его следует из аналогичного свойства отображения ν . Из (2.2) и (2.7) получаем равенства

$$(T \delta(f'))(q) = \sum_k a_k \delta_p(g_k) f'(\nu(g_k^{-1} \cdot q))$$

и

$$(\delta(\iota(\Gamma)f'))(g) = \sum_k a_k \delta_j(\iota(g_k)) f'(\iota(g_k))^{-1} \cdot \iota(g),$$

откуда вытекает формула (2.9). \square

Условия леммы 2.1 выполняются для максимальных порядков Ω_{\max} и для порядков Эйхлера (см. п.1.3). Кроме того, из (2.4) для любого $p|d$ заключаем, что $L_p(O_A) = \mathbb{Q}\Gamma'(e)$, где e - тождественное отображение пространства V и $\Gamma'(e)$ - единичный элемент кольца Гекке. В этом случае $\iota(\Gamma(g)) = \Gamma'(e)$ для всех двойных классов $\Gamma(g)$ из $L(O_A)$ и $p|d$. Поэтому в силу (2.9) получаем

$$\Gamma(g)f = f \quad \text{для } f = \delta(f') \text{ и } p|d, \quad (2.10)$$

где f' - любая функция из пространства F'_j .

§ 3. Тета-ряды тернарных квадратичных форм

3.1. Пусть $\Phi(L)(x)$ - характеристическая функция решетки L из п.1.5, определенная на пространстве $V = \mathcal{O}_0$;

$$\Phi(L, s)(x) = e(x, s)\Phi(L)(x),$$

где $e(x, s) = \exp(2\pi i N(x)s)$ и $s \in \mathbb{Q}$; и пусть

$$\Phi(L, s)(x) = P_1(x)\Phi(L, s)(x) \quad (3.1)$$

и при этом [9, с.199] $P_1(x)$ - W -векторная функция от $x \in \mathbb{H}$, координаты которой имеют вид $f(a+bi+cj+dk) = Q(b, c, d)$ с однородными многочленами Q степени n и $P_1(\alpha x \alpha^{-1}) = \epsilon_{2n}(\alpha) P_1(x)$ для $\alpha \in \mathbb{H}^\times$ и $x \in \mathbb{H}$. Для $g = (g_\infty, \dots)$ из группы O_A , вспоминая формулу (1.2), положим

$$(\pi(g)\Phi(L, s))(x) = P_1(g_\infty^{-1}(x))\Phi(gL, s)(x) \quad (3.2)$$

и для функций $\Phi(L) = \Phi(L, 0)$ и $f' \in F'_{2n}$ рассмотрим интеграл

$$E(f', \Phi(L))(x) = \text{vol}_{dx} (U)^{r-1} \int_{O_A/O} (f'(g); \langle \pi^{-1}(g)\Phi(L), e(\cdot, x) \rangle) dg, \quad (3.3)$$

где мера dq индуцирована мерой Тамагавы dx на группе $O_A(\lambda^{n+1})$, $(,)$ - эрмитово произведение в пространстве $W \cong \mathbb{C}^{\lambda^{n+1}}$, относительно которого представление $\sigma_{\lambda n}$ унитарно, наконец,

$$\langle \Phi(L, s), e(, z) \rangle = \sum_{x \in V} \Phi(L, s)(x) e(x, z), \quad (3.4)$$

где $e(x, z) = \exp(\lambda \pi i N(x)z)$ и z из верхней полуплоскости Зигеля H_1 , т.е. z - комплексное число с $\text{Im } z > 0$.

Вычислим интеграл (3.3) для функции $f'_\alpha \in F'_{\lambda n}$ с носителем $U\alpha^{-1}O$. Согласно (2.3), $f'_\alpha(g) = \sigma_{\lambda n}(u) f'_\alpha(\alpha^{-1}g)$ для $g = u\alpha^{-1}\gamma$ с $u \in U'$ и $\gamma \in O$ и, согласно (3.2), для этих же g имеем

$$(\pi(g)^{-1}\Phi(L))(x) = \sigma_{\lambda n}(u) P_1(\alpha_\infty^{-1}\gamma(x)) \Psi(\alpha L)(\gamma(x)).$$

Теперь, применяя (3.4), получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle \pi(g)^{-1}\Phi(L), e(, z) \rangle &= \sigma_{\lambda n}(u) \sum_{x \in V} P_1(\alpha_\infty^{-1}\gamma(x)) \Psi(\alpha L)(\gamma(x)) \cdot e(x, z) = \\ &= \sigma_{\lambda n}(u) \sum_{x \in \alpha L} P_1(\alpha_\infty^{-1}(x)) \exp(\lambda \pi i N(x)z). \end{aligned}$$

Последняя сумма является векторным тета-рядом решетки αL , который обозначим через $\Theta_{\alpha L}(z)$. Отсюда и из (3.3) выводим

$$E(f'_\alpha, \Phi(L))(z) = (f'_\alpha(\alpha^{-1}); \Theta_{\alpha L}(z)) \text{vol}_{dx}(U')^{-1} \int_{U\alpha^{-1}O/O} dq,$$

и интеграл равен

$$\int_{\alpha U\alpha^{-1}/(\alpha U\alpha^{-1}nO)} dq = \frac{1}{e(\alpha L)} \int_{\alpha U\alpha^{-1}} dx,$$

где $e(\alpha L)$ - число элементов из пересечения $\alpha U\alpha^{-1} \cap O$, равное числу единиц решетки αL . Используя свойства меры Тамагавы dx , получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть f'_α - некоторая функция из

пространства F'_{2n} (п.2.3) с некоторым целым n и с носителем $\bigcup' \alpha^{-1} 0$, L - фиксированная решетка из п.1.5 и

$$\theta_{\alpha L}(\alpha, f'_\alpha) = \sum_{x \in \alpha L} P(f'_\alpha; x) \exp(2\pi i N(x) \alpha) \quad (3.5)$$

- тета-ряд решетке αL из рода $[L]$ со сферическими коэффициентами $P(f'_\alpha; x) = (f'_\alpha(\alpha^{-1}x); P_1(\alpha_\infty^{-1}(x)))$. Тогда имеет место следующая формула

$$E(f'_\alpha, \Phi(L))(\alpha) = \frac{1}{e(\alpha L)} \theta_{\alpha L}(\alpha, f'_\alpha). \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В интеграл (3.3) можно подставить любую другую функцию $\Phi(L')$. Тогда в правой части формулы (3.6) появится некоторая линейная комбинация тета-рядов решеток из рода $[L']$ (см. также замечание после Основной теоремы).

3.2. Тета-ряды $\theta_{\alpha L}(\alpha, f'_\alpha)$ принадлежат пространству $M_{m/2} = M_{m/2}(\Gamma_0^1(q'), \chi)$ модулярных форм рода I, полуцелого веса $m/2 = (2n+3)/2$ и характера

$$\chi(d) = \chi_L(d) = \left(\frac{2\Delta'}{|d|} \right) \quad (3.7)$$

относительно группы $\Gamma_0^1(q')$ матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $SL_2(\mathbb{Z})$ с $c \equiv 0 \pmod{q'}$ [8, с.456], [10, с.205], [1, с.58, 86]. Если $p \nmid \Delta'$, то для оператора Гекке $\hat{T}(p^2)$ ([1], с.237) имеет место разложение

$$\begin{aligned} \hat{T}(p^2) &= (\hat{T}(\widehat{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}}) \hat{T}) = \sum_{b \pmod{p^2}} (\hat{T}(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}; p)) + \\ &+ \sum_{b \pmod{p}} (\hat{T}(\begin{pmatrix} p & b \\ 0 & p \end{pmatrix}; \varepsilon_p^{-1} \begin{pmatrix} -b \\ -p \end{pmatrix} p^{1/2})) + (\hat{T}(\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 1)), \\ &b \neq 0 \pmod{p} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где \wedge означает, что соответствующие элементы рассматриваются в накрывающей группе \mathcal{G} группы $GL_2(\mathbb{R})$ [1, с.93], $\Gamma = \Gamma_0^1(q')$ и $\varepsilon_p = 1$ или $+\sqrt{-1}$ для $p \equiv 1$ или $3 \pmod{4}$.

Для любой функции $f(x)$ комплексного переменного x и элемента $\hat{M} = (\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; t)$ из \mathcal{G} с определителем $ad = p^2$ положим

$$(\mathbb{F}|_{m/2, \chi} \hat{M})(z) = p^{m-2} \chi(a) t^{-m} F\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

В этих обозначениях при четном n

$$\langle \pi(q)^{-1} \Phi(L, s), e(\cdot, z) \rangle|_{m/2, \chi} \hat{M} = \langle \pi(q)^{-1} \Phi(L, s), e(\cdot, z) \rangle|_{m/2, \chi} \hat{M}$$

и (3.9)

$$e(x, z)|_{m/2, \chi} \hat{M} = p^{m-2} \chi(a) t^{-m} e\left(\frac{a}{p}x, \frac{b}{a}\right) e\left(\frac{a}{p}x, z\right),$$

поэтому левая часть (3.9) равна

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in V} (\pi(q)^{-1} \Phi(L, 0))(x) p^{m-2} \chi(a) t^{-m} e\left(\frac{a}{p}x, \frac{b}{a}\right) e\left(\frac{a}{p}x, z\right) = \\ & = p^n \sum_{x \in V} (\pi(q)^{-1} [p \chi(a) t^{-3} \Phi\left(\frac{a}{p}L, \frac{b}{a}\right)])(x) \cdot e(x, z). \end{aligned}$$

Откуда, вводя обозначение

$$\pi_{3/2, \chi}(\hat{M}^{-1}) \Phi(L, s) = E(x) p \chi(a) t^{-3} \varphi\left(\frac{a}{p}L, s\left(\frac{d}{p}\right)^2 + \frac{b}{a}\right), \quad (3.10)$$

получаем равенство

$$\langle \pi(q)^{-1} \Phi(L), e(\cdot, z) \rangle|_{m/2, \chi} \hat{M} = p^n \langle \pi(q)^{-1} (\pi_{3/2, \chi}(\hat{M}^{-1}) \Phi(L)), e(\cdot, z) \rangle,$$

значит, ввиду (3.3),

$$E(f'_\alpha, \Phi(L))|_{m/2, \chi} \hat{M} = p^n E(f'_\alpha, \pi_{3/2, \chi}(\hat{M}^{-1}) \Phi(L)). \quad (3.11)$$

3.3. Для произвольной решетки $L' \subset V$ рассмотрим ото-
бражение

$$i: \Phi(L', s) \mapsto \Phi_{A_0}(L', s)(x) = \prod_{p < \infty} \Phi_p(L'_p, s_p)(x_p),$$

где $x = (x_p) \in V_{A_0}$ - аделизации V без ∞ -компоненты,

$$s = (s_p) \in A_0, \quad \Phi_p(L'_p, s_p) = e(x_p, s_p) \Phi_p(L'_p)(x_p) \quad \text{и}$$

$\varphi_p(L_p)$ - характеристическая функция решетки $L'_p = L' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.
 Так как $\varphi_p(L'_p, s)(x) = \varphi(L'_p, s)(x)$ для $x \in V$, $s \in \mathbb{Q}$,
 то i - вложение пространства, порожденного функциями вида
 $\varphi(L'_p, s)$. Отображение i обладает свойством

$$i(\pi_{3/2, \gamma}(\hat{M}^{-1})\varphi(L)) = \pi_{3/2, \gamma}(\hat{M}^{-1})\varphi_p(L_p) \cdot \prod_{p \neq p} \varphi_{p'}(L_{p'}), \quad (3.12)$$

здесь мы воспользовались тем, что по (3.10) $\pi_{3/2, \gamma}$ не действует на множитель $P_1(x)$ функции $\hat{\Phi}(L)$.

3.4. Сумма всех $\pi_{3/2, \gamma}(\hat{M}^{-1})\varphi_p(L_p)$, когда \hat{M} пробегает всех представителей правых классов из (3.8), равна

$$\begin{aligned} (\pi_{3/2, \gamma}(\hat{T}^*(p^2))\varphi_p(L_p))(x) &= \bar{p}^2 \left(\sum_{b \pmod{p^2}} e(x, b) \right) \varphi_p\left(\frac{1}{p}L_p\right)(x) + \\ &+ p^{-1/2} \chi(p) \varepsilon_p^3 \left(\sum_{b \pmod{p}} \left(\frac{-b}{p}\right) e\left(x, \frac{b}{p}\right) \right) \varphi_p(L_p)(x) + p \chi(p^2) \varphi_p(pL_p)(x) \quad (3.13) \\ &= \varphi'_p\left(\frac{1}{p}L_p\right)(x) + \chi(p) \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{N(x)}{p}\right) \varphi_p(L_p)(x) + p \chi(p^2) \varphi_p(pL_p)(x), \end{aligned}$$

где $\varphi'_p\left(\frac{1}{p}L_p\right)(x)$ - характеристическая функция множества $x \in \frac{1}{p}L_p$ с $N(x) \in \mathbb{Z}$. Равенства (3.9)-(3.12) справедливы для всех простых чисел p , если принять во внимание, что $\chi(p) = 0$ для $p \nmid \Delta'$. Поэтому выполняется и формула (3.13), принимающая вид

$$(\pi_{3/2, \gamma}(\hat{T}^*(p^2))\varphi_p(L_p))(x) = \varphi'_p\left(\frac{1}{p}L_p\right)(x) \quad \text{для } p \nmid \Delta'. \quad (3.14)$$

В частности, если $p \mid d$, то в силу (1.4) $\varphi'_p\left(\frac{1}{p}L_p\right)(x) = \varphi_p(L_p)(x)$, откуда и из (3.14) заключаем, что

$$(\pi_{3/2, \gamma}(\hat{T}^*(p^2))\varphi_p(L_p))(x) = \varphi_p(L_p)(x) \quad \text{для } p \mid d. \quad (3.15)$$

3.5. Для $p \nmid \Delta'$ воспользуемся изоморфизмами (1.4), (2.6) и отождествим V_p с множеством матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ с a, b, c из \mathbb{Q}_p . Пусть $T'(p^2)$ - оператор Гекке (см. п.2.5) для элемента $q = (1, \dots, q_p, \dots)$ из $O_{\mathbb{A}}$ с q_p , отвечающим $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$. Для таких q оператор $\pi(q)$ (3.2) дейст-

вует только на $\Phi(L)$ - часть функции $\Phi(L)$, чем сейчас и воспользуемся. Согласно (I.7), имеем

$$\chi(\pi(T'_p(p^2))\Phi(L)) = \pi(T'_p(p^2))\Phi_p(L_p) \cdot \prod_{p' \neq p} \Phi_{p'}(L_{p'}), \quad (3.16)$$

где

$$T'_p(p^2) = (U'_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} U'_p) = \sum_{t \bmod p} \left(\begin{pmatrix} p & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U'_p \right) + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} U'_p \right),$$

следовательно, по (3.2)

$$\begin{aligned} \pi(T'_p(p^2))\Phi_p(L_p)(x) &= \sum_{t \bmod p} \Phi_p(L_p) \left(\begin{pmatrix} 1/p & -t/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} p & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \\ &+ \Phi_p(L_p) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{и } L_p = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \quad \text{для } p \nmid \Delta' \right\}.$$

ЛЕММА 3.1. Для любого простого $p \nmid \Delta'$ выполняется тождество

$$\pi_{3/2, \chi}(\hat{T}^*(p^2))\Phi_p(L_p)(x) = \pi(T'_p(p^2))\Phi_p(L_p)(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся, что значения $\Phi_0(x)$ - правой части равенства (3.17) и $\Phi_1(x)$ - правой части равенства (3.13) совпадают для всех $x \in V_p$. Достаточно рассмотреть только множество элементов

$$x = \frac{1}{p}M = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ с } M \in L_p \text{ и } N(M) = \det M = -a^2 - bc \equiv 0 \pmod{p^2},$$

содержащее носитель $\Phi_1(x)$, который, в свою очередь, содержит носитель $\Phi_0(x)$. Для этого выясним, когда элементы

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1/p & -t/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} p & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)/p & -b(t)/p^2 \\ c & -a(t)/p \end{pmatrix},$$

где $a(t) = a - ct$ и $b(t) = ct^2 - 2at - b$, или

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/p & b \\ c/p^2 & -a/p \end{pmatrix}$$

принадлежат решетке \mathbb{Z}_p .

Пусть $p \nmid c$. Тогда $\Phi_1(x) = 1$ и существует единственное $t \pmod p$ такое, что $a(t) \equiv 0 \pmod p$, т.е. $ct = a + pt_1$ и $t_1 \in \mathbb{Z}_p$. Имеем $cb(t) = (ct)^2 - 2a(ct) - cb = -a^2 - bc \equiv 0 \pmod{p^2}$, поэтому $\Phi_0(x) = 1$.

Пусть $c = pc'$ и $p \nmid c'$, откуда вытекает $a = pa'$, $b = pb'$ и $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$, поэтому $\Phi_1(x) = 1 + \chi(p) \left(\frac{-1}{p} \right) \left(\frac{N(x)}{p} \right)$.

Дискриминант $D = 4a'^2 + 4b'c' = -4N(x)$, значит, справедливо сравнение $\frac{1}{p} b(t) = c't^2 - 2a't - b' \equiv 0 \pmod p$, которое имеет число решений 2, 0 или 1 при $\left(\frac{-N(x)}{p} \right) = 1, -1$ или 0 соответственно, и число решений равно $\Phi_0(x)$. С другой стороны, $\Delta' = 2 \cdot (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ ([6], с.126) и по (3.7) $\chi(p) = 1$, откуда $\Phi_1(x) = 1 + \left(\frac{-N(x)}{p} \right) = \Phi_0(x)$.

Наконец, пусть $c = p^2 \cdot c''$. Тогда $a = pa'$, $b = pb'$ и $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ pc'' & -a' \end{pmatrix}$. Если $p \mid a'$, $p \mid b'$, то $\Phi_1(x) = p+1 = \Phi_0(x)$; если $p \mid a'$, $p \nmid b'$, то $\Phi_1(x) = 1 = \Phi_0(x)$; и если $p \nmid a'$, то

$$\Phi_1(x) = 1 + \chi(p) \left(\frac{-1}{p} \right) \left(\frac{-a'^2}{p} \right) = 1 + \chi(p) = 2$$

и сравнение $\frac{1}{p} b(t) = pc''t^2 - 2a't - b' \equiv -2a't - b' \equiv 0 \pmod p$ имеет единственное решение $t \pmod p$. Следовательно,

$$\Phi_0(x) = 2 = \Phi_1(x), \text{ и лемма доказана. } \square$$

3.6. Для любого элемента $g_1 = (1, \dots, g_p, \dots)$ из O_A из инвариантности меры dq в интеграле (3.3) следует

$$E(f'(g_1^{-1} \cdot g), \Phi(L)) = E(f'(g), \pi(g_1^{-1})\Phi(L)).$$

Согласно [3, с.79, 80], для локального оператора Гекке $T'_p(g_p) = (U'_p g_p U'_p)$ существует разложение вида

$$T'_p(g_p) = \sum_k (g_k U'_p) = \sum_k (g_k^{-1} U'_p)$$

с одними и теми же представителями g_k в обеих суммах. Отсюда и из последнего равенства для простых чисел $p \nmid \Delta'$ вытекает формула сплетения для ортогональной группы O_A

$$E(T'_p f', \Phi(L)) = E(f', \pi(T'_p) \Phi(L)), \quad (3.18)$$

где f' - любая функция из пространства F'_{2n} (п.2.3) и T'_p - оператор локального кольца Гекке $L(O_p) \subset L(O_A)$, порожденного операторами $T'_p(q_p)$.

Далее, из (3.11) для операторов $\hat{T}(p^2)$ для любых p следует формула сплетения

$$E(f', \Phi(L)) \Big|_{m/2, \chi} \hat{T}(p^2) = p^n E(f', \pi_{3/2, \chi}(\hat{T}^*(p^2)) \Phi(L)), \quad (3.19)$$

так как и для $p \mid \Delta'$ можно использовать разложение (3.8), учитывая при этом в (3.10), что $\chi(p) = 0$. Теперь из формул (3.18), (3.19) и из леммы 3.1 следует

ТЕОРЕМА 3.1. При четном n и $p \nmid \Delta'$ имеет место следующая формула двойственности между операторами Гекке групп O_A и Sl_2 :

$$E(f', \Phi(L)) \Big|_{m/2, \chi} \hat{T}(p^2) = p^n E(T'(p^2) f', \Phi(L)), \quad (3.20)$$

где $T'(p^2)$ - оператор Гекке кольца $L(O_A^1)$, отвечающий локальному оператору $T'_p(p^2)$. Далее, пусть $\theta(x, f')$ обозначает линейную комбинацию тета-рядов (3.5) $E(f', \Phi(L))$. Тогда для $p \mid d$

$$\theta(x, f') \Big|_{m/2, \chi} \hat{T}(p^2) = p^n \theta(x, f'), \quad (3.21)$$

и если $f' \in F'_{2n}$ является собственной функцией оператора Гекке $T'(p^2)$ с $p \nmid \Delta'$: $T'(p^2) f' = \lambda'(p^2) f'$, то

$$\theta(x, f') \Big|_{m/2, \chi} \hat{T}(p^2) = p^n \lambda'(p^2) \theta(x, f'). \quad (3.22)$$

В общем случае, пусть \bar{f}' - столбец функций, образующих базис пространства F'_{2n} , и $\Delta'(p^2)$ - матрица оператора $T'(p^2)$ в этом базисе. Тогда для простых $p \nmid 2n$ выполняется формула

$$\theta(x, \bar{f}') \Big|_{m/2, \chi} \hat{T}(p^2) = p^n \Delta'(p^2) \cdot \theta(x, \bar{f}'), \quad (3.23)$$

где для $p \mid d$ матрица $\Delta'(p^2)$ единичная.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В ([10], с.205) формула (3.22) доказана для решеток $L = V \cap \Omega_{max}$.

§ 4. Тета-ряды кватернарных квадратичных форм

4.1. Пусть теперь $\Psi(\Omega, I)(x, t)$ - характеристическая функция множества $\Omega \times I$, где Ω - решетка алгебры \mathcal{O} из п.1.5, $I = \{1\}$, и пусть

$$\Phi(\Omega, I, s)(x, t) = e(x, s) \Psi(\Omega, I)(x, t), \quad (4.1)$$

$$\Phi(\Omega, I, s)(x, t) = \xi(|t|_+^{1/2} x) \Psi(\Omega, I, s)(x, t),$$

где $\xi(x) = \xi_{\lambda_n}(x) \cdot w$ для некоторого вектора $w \in W$ и $\xi(0) = 0$ (по однородности), $|t|_+ = t$ или 0 для $t > 0$ или $t \leq 0$ соответственно. Для функций $f \in F_{\lambda_n}$ (п.2.1) и $\Phi(\Omega, I) = \Phi(\Omega, I, 0)$ полагаем (ср. с (3.3))

$$E(f, \Phi(\Omega, I))(z) = \text{vol}_{dx} (U)^{-1} \int_{\mathcal{O}_A^1 / \mathcal{O}_A^x} (f(q); \langle \pi^{-1}(q) \Phi(\Omega, I), e(, |t|_+ z) \rangle) dq, \quad (4.2)$$

где мера dq индуцирована мерой Тамагавы dx на группе \mathcal{O}_A^1 ; для $q = (q_\infty, \dots) \in \mathcal{O}_A^1$

$$\pi(q) \Phi(\Omega, I, s) = \xi(|N(q_\infty) t|_+^{1/2} q_\infty^{-1} x) \Psi(q, \Omega, N_f(q) I, s), \quad (4.3)$$

при этом $N_f(q) = \prod_{p < \infty} |N(q_p)|_p$ - норма конечной части q , наконец,

$$\begin{aligned} & \langle \pi^{-1}(q) \Phi(\Omega, I), e(, |t|_+ z) \rangle = \\ & = \sum_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ t \in \mathcal{O}^x}} (\pi^{-1}(q) \Phi(\Omega, I))(x, t) \exp(\lambda \pi i |t|_+ N(x) z). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Возьмем функцию $f_u \in F_{\lambda_n}$ с носителем $U \alpha^{-1} \mathcal{O}^x$. По (2.1) $f_\alpha(q) = \sigma_{\lambda_n}(u) f_u(\alpha^{-1} q)$ для $q = u \alpha^{-1} \gamma$ с $u \in U$, $\gamma \in \mathcal{O}^x$, а по (4.3)

$$\begin{aligned} & \pi^{-1}(q) \Phi(\Omega, I)(x, t) = \\ & = \sigma_{\lambda_n}(u) \xi(|t|_+^{1/2} \alpha_\infty^{-1} \gamma x) \Psi(\alpha \Omega, I)(\gamma x, N_f(\alpha^{-1} \gamma) t), \end{aligned}$$

откуда следует, что правая часть (4.4) равна

$$\begin{aligned} & \sigma_{2n}(\omega) \sum_{\substack{x \in \alpha \\ t \in \mathbb{Q}^x}} \xi(|t|_+^{1/2} \alpha_\infty^{-1} \gamma x) \Psi(\alpha \Omega, I)(\gamma x, N_f(\alpha^{-1} \gamma) t) e(x, |t|_+ x) = \\ & = \sigma_{2n}(\omega) \sum_{\substack{x \in \alpha \\ t \in \mathbb{Q}^x}} \xi(|t|_+^{1/2} \alpha_\infty^{-1} x) \Psi(\alpha \Omega, I)(x, t) \exp(2\pi i |t|_+ \frac{N(x)}{N(\alpha_\infty)} x) \quad (4.5) \\ & = \sigma_{2n}(\omega) \sum_{x \in \alpha \Omega} \xi(\alpha_\infty^{-1} x) \exp(2\pi i \frac{N(x)}{N(\alpha_\infty)} x). \end{aligned}$$

Последняя сумма является векторным тета-рядом, который обозначим через $\Theta_{\alpha \Omega}(z)$ и который, очевидно, не зависит от ω, γ . Поэтому из (4.5) и (4.2) получаем

$$E(f_\alpha, \Phi(\Omega, I)) = \frac{1}{e(\alpha \Omega)} (f_\alpha(\alpha^{-1}); \Theta_{\alpha \Omega}(z)),$$

где $e(\alpha \Omega)$ - число единиц решетки $\alpha \Omega$, откуда следует
ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть

$$\theta_{\alpha \Omega}(z; f_\alpha) = \sum_{x \in \alpha \Omega} P(f_\alpha; x) \exp(2\pi i \frac{N(x)}{N(\alpha_\infty)} z) \quad (4.6)$$

- тета-ряд со сферическими коэффициентами $P(f_\alpha; x) = (f_\alpha(\alpha^{-1}); \xi(\alpha_\infty^{-1} x))$. Тогда предыдущее равенство переписывается в виде

$$E(f_\alpha, \Phi(\Omega, I))(z) = \frac{1}{e(\alpha \Omega)} \theta_{\alpha \Omega}(z; f_\alpha). \quad (4.7)$$

4.2. Полученные тета-ряды (4.6) принадлежат пространству $\mathcal{M}_m = \mathcal{M}_m(\Gamma_0^1(q), \chi)$ модулярных форм рода I, целого веса $m = 2n + 2$ и характера

$$\chi(d) = \chi_\Omega(d) = \left(\frac{\Delta}{|d|} \right) \quad (4.8)$$

относительно группы $\Gamma = \Gamma_0^1(q)$ ([2], с.247). Для простых $p \nmid \Delta$ выполняется разложение

$$T(p) = (\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma) = \sum_{\mathfrak{b} \bmod p} (\Gamma \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{b} \\ 0 & p \end{pmatrix}) + (\Gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \quad (4.9)$$

оператора Гекке $\Gamma(\rho)$. Для матрицы $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ с $ad = \rho$ и произвольной функции $F(z)$ комплексного переменного z полагаем

$$F \Big|_{m, \chi} M = \rho^{m-1} \chi(a) d^{-m} F\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Используя равенство (4.4), получаем для четного n

$$\begin{aligned} & \langle \pi^{-1}(g) \Phi(\Omega, I), e(\cdot, |t|_+ z) \rangle \Big|_{m, \chi} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ t \in \mathbb{Q}^x}} (\pi^{-1}(g) \Phi(\Omega, I, 0))(x, t) \rho^{-1} \exp(2\pi i |t|_+ N(x) \frac{z+b}{\rho}) = \\ & = \rho^n \sum_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ t \in \mathbb{Q}^x}} (\pi^{-1}(g) \left[\rho^{-1} \Phi(\Omega, \frac{1}{\rho} I, |t|_+ b) \right])(x, t) e(x, |t|_+ z). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \langle \pi^{-1}(g) \Phi(\Omega, I), e(\cdot, |t|_+ z) \rangle \Big|_{m, \chi} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ t \in \mathbb{Q}^x}} (\pi^{-1}(g) \Phi(\Omega, I, 0))(x, t) \rho^{m-1} \chi(\rho) \exp(2\pi i \left| \frac{t}{\rho} \right|_+ N(\rho x) z) = \\ & = \sum_{\substack{x' \in \mathcal{O} \\ t' \in \mathbb{Q}^x}} (\pi^{-1}(g) \Phi(\Omega, I, 0))\left(\frac{1}{\rho} x', \rho t'\right) \rho^{m-1} \chi(\rho) \cdot e(x, |t|_+ z) = \\ & = \rho^n \sum_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ t \in \mathbb{Q}^x}} (\pi^{-1}(g) \left[\rho \chi(\rho) \Phi(\rho \Omega, \frac{1}{\rho} I, 0) \right])(x, t) \cdot e(x, |t|_+ z), \end{aligned}$$

следовательно, в обозначениях (4.2) для $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ получаем соотношение

$$E(f, \Phi(\Omega, I)) \Big|_{m, \chi} M = \rho^n E(f, \pi_{\chi, \chi}(M^{-1}) \Phi(\Omega, I)), \quad (4.10)$$

где по определению

$$\pi_{\lambda, \chi} \left(\begin{pmatrix} 1 & \vartheta \\ 0 & \rho \end{pmatrix}^{-1} \right) \Phi(\Omega, I, 0) = \xi(|t|_+^{1/2} x) \left[\rho^{-1} \Psi(\Omega, \frac{1}{\rho} I, |t|_+ \vartheta) \right], \quad (4.11)$$

$$\pi_{\lambda, \chi} \left(\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right) \Phi(\Omega, I, 0) = \xi(|t|_+^{1/2} x) \left[\rho \chi(\rho) \Psi(\rho \Omega, \frac{1}{\rho} I, 0) \right].$$

4.3. Для рассмотренных M представление $\pi_{\lambda, \chi}$ и для элементов $g \in \mathcal{O}_A^*$ с $g_\infty = \rho^{1/2}$, $g_p = \begin{pmatrix} \rho & \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ и $g_{p'} = 1$ для $p' \neq \infty, \rho$ представление π (4.3) оставляют неизменным ξ -множитель функции $\Phi(\Omega, I, 0)$. Поэтому можем ограничиться рассмотрением только части $\Psi(\Omega, I, 0)$ и для представлений оставим прежние обозначения.

Аналогично п.3.3, определим вложение i , отображающее функцию $\Psi(\Omega', I', s)$, где Ω' - произвольная решетка из \mathcal{O} и I' - непустое мультипликативное подмножество из \mathbb{Q}^\times , в функцию

$$\Psi_{A_0}(\Omega', I', s)(x, t) = \prod_{p < \infty} \Psi_p(\Omega'_p, I'_p, s_p)(x_p, t_p),$$

при этом $x = (x_p) \in A_{A_0}$, $t = (t_p)$ из группы идеалов A_0^\times , $s = (s_p) \in A_0$,

$$\Psi_p(\Omega'_p, I'_p, s_p)(x_p, t_p) = e(x_p, s_p) \Psi_p(\Omega'_p, I'_p)(x_p, t_p),$$

где $\Psi_p(\Omega'_p, I'_p)$ - характеристическая функция множества $\Omega'_p \times I'_p$ и $I'_p = I' \cdot \mathbb{Z}_p^\times$. Для матриц M из п.4.2 справедливо тождество

$$i(\pi_{\lambda, \chi}(M^{-1})\Psi(\Omega, I)) = \pi_{\lambda, \chi}(M^{-1}) \prod_{p \neq \rho} \Psi_p(\Omega_p, I_p) \prod_{p \neq \rho} \Psi_p(\Omega_p, I_p'). \quad (4.12)$$

4.4. Если M пробегает представителей правых классов из разложения (4.9), то соответствующая сумма $\pi_{\lambda, \chi}(M^{-1}) \Psi_p(\Omega_p, I_p)$ в силу (4.12) равна

$$\begin{aligned} & (\pi_{\lambda, \chi}(\tau^*(\rho^2)) \Psi_p(\Omega_p, I_p))(x, t) = \\ & = \rho^{-1} \left(\sum_{\vartheta \bmod \rho} e(x, |t|_+ \vartheta) \right) \Psi_p(\Omega_p, \frac{1}{\rho} I_p)(x, t) = \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$+ p\chi(p) \varphi_p(p\Omega_p, \frac{1}{p} I_p)(x, t) =$$

$$= \varphi_p'(\Omega_p, \frac{1}{p} I_p)(x, t) + p\chi(p) \varphi_p(p\Omega_p, \frac{1}{p} I_p)(x, t),$$

где $\varphi_p'(\Omega_p, \frac{1}{p} I_p)$ -- характеристическая функция множества $\Omega_p \times \frac{1}{p} I_p$ с условием $N(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Формула (4.13) верна и для $p \mid d$. Для таких p , согласно (1.4),

$$(\pi_{\lambda, \chi}(\pi^*(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p))(x, t) = \varphi_p(p, \frac{1}{p} I_p)(x, t), \quad (4.14)$$

где $P = w_p \cdot \Omega_p$ -- двусторонний идеал порядка Ω_p , порожденный элементом $w_p \in \Omega_p$ с нормой $N(w_p) = p$.

4.5. Не усложняя обозначений, считаем $\Omega_p = M_{\lambda}(\mathbb{Z}_p)$ и $U_p = GL_{\lambda}(\mathbb{Z}_p)$ для $p \nmid \lambda \Delta$, и пусть $T_0(p)$ -- оператор Гекке элемента g из \mathcal{O}_A^1 с $g\omega = p^{1/\lambda}$, $g_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ и $g_{p'} = 1$ для всех $p' \neq \infty, p$. По (4.3),

$$i(\pi(T_0(p))\varphi(\Omega, I)) = \pi(T_p(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p) \prod_{p' \neq p} \varphi_{p'}(\Omega_{p'}, I_{p'}), \quad (4.15)$$

где $T_p(p)$ -- локальный оператор Гекке, отвечающий $T_0(p)$, с аналогичным оператору $T_{p'}(p^2)$ из (3.16) разложением:

$$T_p(p) = (U_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} U_p) = \sum_{s \pmod{p}} \left(\begin{pmatrix} p & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_p \right) + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} U_p \right).$$

Таким образом, снова используя определение (4.3), получаем

$$\begin{aligned} & \pi(T_p(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p)(x, t) = \\ & = \sum_{s \pmod{p}} \varphi_p \left(\begin{pmatrix} p & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega_p, \frac{1}{p} I_p \right)(x, t) + \varphi_p \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Omega_p, \frac{1}{p} I_p \right)(x, t) = (4.16) \end{aligned}$$

$$= \sum_{s \pmod{p}} \varphi_p(\Omega_p, \frac{1}{p} I_p)(x(s), t) + \varphi_p(\Omega_p, \frac{1}{p} I_p)(x', t),$$

где для $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из Ω_p использованы сокращения:

$$x(s) = \begin{pmatrix} 1/p & -s/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{a-sc}{p} & \frac{b-sd}{p} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(s)/p & b(s)/p \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a & b \\ c/p & d/p \end{pmatrix}.$$

Из включений $x(s), x' \in \Omega_p$ вытекает $N(x) = ad - bc \equiv 0 \pmod{p}$. Обозначим последние суммы из (4.16) и (4.13) через $\Phi_0(x, t)$ и $\Phi_1(x, t)$.

ЛЕММА 4.1. Для простых $p \nmid 2\Delta$ имеет место тождество

$$(\pi_{\lambda, \gamma}(\mathcal{T}^*(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p))(x, t) = (\pi(\mathcal{T}_p(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p))(x, t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить тождество для $t = 1/p$ и $x \in \Omega_p$ с $ad - bc \equiv 0 \pmod{p}$.

Пусть $p \nmid c$. Тогда $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \equiv k \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \pmod{p}$ с некоторым k и поэтому единственное $s \pmod{p}$ - решение сравнения $a(s) \equiv 0 \pmod{p}$ является также решением сравнения $b(s) \equiv 0 \pmod{p}$, откуда следует $\Phi_1(x, t) = 1 = \Phi_0(x, t)$.

Если же $p \mid c$, то $p \mid a$ или $p \mid d$. При $p \mid a$ и $p \nmid d$ имеем $\Phi_1(x, t) = 1 = \Phi_0(x, t)$; при $p \nmid a$ и $p \mid d$ выполняются аналогичные равенства. Пусть теперь $p \mid a$ и $p \mid d$. Тогда, если $p \nmid b$, то снова имеют место такие же равенства; если же $p \mid b$, то $\Phi_0(x, t) = p + 1$, а $\Phi_1(x, t) = 1 + p \chi(p)$. Поскольку дискриминант $\Delta = d^2 H^2$, где H - произведение степеней простых $q \mid h$ [5, с. 95], то в силу (4.8) $\chi(p) = 1$, значит, $\Phi_1(x, t) = \Phi_0(x, t)$. Лемма доказана. \square

Формула (4.14) позволяет распространить результат леммы 4.1 на простые $p \mid d$. Из (1.4) и (2.4) вытекает $\mathcal{T}_p(p) = (\mathcal{U}_p \omega_p \mathcal{U}_p) = (\omega_p \mathcal{U}_p)$, откуда и из (4.3)

$$\pi(\mathcal{T}_p(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p) = \varphi_p\left(p, \frac{1}{p} I_p\right).$$

Сопоставляя это равенство и (4.14), получаем следующий результат.

ЛЕММА 4.2. Для простых чисел $p \mid d$ выполняется формула

$$\pi_{\lambda, \gamma}(\mathcal{T}^*(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p) = \pi(\mathcal{T}_p(p)) \varphi_p(\Omega_p, I_p).$$

4.6. Снова на основании [3], с. 79, 80] существуют представители g_k такие, что

$$T_0(p) = \sum_k (p g_k^{-1} U) = \sum_k (g_k U) \quad \text{для } p \nmid n,$$

где $g_k = (p^{1/2}, \dots, g_{pk}, \dots) \in \mathcal{O}_A^1$. Из (4.2) аналогично п.3.6 выводим для элементов $g_1 \in \mathcal{O}_A^1$ вида g_k соотношение

$$E(f(g_1 g), \Phi(\Omega, I)) = E(f(g), \pi(g_1) \Phi(\Omega, I)),$$

откуда и из определения (2.2) получаем

$$E(\tilde{T}_0(p) f, \Phi(\Omega, I)) = E(f, \pi(T_0(p)) \Phi(\Omega, I))$$

для оператора Гекке $T_0(p) = \sum_k (g_k^{-1} U)$. Но согласно (2.1), $\tilde{T}_0(p) f = T_0(p) f$, значит, для простых $p \nmid n$ выполняется формула сплетения

$$E(T_0(p) f, \Phi(\Omega, I)) = E(f, \pi(T_0(p)) \Phi(\Omega, I)). \quad (4.17)$$

С другой стороны, из (4.11) для всех простых p и четных n следует формула

$$E(f, \Phi(\Omega, I)) \Big|_{m, \gamma} T(p) = p^n E(f, \pi_{\alpha, \gamma}(T^X(p)) \Phi(\Omega, I)). \quad (4.18)$$

Объединяя формулы (4.17), (4.18) и леммы 4.1 и 4.2, убеждаемся, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. Для четных n и простых чисел $p \nmid 2\Delta$ или $p \mid \Delta$ выполняется формула двойственности между операторами Гекке групп \mathcal{O}_A^X и $Sl_{2, \gamma}$:

$$E(f, \Phi(\Omega, I)) \Big|_{m, \gamma} T(p) = p^n E(T_0(p) f, \Phi(\Omega, I)). \quad (4.19)$$

Пусть $\theta(x, f) = E(f, \Phi(\Omega, I))$ - линейная комбинация тета-рядов вида (4.6), отвечающая собственной функции $f \in \mathcal{F}_{2n}$ оператора Гекке $T_0(p): T_0(p) f = \lambda(p) f$. Тогда

$$\theta(x, f) \Big|_{m, \gamma} T(p) = p^n \lambda(p) \theta(x, f). \quad (4.20)$$

В общем случае, если \bar{f} - базисный столбец функций из пространства \mathbb{F}_{2n} и $\Lambda(p)$ - матрица оператора $T_0(p)$ в этом базисе, то

$$\theta(x, \bar{f}) \Big|_{m, \gamma} T(p) = p^n \Lambda(p) \cdot \theta(x, \bar{f}). \quad (4.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Впервые формула (4.21) для $n = 0$ была доказана Эйхлера ([4], с.148) арифметическим способом. В [7] использована идея, аналогичная нашей.

Из теорем 3.1 и 4.1 и из формулы коммутирования (2.9) не посредственно вытекает Основная теорема.

Литература

1. Андрианов А.Н., Журавлев В.Г. Модулярные формы и операторы Гекке. М., 1990, 448 с.
2. Андрианов А.Н., Малолеткин Г.Н. Поведение тета-рядов рода n при модулярных подстановках. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1975, т.39, № 2, с.243-258.
3. Шимур Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М., 1973, 326 с.
4. Eichler M. Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin etc., 1974, 222 p.
5. Eichler M. The basis problem for modular forms and the trace of the Hecke operators. - Lect.Notes Math., 1973, vol.320, p.75-152.
6. Пономарев Р. Ternary quadratic forms and Shimura's correspondence. - Nagoya Math.J., 1981, vol.81, p.123-151.
7. Rallis S. The Eichler commutation relation and the continuous spectrum of the Weil representation. - Lect.Notes Math., 1979, vol.728, p.211-244.
8. Shimura G. On modular forms of half integral weight. - Ann.Math., 1973, vol.97, N 3, p.440-481.
9. Yoshida H. Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms. - Invent.math., 1980, vol.60, N 3, p.193-248.
10. Yoshida H. On Siegel modular forms obtained from theta series. - J. reine und angew. Math., 1984, Bd 352, S.184-219.