Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина, В. Ю. Куренков, Построение дисперсионных кривых для сред периодической структуры,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 46–49

https://www.mathnet.ru/vmumm2052

УДК 539.3

Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина, В. Ю. Куренков

ПОСТРОЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ СРЕД ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Для неоднородной среды, состоящей из периодически повторяющихся упругих слоев, получено дисперсионное уравнение [1], которое позволяет исследовать все волновые процессы, происходящие в такой системе. Обнаружено [2], что дисперсионное уравнение имеет зоны непропускания (фильтр частот) в области действительных значений волнового числа и в области предельных частот дисперсионные кривые переходят от действительных к комплексным значениям волнового числа.

Постановка задачи [1]. В приведенных координатах уравнения движения в каждом слое и условия сопряжения на границах между слоями в перемещениях примут вид:

$$\begin{gathered}\ddot{u}_j=u_j''; \quad u_j(0,\ t)=u_{j-1}(\lambda_{j-1},\ t);\\ u_j(\lambda_j,\ t)=u_{j+1}(0,\ t); \quad \gamma_j u_j'(0,\ t)=\gamma_{j-1}u_{j-1}'(\lambda_{j-1},\ t);\\ \gamma_j u_j'(\lambda_j,\ t)=\gamma_{j+1}u_{j+1}'(0,\ t);\\ \eta_j=\xi/c_j; \quad \lambda_j=l_j/c_j; \quad \gamma_j=E_jh_j/c_j; \quad c_j^2=E_j/\rho_j,\end{gathered} \tag{1}$$

где l_j — толщина слоя; $h_j=1$; ξ — внутренняя координата внутри слоя; E_j — модуль упругости; ρ_j — плотность j-го слоя.

Решение задачи (1) ищем в виде

$$u_j(t,\ \eta_j)=\widehat{u}_j(\eta_j)\,e^{i\omega t}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и сократим на $e^{i\omega t}$, тогда получим систему уравнений для $\widehat{u}_j$

$$\frac{\gamma_j}{\sin\omega_j}\,\widehat{u}_{j+1}-(\gamma_j\operatorname{ctg}\omega_j+\gamma_{j-1}\operatorname{ctg}\omega_{j-1})\,\widehat{u}_j+\frac{\gamma_{j-1}}{\sin\omega_{j-1}}\,\widehat{u}_{j-1}=0, \tag{3}$$

где $\omega_j=\omega\lambda_j$.

В случае периодически повторяющегося пакета, содержащего N слоев, решение системы (3) ищем в виде

$$\begin{gathered}u_{N_m}=u_1e^{ikN_ml};\\ \dots\dots\dots\dots\\ u_{N_{m+p}}=u_{m+p}e^{ik\left(N_ml+\sum\limits_1^p l_j\right)};\\ \dots\dots\dots\dots\\ u_{N_{m+N-1}}=u_Ne^{ik(N_ml+l-l_N)},\end{gathered} \tag{4}$$

где N — число слоев в пакете; $l=\sum\limits_{j=1}^{N} l_j$. Двойная нумерация u_{Np} означает, что в пакете из N слоев форма движения p-го слоя повторяется в соседних пакетах со сдвигом на N (циклические граничные условия для пакета из N слоев).

Подставим (4) в (3), тогда получим однородную алгебраическую систему уравнений для отыскания u_{m+p}. Решения $u_{m+p}\neq 0$ существуют, если определитель этой системы равен нулю. Это есть дисперсионное уравнение

$$\cos kl = \Phi_N(\omega),$$

$$\Phi_N(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin\omega_i}{\gamma_i}\left[\det\bar{A}+\left(\frac{\gamma_N}{\sin\omega_N}\right)^2\det\bar{\bar{A}}\right],$$

$$\bar{A}(\omega)=\begin{vmatrix} -(\gamma_1\operatorname{ctg}\omega_1+\gamma_N\operatorname{ctg}\omega_N) & \frac{\gamma_1}{\sin\omega_1} & 0\ldots 0 \\ \frac{\gamma_1}{\sin\omega_1} & -(\gamma_2\operatorname{ctg}\omega_2+\gamma_1\operatorname{ctg}\omega_1) & \frac{\gamma_2}{\sin\omega_2} \quad 0\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots & \frac{\gamma_{N-1}}{\sin\omega_{N-1}} & -(\gamma_N\operatorname{ctg}\omega_N+\gamma_{N-1}\operatorname{ctg}\omega_{N-1}) \end{vmatrix},$$

$$\bar{\bar{A}}(\omega)=\begin{vmatrix} -(\gamma_2\operatorname{ctg}\omega_2+\gamma_1\operatorname{ctg}\omega_1) & \frac{\gamma_2}{\sin\omega_2} & 0\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots & \frac{\gamma_{N-2}}{\sin\omega_{N-2}} & -(\gamma_{N-1}\operatorname{ctg}\omega_{N-1}+\gamma_{N-2}\operatorname{ctg}\omega_{N-2}) \end{vmatrix}.$$

Для пакета из двух слоев имеем дисперсионное уравнение

$$\cos kl = \Phi_2(\omega),$$

$$\Phi_2(\omega)=\cos\omega_0-\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sin\omega_1\sin\omega_2, \tag{5}$$

$$\omega_0=\omega\lambda,\quad \gamma=\gamma_1/\gamma_2,\quad \lambda=\lambda_1+\lambda_2,$$

для пакета из трех слоев — дисперсионное уравнение

$$\cos kl=\Phi_3(\omega),$$

$$\Phi_3(\omega)=\cos\omega_0-\left[\frac{(1-\bar{\gamma}_1)^2}{2\bar{\gamma}_1}\cos\omega_2\sin\omega_1\sin\omega_3+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\bar{\gamma}_2)^2}{2\bar{\gamma}_2}\cos\omega_3\sin\omega_1\sin\omega_2+\frac{(1-\bar{\gamma}_3)^2}{2\bar{\gamma}_3}\cos\omega_1\sin\omega_2\sin\omega_3\right],$$

$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \bar{\gamma}_1=\gamma_1/\gamma_2,\quad \bar{\gamma}_2=\gamma_2/\gamma_3,\quad \bar{\gamma}_3=\gamma_3/\gamma_1.$$

Построим дисперсионные кривые в случае (5). Для этой цели используем процедуру построения, данную в работе [3]. При этом рассмотрим области ($\operatorname{Re}\omega$, $\operatorname{Re}k$) и ($\operatorname{Re}\omega$, $\operatorname{Im}k$).

Область ($\operatorname{Re}\omega$, $\operatorname{Re}k$). Ищем в плоскости (k,ω) точки, в которых обращаются в нуль различные комбинации членов дисперсионного уравнения (5). Имеем три случая:

1) $\cos kl=0$, $\Phi_2(\omega)=0$;

2) $\cos kl - \cos\omega_0 = 0$, $-\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sin\omega_1\sin\omega_2 = 0$;

3) $\cos\omega_0 = 0$, $\cos kl + \frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sin\omega_1\sin\omega_2 = 0$.

Первый случай. Первая система уравнений имеет решение

$k = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Уравнения $\Phi_2(\omega) = 0$ решаем численно на ЭВМ.

Второй случай. Первое уравнение приводим к виду

$$2\sin\frac{kl+\omega_0}{2}\sin\frac{kl-\omega_0}{2} = 0.$$

Решениями являются:

а) $kl + \omega_0 = 2\pi n_1$; б) $kl - \omega_0 = 2\pi n_2$;

в) $\omega_1 = \pi n_3$; г) $\omega_2 = \pi n_4$ $(n_i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Третий случай. Имеем решение

$$\omega^{(n)} = \frac{\pi}{2\lambda} + \frac{\pi n}{\lambda}\ (n = 0, 1, 2, \ldots);\quad \omega_i^{(n)} = \omega^{(n)}\lambda_i;$$

$$k_n l = \arccos\left[-\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sin\omega_1^{(n)}\sin\omega_2^{(n)}\right].$$

Точки с ординатой ω, где $\Phi(\omega) = \pm 1$, и абсциссами соответственно

$$k = \frac{2\pi n}{l},\ k = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

относятся к дисперсионным кривым.

Найдем первую и вторую производные от ω по k. Для этой цели введем функцию

$$\cos kl - \Phi_2(\omega) = F(\omega, k).$$

По правилам дифференцирования сложной функции проводим вычисления:

$$\omega' = -F_k/F_\omega;\quad \omega'' = -[(F_\omega)^2/F_{kk} - (F_k)^2/F_{\omega\omega}]/F_\omega^2,$$

где $F_k = \partial F/\partial k$, $F_\omega = \partial F/\partial\omega$ и имеют значения

$$F_k = -l\sin kl,\quad F_{kk} = -l^2\cos kl,$$

$$F_\omega = \lambda\sin\omega_0 - \frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}(\lambda_1\cos\omega_1\sin\omega_2 + \lambda_2\cos\omega_2\sin\omega_1),$$

$$F_{\omega\omega} = \lambda^2\cos\omega_0 + \frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}[2\lambda_1\lambda_2\cos\omega_2\cos\omega_1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2)^2\sin\omega_1\sin\omega_2].$$

Используем свойство периодичности $\omega(k)$ по k с периодом $T = 2\pi/l$. Вычисление проводим для следующих значений:

$E_1 = 0{,}30\cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 5{,}5\cdot 10^4$ МПа; $l_1 = l_2 = 1$;

$\rho_1 = 1170$ кг/м^3; $\rho_2 = 2500$ кг/м^3.

Зоны непропускания частот определяем условием $|\Phi_2(\omega)|\leqslant 1$.

Область (Re ω, Im k). Обозначим $k=ik_0$ и рассмотрим $k=\frac{\pi}{l}-iz$.

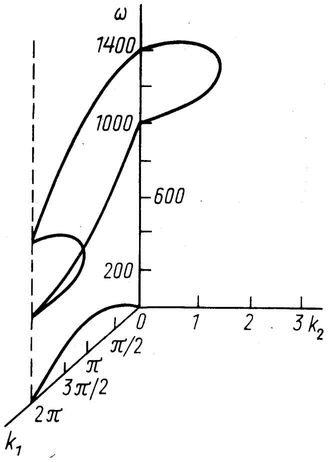
Для трех слоев в пакете имеем дисперсионное уравнение

$$\pm\operatorname{ch}k_0 l=\cos\omega_0-\left[\frac{(1-\bar{\gamma}_1)^2}{2\bar{\gamma}_1}\cos\omega_2\sin\omega_1+\frac{(1-\bar{\gamma}_2)^2}{2\bar{\gamma}_2}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\omega_3\sin\omega_1\sin\omega_2+\frac{(1-\bar{\gamma}_3)^2}{2\bar{\gamma}_3}\cos\omega_1\sin\omega_2\sin\omega_3\right],$$

для двух слоев в пакете — дисперсионное уравнение

$$\pm\operatorname{ch}k_0 l=\cos\omega_0-\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sin\omega_1\sin\omega_2.$$

Это уравнение допускает решение в области $|\Phi(\omega)|\geqslant 1$. Построение дисперсионных кривых в этой области проводим тем же методом, что и в случае действительных значений.



Вычисления выполнены для случая двух слоев в пакете в действительной и комплексной области и представлены на рисунке.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 95—01—01551а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшина Е. А. Вариант моментной теории упругости для одномерной сплошной среды периодической структуры//Прикл. матем. и механ. 1972. **36.** 1086—1093.
2. Ильюшина Е. А., Короткина М. Р. О механическом и тепловом фильтрах// //Упругость и неупругость. М., 1987. 185—196.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих средах. Киев, 1981.

Поступила в редакцию 09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.3

В. М. Александров, Т. М. Ступина

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Двухпараметрическое с разностным периодическим ядром интегральное уравнение первого рода, к которому приводится широкий круг периодических задач механики сплошных сред со смешанными граничными условиями, преобразовано в двух случаях к сингулярному ин-