А. А. Арутюнов, Дифференциальные исчисления на групповых алгебрах и концы групп, *Матем. заметки*, 2023, том 114, выпуск 2, 163–180

DOI: 10.4213/mzm13873

Математические заметки

Том 114 выпуск 2 август 2023

УДК 512.552.7+519.173.5

Дифференциальные исчисления на групповых алгебрах и концы групп

А. А. Арутюнов

Работа посвящена исследованию графов, обобщающих графы Кэли и возникаюших при различных вариантах действия группы на себе. Устанавливается связь между такими графами и подалгебрами операторов в групповом кольце, что позволяет получить формулу для числа концов таких графов в терминах размерностей подходящих пространств характеров. Строятся примеры различных вариантов действия групп и соответствующие им графы. В частности, при действии сопряжениями соответствующая алгебра оказывается алгеброй дифференцирований. Также предлагаемая конструкция обобщается на производные Фокса.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: действия групп, концы графов, грубая геометрия, дифференцирования, дифференцирования Фокса.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13873

Введение

На групповых алгебрах есть два хорошо известных варианта дифференциального исчисления. Первое – это классическое дифференциальное исчисление, удовлетворяющее правилу Лейбница. А именно, назовем *дифференцированиями* линейные операторы $d\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, удовлетворяющие правилу Лейбница

$$d(g_1 g_2) = d(g_1) g_2 + g_1 d(g_2) \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G.$$

Подробнее о таких дифференцированиях и их приложениях см. работы [1]–[4] и обзор [5]. Отметим также приложения изученной конструкции к вычислению когомологий Хохшильда.

Второй хорошо известный вариант дифференциального исчисления на групповых алгебрах – это дифференциальное исчисление в смысле Фокса. Понятие дифференцирования Фокса было введено в оригинальной работе [6]. Одним из первых и самых ярких приложений этого исчисления была теория узлов (см. [7]). Конкретно, удается вычислить матрицу Александера и полиномы Александера, являющиеся

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание № 075-00337-20-03), номер проекта 0714-2020-0005.

инвариантами узлов. Также отметим работу [8], в которой с помощью дифференцирований Фокса исследовались пуассновы и квази-пуассоновы структуры на представлениях пространств и поверхностей. Некоторые приложения к исследованию метабелевых алгебр Ли см. в [9], свойства суперпозиций дифференцирований Фокса были получены в [10].

Строгое определение дифференцирований Фокса мы дадим ниже (см. определение 13). Пока отметим, что линейное отображение $\partial\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ в целочисленной групповой алгебре, являющееся дифференцированием Фокса, должно удовлетворять условию

$$\partial(g_1 g_2) = \partial(g_1) + g_1\, \partial(g_2) \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G.$$

В настоящей работе будет представлена общая конструкция, которая позволяет связать оба варианта дифференциального исчисления с пространствами характеров на группоидах действия группы: для классических дифференцирований это действие группы на себе сопряжениями, а для дифференцирований Фокса – левыми сдвигами. Конструкция основана на совместных работах с Мищенко и Штерном (см. [1], [3]).

Для исследования пространств характеров и определения их свойств нам потребуется конструкция графа $\mathrm{sk}(G;\lambda)$, который обобщает понятие графа Кэли на случай произвольного действия $\lambda\colon G \times G \to G$ группы на себе. При этом структура пространства характеров оказывается существенно зависящей от числа концов соответствующей компоненты связности графа $\mathrm{sk}(G;\lambda)$. В частности, дифференцирования Фокса оказываются по разному устроены для групп с числом концов равным единице и для групп с большим числом концов.

Для полноты изложения отметим, что близким аналогом конструкции является исследованный автором совместно с Алексеевым и Сильвестровым в [11] случай так называемых (σ,τ)-дифференцирований. А именно, для пары эндоморфизмов группы $\sigma\colon G \to G$, $\tau\colon G \to G$ назовем (σ,τ)-*дифференцированием* линейный оператор $D\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, для которого выполнено “скрученное” правило Лейбница

$$D(g_1 g_2) = D(g_1)\tau(g_2) + \sigma(g_1)D(g_2) \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G.$$

Было доказано (см. [11; теорема 1]), что такие (σ,τ)-дифференцирования могут быть представлены как характеры подходящего группоида (см. [11; раздел 3]), не являющегося, впрочем, группоидом действия. Отметим также, что в работе [11] не были получены результаты, касающиеся связи между структурой алгебры дифференцирований и числом концов соответствующих графов, что является важной задачей настоящей работы.

1. Определения и основные результаты

Пусть G – конечно порожденная группа. Зафиксируем λ – левое действие группы на себе $\lambda\colon G \times G \to G$. При фиксированном действии $\lambda\colon G \times G \to G$ будем писать $g(m) := \lambda(g,m)$.

При помощи системы образующих $\mathbf{X}$ и действия λ определим граф $\mathrm{sk}(G;\lambda)$.

Определение 1. Для конечно порожденной группы $G = \langle X \rangle$ определим *граф* $\mathrm{sk}(G;\lambda)$ следующим образом. В качестве вершин возьмем множество элементов группы G, для образующей $x \in \mathbf{X}$ и вершин a, b таких, что $x(a) = b$, направим ребро с меткой x из вершины a в b.

Так определенный граф зависит от выбора системы образующих. Однако, как несложно проверить, для различных конечных систем образующих группы они будут квазиизометричны (см. определение в [12]).

В случае, когда λ – действие левыми сдвигами, т.е. $\lambda(x,a) = xa$, будем пользоваться обозначением $\lambda = \mathrm{tr}_-$. Соответственно, граф $\mathrm{sk}(G;\mathrm{tr}_-)$ есть граф Кэли группы G. Другой важный пример – действие сопряжениями, т.е. $\lambda(x,a) = xax^{-1}$. В таком случае граф $\mathrm{sk}(G;\lambda)$ уместно называть *диаграммой сопряженности*.

Нам потребуются некоторые свойства графов $\mathrm{sk}(G;\lambda)$. Мы вычислим число концов у компонент связности sk_u графа $\mathrm{sk}(G;\lambda)$, используя размерности пространств характеров на группоиде действия. Под характерами мы подразумеваем (см. определение 2) отображения $\chi\colon \mathrm{Hom}(\Gamma_\lambda) \to \mathbb{C}$ такие, что для пар компонируемых морфизмов выполнено свойство $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$. Причем на такие характеры мы наложим дополнительное условие локальной финитности (см. определение 3). Для вычисления числа концов нам потребуются локально финитные характеры, обнуляющиеся на всех эндоморфизмах. Будет доказана следующая

Теорема. *Для конечнопорожденной группы G число $e(\mathrm{sk}_u)$ не зависит от копредставления группы, и справедливо равенство*

$$\dim(X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})) = e(\mathrm{sk}_u) - 1.$$

Здесь $X_0(\Gamma_{[u]})$, $X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})$ – пространства характеров, тривиальных на петлях и тривиальных на петлях с локализованными носителями соответственно. См. подробные определения 4 и 5 ниже.

При помощи характеров можно порождать семейства операторов по формулам следующего вида:

$$\alpha_{\mathscr{A}}(g) = \sum_{h \in G} \chi(h,g)h, \qquad \alpha_{\mathscr{B}}(g) = \sum_{h \in G} \chi(h,g)gh.$$

Условие компонируемости морфизмов порождает соответствующие “индуктивные” тождества (см. формулы (3.3) и (3.7) для $\alpha_{\mathscr{A}}$ и $\alpha_{\mathscr{B}}$ соответственно), аналогичные правилу Лейбница, в зависимости от выбора типа действия группы на себе, что будет исследовано в разделе 3. В частности, будет доказана теорема, показывающая, что в зависимости от числа концов графа меняется структура соответствующего пространства операторов.

Теорема. *Если λ – точное транзитивное действие, то для семейств операторов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ следующие утверждения эквивалентны*:

- *для каждой компоненты связности sk_u графа $\mathrm{sk}(G;\lambda)$ имеем $e(\mathrm{sk}_u) \leqslant 1$;*
- *если оператор α семейства задается характером χ, тривиальным на петлях, $\chi \in X_0(\Gamma_\lambda)$, то найдется такое N, что для каждого g количество ненулевых слагаемых в правой части формул для $\alpha_{\mathscr{A}}$ и $\alpha_{\mathscr{B}}(g)$ не превышает N.*

Приложения к исследованию классических дифференцирований собраны в п. 4.1 и обобщают более ранние результаты работ [1]–[3], касающиеся изучения идеалов внутренних и квазивнутренних дифференцирований.

Вторым важным примером являются дифференцирования Фокса, исследованные в п. 4.1. Предлагаемый комбинаторный подход позволяет дать описание всех дифференцирований Фокса для произвольной конечно порожденной группы (см. теорему 3). Примечательно, что структура дифференцирований Фокса оказывается связанной с числом концов исходной группы.

1.1. Группоид действия и пространство характеров. Определим группоид действия Γ_λ. В качестве объектов группоида возьмем элементы группы G, т.е. $\mathrm{Obj}(\Gamma_\lambda) := G$. В качестве морфизмов возьмем пары из множества $G \times G$, т.е. $\mathrm{Hom}(\Gamma_\lambda) := G \times G$. Началом морфизма $\phi = (m, g)$ положим объект $s(\phi) := m$, а в качестве конца возьмем $t(\phi) := g(m)$. Иными словами, все морфизмы с началом в объекте a и концом в объекте b имеют вид

$$\mathrm{Hom}(a, b) = \{(a, g) \mid g(a) = b\}.$$

Эндоморфизмами назовем морфизмы, у которых совпадает начало и конец. Группа эндоморфизмов вокруг объекта m изоморфна стабилизатору элемента m:

$$\mathrm{Hom}(m, m) \cong \mathrm{Stab}(m).$$

Для пары морфизмов $\phi = (m, g_1)$, $\psi = (m', g_2)$ таких, что $m' = g_1(m)$, определим композицию $\psi \circ \phi$ по формуле

$$\psi \circ \phi := (m, g_2 g_1).$$

Ассоциативность композиции следует из ассоциативности умножения в группе. Нейтральный морфизм вокруг объекта m имеет вид (m, e), где e – нейтральный элемент в группе G. Морфизм обратный к (m, a) имеет вид $(a(m),\, a^{-1})$.

Для элемента $u \in G$ будем обозначать через $[u]$ множество элементов орбиты относительно действия λ. Множество орбит будем обозначать G^λ. Определим субгруппоид $\Gamma_{[u]}$ следующим образом:

$$\mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]}) = [u], \qquad \mathrm{Hom}(\Gamma_{[u]}) = \mathrm{Hom}(a, x), \quad a \in [u], \quad x \in G.$$

Группоид Γ_λ представим в виде несвязного объединения субгруппоидов $\Gamma_{[u]}$, т.е.

$$\Gamma_\lambda = \coprod_{[u] \in G^\lambda} \Gamma_{[u]}. \tag{1.1}$$

Зададим на группоиде Γ_λ пространство характеров, аналогичное изученному ранее в работах [3], [13], [14].

Определение 2. Будем называть функцию $\chi\colon \mathrm{Hom}(\Gamma_\lambda) \to \mathbb{C}$ *характером*, если для любой пары компонируемых морфизмов ϕ, ψ выполняется равенство

$$\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi).$$

Последняя формула эквивалентна следующей:

$$\chi(m, g_2 g_1) = \chi(m, g_1) + \chi(g_1(m), g_2). \tag{1.2}$$

Отметим, что вместо поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно взять и любое другое поле нулевой характеристики, дальнейшие рассуждения не изменятся. Ниже при исследовании дифференцирований Фокса мы рассмотрим целочисленные характеры. Существенно отличается ситуация, если брать в качестве значений характеров конечные поля. Такой вариант характеров был рассмотрен в [13].

Определение 3. Будем называть характер χ *локально финитным*, если для всех элементов $g \in G$ имеем, что $\chi(m, g) = 0$ почти всегда (т.е. для всех кроме конечного числа элементов $m \in G$).

Пространство локально финитных характеров будем обозначать $X(\Gamma_\lambda)$.

Определение 4. Будем обозначать через $X_0(\Gamma_\lambda)$ пространство локально финитных характеров, тривиальных на эндоморфизмах, т.е.

$$X_0(\Gamma_\lambda) := \{\chi \in X(\Gamma_\lambda) \mid \chi(\phi) = 0, \forall\, \phi : t(\phi) = s(\phi)\}. \tag{1.3}$$

Нам потребуется пространство локально финитных характеров, тривиальных на петлях с локализованным носителем.

Определение 5. Обозначим через $X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_\lambda)$ пространство локально финитных характеров таких, что

1) они тривиальны на эндоморфизмах;
2) лишь для конечного числа объектов $m \in \Gamma_\lambda$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $\chi(m, g) \neq 0$.

Отметим, что второе условие не следует из определенной выше локальной финитности. Определение 3 означает, что для фиксированного $g \in G$ есть конечное число объектов m таких, $\chi(m, g) \neq 0$, но множество объектов m таких, что $\chi(m, g) \neq 0$ для некоторого g, может быть и бесконечным.

Будем называть *носителем* характера множество морфизмов, на которых он отличен от нуля, т.е.

$$\operatorname{supp}\chi := \{\phi \in \operatorname{Hom}(\Gamma_\lambda) \mid \chi(\phi) \neq 0\}. \tag{1.4}$$

Обозначим через $X(\Gamma_{[u]})$, $[u] \in G^\lambda$, подпространство в $X(\Gamma_\lambda)$, состоящее из характеров, удовлетворяющих условию $\operatorname{supp}(\chi) \subset \operatorname{Hom}(\Gamma_{[u]})$. Аналогичный смысл имеют и пространства $X_0(\Gamma_{[u]})$, $X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})$.

По формуле (1.1) имеем

$$X(\Gamma_\lambda) = \bigoplus_{[u]\in G^\lambda} X(\Gamma_{[u]}), \qquad X_0(\Gamma_\lambda) = \bigoplus_{[u]\in G^\lambda} X_0(\Gamma_{[u]}), \quad X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_\lambda) = \bigoplus_{[u]\in G^\lambda} X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]}).$$

1.2. Граф $\operatorname{sk}(G;\lambda)$. Напомним определение графа $\operatorname{sk}(G;\lambda)$ (определение 1) для конечно порожденной группы $G = \langle X\rangle$: в качестве вершин возьмем множество элементов группы G, для образующей $x \in \mathbf{X}$ и вершин a, b таких, что $x(a) = b$, направим ребро с меткой x из вершины a в b.

Для элемента $u \in G$ обозначим через sk_u компоненту связности графа $\operatorname{sk}(G;\lambda)$ содержащую элемент u. На графе $\operatorname{sk}(G;\lambda)$ и его компонентах связности sk_u понятия характера и локальной финитности можно ввести аналогично с группоидом Γ_λ.

Определение 6. Функцию на направленном графе $\chi\colon \operatorname{sk}(G;\lambda)\to\mathbb{C}$ будем называть *характером*, если сумма значений характера на ребрах по каждому замкнутому циклу (берущаяся с учетом направления ребра) нулевая.

Аналогично характер вводится и на графах sk_u.

Заметим, что, как и с характерами на группоиде, вместо поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно взять и любое другое поле нулевой характеристики, дальнейшие рассуждения не изменятся.

Определение 7. Характер на графе будем называть *локально финитным*, если он равен нулю на почти всех ребрах.

Легко понять, что если рассмотреть Γ_λ как граф с подграфом $\operatorname{sk}(G;\lambda)$, то каждый характер на Γ_λ, будучи ограниченным на $\operatorname{sk}(G;\lambda)$, породит характер на графе. Верно и обратное: каждый характер на графе однозначно продолжается на весь группоид.

Лемма 1. *Локально финитный характер на графе* sk_u *продолжается до локально финитного характера на всем группоиде.*

Доказательство. Достаточно продолжить характер χ_0 с графа sk_u до характера χ с носителем в группоиде $\Gamma_{[u]}$. Положим $\chi(a,x) := \chi_0(a,x)$ для всех $x\in\mathbf{X}$. Продолжим характер при помощи формулы (1.2) на все морфизмы. Корректность такого продолжения вытекает из того, что характер χ_0 обращается в нуль на каждом замкнутом пути, а на группоиде $\Gamma_{[u]}$ корректно определена композиция. Остается проверить локальную финитность полученного характера.

Возьмем произвольный элемент $\omega\in G$, который в данном копредставлении может быть записан как слово длины n от образующих $x_i\in\mathbf{X}$, т.е. $\omega=\omega(x_1,x_2,\dots)$. Такой морфизм является композицией n морфизмов с метками x_i, откуда и получаем, что характер χ отличен от нуля лишь на конечном числе морфизмов вида $(*,\omega)$.

Локально финитный характер на группоиде ограничивается до локально финитного характера на графе $\operatorname{sk}(G;\lambda)$. Таким образом, построено взаимнооднозначное соответствие между характерами на графе sk_u и субгруппоиде $\Gamma_{[u]}$ и в дальнейшем эти два понятия различаться не будут.

Пример 1. Если λ – тривиальное действие, т.е. $g(m)=m$ для всех $g,m\in G$, то графы sk_u состоят из одной вершины. Соответствующий группоид действия $\Gamma_{[u]}$ эквивалентен моноиду группы.

Другие примеры, в частности, важный случай действия группы на себе сопряжениями, будут рассмотрены ниже в разделе 3.

Немного проясним структуру графа $\operatorname{sk}(G;\lambda)$.

Рассмотрим отображение $\zeta\colon \operatorname{Cayley}(G)\to\operatorname{sk}_u$, определяемое следующим образом: положим на вершинах $\zeta\colon g\mapsto g(u)$. В частности $\zeta\colon 1\mapsto u$. И продолжим отображение ζ на ребра при помощи меток. Ребро с меткой $x\in\mathbf{X}$, соединяющее a и b в графе Кэли, перейдет в ребро с меткой x между $\zeta(a)$ и $\zeta(b)$ в графе sk_u.

Введенное отображение ζ является накрытием и корректно определено, поскольку если путь ω в графе Кэли является циклом, то он будет циклом и в графе sk_u.

Так что граф $\operatorname{sk}(G;\lambda)$ есть образ графа Кэли под действием монотонного накрытия, сохраняющего метки на ребрах.

Граф $\mathrm{sk}(G;\lambda)$ зависит от выбора системы образующих $\mathbf{X}$. Однако легко видеть, что при замене множества образующих $\mathbf{X}$ все получаемые графы будут грубо эквивалентными (квазиизометричными). Так что число концов является инвариантом группы G относительно выбора системы образующих и грубым инвариантом компоненты связности графа $\mathrm{sk}(G;\lambda)$. Отметим, что данный инвариант для различных вариантов действия λ является, вообще говоря, более тонким, чем число концов группы, и позволяет различать группы с одинаковым числом концов (см. пример 2).

Исследование концов групп и концов метрических пространств началось в первой половине XX века с работы [15]. Важным результатом был полученный в работах [16], [17] критерий бесконечности числа концов у группы. В дальнейшем теория концов находила новые приложения. Некоторые результаты описаны в [18].

Последние годы теория концов изучается в контексте грубой геометрии. Обзор известных результатов см. в [19]. Также отметим работу [12], в которой предложено обобщение теории концов метрического пространства на общий случай грубой структуры, а также работу [20], в которой установлена связь между числом концов метрического пространства и компактификацией Хигсона. В работе [21] с использованием теории концов была построена грубая классификация польских групп.

1.3. Тривиальные на эндоморфизмах характеры. Для работы с характерами, тривиальными на эндоморфизмах, удобно воспользоваться следующим соображением. Если характер χ равен нулю на всех эндоморфизмах, то для всех морфизмов $\phi,\psi\in\mathrm{Hom}(a,b)$ имеем, что $\chi(\phi)=\chi(\psi)$. Следовательно, для такого характера χ найдется функция $p\colon \mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]})\to\mathbb{C}$ такая, что справедлива формула

$$\chi(\phi)=p(b)-p(a)\qquad \forall\,\phi\in\mathrm{Hom}(a,b). \tag{1.5}$$

Введем отношение эквивалентности

Определение 8. Две функции на объектах p_1, p_2 будем называть *эквивалентными*, если их разность является константой, т.е.

$$p_1(\,\cdot\,)\sim p_2(\,\cdot\,)\leftrightarrow p_1(a)-p_2(a)\equiv\mathrm{const}. \tag{1.6}$$

В силу формулы (1.5) эквивалентные функции p задают один характер. Для дальнейшего зафиксируем следующее простое соображение.

Замечание 1. Легко видеть, что по построению подпространства характеров $X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})$, $X_0(\Gamma_{[u]})$ не зависят от выбора копредставления группы G.

Определение 9. Пространство функций $p\colon \mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]})\to\mathbb{C}$, профакторизованное введенным выше отношением эквивалентности $\sim$, таких, что для каждого $x\in\mathbf{X}$ для почти всех a выполнено $p(a)=p(x(b))$, будем обозначать через $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$.

Через $\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]})$ будем обозначать подпространство в пространстве $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$ из тех элементов $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$, которые эквивалентны функциям p, обладающим конечным носителем.

Из замечания 1 получаем

Предложение 1. *Имеют место следующие естественные изоморфизмы векторных пространств*:

$$\mathbb{P}(\Gamma_{[u]}) \cong X_0(\Gamma_{[u]}); \tag{1.7}$$

$$\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]}) \cong X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]}); \tag{1.8}$$

$$\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})/\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]}) \cong X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]}). \tag{1.9}$$

Доказательство. Первые две формулы вытекают из определения. Из них следует и изоморфизм соответствующих факторпространств.

Уточним описание функций из пространства $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$.

Лемма 2. *Функция p лежит в пространстве $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$ тогда и только тогда, когда существует конечный подграф $Q \subset \mathrm{sk}_u$ такой, что для любых двух соседних в графе $\mathrm{sk}_u \setminus Q$ вершин a, b имеет место $p(a) = p(b)$.*

Доказательство. Функция p определяет соответствующий ей характер χ по формуле (1.5). Согласно лемме 1 локальная финитность характера $\chi \in X_0(\Gamma_{[u]})$ равносильна локальной финитности характера на графе sk_u. Локальная финитность характера на графе равносильна тому, что для всех, кроме конечного числа, соседних вершин a, b значение характера на ребре, соединяющем a и b, равно нулю. Что и дает доказательство в одну сторону. Обратное следует из конечной порожденности группы G и определения характера.

2. Вычисление числа концов

Пусть имеем бесконечный граф γ с конечными степенями вершин.

Определение 10. Через $e(\gamma)$ будем обозначать число концов графа γ, а именно, максимальное количество бесконечных компонент связности в графах вида $\gamma \setminus Q$. Максимум берется по всевозможным конечным подграфам Q.

Число концов графа Кэли группы G не зависит от выбора конечной системы образующих (см. [22]), так что через $e(G)$ будем обозначать число концов для графа Кэли группы G. Данный инвариант называют *числом концов* группы G. Известная теорема Столлингса (оригинальное доказательство см. в [16], [17], современное в [22], [23]) позволяет вычислить $e(G)$ при помощи свойств копредставления группы G.

Наша задача – построить формулу для концов графов $\mathrm{sk}(G;\lambda)$, имеющих более общий вид, нежели графы Кэли. Для этого мы воспользуемся размерностями определенных нами выше пространств.

Теорема 1. *Для конечнопорожденной группы G число $e(\mathrm{sk}_u)$ не зависит от копредставления группы, и справедливо равенство*

$$\dim(X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})) = e(\mathrm{sk}_u) - 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Объединяя предложение 1 и замечание 1, получаем равенство

$$\dim(X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})) = \dim(\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})/\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]})).$$

Так что достаточно проверить равенство

$$\dim(\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})/\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]})) = e(\mathrm{sk}_u) - 1.$$

Функции из пространств $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$, $\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]})$ достаточно рассматривать как функции на вершинах графа sk_u.

Пусть сначала у графа sk_u конечное число концов. Зафиксируем конечный подграф $Q_0 \subset \mathrm{sk}_u$ такой, что у графа $\mathrm{sk}_u \setminus Q_0$ столько же бесконечных компонент связности, сколько и концов. Обозначим бесконечные компоненты связности через $E_1, \ldots, E_{e(\mathrm{sk}_u)}$. Определим функцию p_i, $i = 1, \ldots, e(\mathrm{sk}_u)$, как индикатор множества E_i, т.е. $p_i(a) := 1$ для всех $a \in E_i$ и $p_i(a) := 0$ для прочих элементов. К таким функциям очевидно применима лемма 2, так что имеем $p_i \in \mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$ и, соответственно, они определяют нетривиальный локально-финитный характер.

Причем если $e(\mathrm{sk}_u) > 1$, то любые $e(\mathrm{sk}_u) - 1$ таких функций линейно независимы. В то же время сумма всех таких функций p_i-эквивалентна функции с конечным носителем из $\mathbb{P}_0$.

Теперь покажем, что любая функция p, задающая локально финитный характер, представима в виде линейной комбинации $p = \sum \alpha_i p_i + p_Q$, где функция p_Q имеет конечный носитель – множество Q.

По лемме 2 для функции $p \in \mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$ найдется такой конечный подграф Q_1, что $p(s) = p(t)$ для всех пар соседних вершин s, t в графе $\mathrm{sk}_u \setminus Q_1$.

Положим $Q_2 = Q_0 \cup Q_1$, и возьмем такой конечный граф $Q \supset Q_2$, что все графы $E_i \setminus Q$ будут связными. Тогда на каждом множестве $E_i \setminus Q$ функция p постоянна, поскольку $E_i \setminus Q$ содержится в множестве $E_i \setminus Q_1$. Положим $a_i := p(t)$ для $t \in E_i \setminus Q$.

Остается заметить, что функция $p_Q := p(x) - \sum a_i p_i(x)$ обладает конечным носителем, сосредоточенным в подграфе Q.

В случае, когда число $e(\mathrm{sk}_u)$ конечно, остается заметить, что $e(\mathrm{sk}_u)$ не зависит от копредставления группы. В силу замечания 1 левая часть формулы (2.1) не зависит от копредставления группы G. А значит, и число $e(\mathrm{sk}_u)$ не зависит от копредставления группы G.

В случае, когда число концов графа sk_u бесконечно, проверим, что и пространство $X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})$ будет бесконечномерным.

Действительно, для каждого N найдется такой конечный подграф Q_N, что граф $\mathrm{sk}_u \setminus Q_N$ обладает не менее чем $N+1$ бесконечными компонентами связности, которые мы обозначим $E_1^N, E_2^N, \ldots, E_k^N$, $k > N$. В таком случае рассмотрим функции $p_i \in \mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$, которые являются индикаторами множеств E_i^N. Любые N из них будут линейно независимы, причем будут порождать N-мерное подпространство в $\mathbb{P}(\Gamma_{[u]})/\mathbb{P}_0(\Gamma_{[u]})$. Следовательно, интересующее нас пространство $X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})$ бесконечномерно.

Если число концов графа sk_u равно нулю (например, если группа G конечна или соответствующая орбита конечна), то пространства X_0 и X_0^{loc} совпадают. Тогда правая часть формулы (2.1) равна нулю.

Группа G называется *FC-группой* (см. [24]), если в ней все классы сопряженности конечны. Примеры и свойства таких бесконечных групп см. в [24], [25].

Пример 2. Если λ – действие сопряжениями, то бесконечная группа G является FC-группой, если $e(\mathrm{sk}_u) = 0$ для всех $u \in G$.

К естественному вопросу о вычислении числа концов комбинаторными методами, отметим известную теорему Хопфа (см. [26]), гласящую, что число концов конечнопорожденной группы устроено следующим образом: $e(G) \in \{0; 1; 2; \infty\}$. Отметим обобщение этой теоремы в терминах грубой геометрии (см. [12; теорема 6.39]), применимое к случаю графа $\mathrm{sk}(G; \lambda)$.

Если группа действует на себе левыми сдвигами, граф $\mathrm{sk}(G; \mathrm{tr}_{-})$ совпадает с графом Кэли для соответствующей системы порождающих. Так что, применяя упомянутую теорему Хопфа, получаем следующую реализацию доказанной выше теоремы.

Пример 3. Для действия левыми сдвигами tr_{-} имеем, что интересующий нас граф $\mathrm{sk}(G; \mathrm{tr}_{-})$ совпадает с графом Кэли $\mathrm{Cayley}(G)$ для той же системы образующих. Соответственно, для бесконечной группы G

$$1 + \dim\bigl(\mathbb{P}(\mathrm{Cayley}(G))/\mathbb{P}_0(\mathrm{Cayley}(G))\bigr) = e(G) \in \{1; 2; \infty\}. \tag{2.2}$$

В качестве простейшего конкретного примера действия сдвигами группы на себе, естественно обратить внимание на аддитивную группу целых чисел $\mathbb{Z}$, у которой граф Кэли имеет два конца.

Пример 4. Функция $\mathrm{sgn}\colon \mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}) \to \{\pm 1\}$, которая ставит в соответствие целому числу его знак, задает локально финитный характер на графе, однако не эквивалентна никакой функции из $\mathbb{P}_0(\mathbb{Z})$.

Рассуждения из доказательства теоремы 1 легко обобщить. А именно, пусть γ – связный граф, в котором все вершины имеют конечную степень. Положим $\mathbb{P}(\gamma)$, $\mathbb{P}_0(\gamma)$ – пространства функций на вершинах графа γ, заданные так же, как и в определении 9. Тогда получаем

Следствие 1. *Для графа γ справедлива формула для числа концов*

$$e(\gamma) - 1 = \dim(\mathbb{P}(\gamma)/\mathbb{P}_0(\gamma)). \tag{2.3}$$

Пример 5. Рассмотрим в качестве примера луч r натуральных чисел, соединенных естественным образом

$$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to \cdots .$$

У графа r, разумеется, один конец, так что $e(r) - 1 = 0$. В то же время пространство $\mathbb{P}$ состоит из таких функций, что $p(k) = p(k+1)$ для всех достаточно больших k. Следовательно, с точностью до отношения эквивалентности мы можем считать, что $p(k) = 0$ для достаточно больших k. Значит, пространства $\mathbb{P}(r)$ и $\mathbb{P}_0(r)$ ожидаемо совпадают.

3. Операторы на групповых алгебрах

Рассмотрим линейный оператор $\alpha\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$. В силу линейности для базисного элемента $g \in G \subset \mathbb{C}[G]$ имеем

$$\alpha(g) = \sum_{h \in G} \alpha_h^g h.$$

Очевидно, что определенность оператора α как действующего в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$ равносильна условию на коэффициенты α_h^g, аналогичному условию локальной финитности.

Семейства операторов. Пусть $\lambda\colon G\times G\to G$ – свободное и транзитивное левое действие группы на себе. Когда речь идет о фиксированном действии, мы будем, как и раньше, писать $\lambda(g,h) =: g(h)$. Продолжим действие λ по линейности до действия на групповой алгебре $\lambda\colon G\times\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$. А именно, если $x\colon G\to\mathbb{C}$ – финитная функция, положим

$$g\biggl(\sum_{h\in G}x(h)h\biggr) := \sum_{h\in G}x(h)gh. \tag{3.1}$$

Определение 11. Обозначим через $\mathscr{A}(\mathbb{C}[G],\lambda)$ пространство операторов, действующих в $\mathbb{C}[G]$, таких, что для каждого $\alpha\in\mathscr{A}$ выполнено

$$\alpha(uv) = v^{-1}(\alpha(u)) + \alpha(v) \qquad \forall\, u,v\in\mathbb{C}[G]. \tag{3.2}$$

Для краткости будем писать $\mathscr{A}$ вместо $\mathscr{A}(\mathbb{C}[G])$.

Предложение 2. *Пространство операторов $\mathscr{A}$ канонически изоморфно $X(\Gamma_\lambda)$.*

Доказательство. Понятно, что оператор α лежит в $\mathscr{A}$, если (и только если) тождество (3.2) выполнено на всех образующих. Запишем оператор α для $g\in G$ в виде

$$\alpha(g) = \sum_{h\in G}\chi(h,g)h. \tag{3.3}$$

Тождество (3.2) для образующих $g_{1,2}\in G$ дает следующее:

$$\begin{aligned}\alpha(g_2g_1) &= \sum_{h\in G}\chi(h,g_2g_1)h = \sum_{h\in G}\bigl(\chi(h,g_1)h + \chi(g_1(h),g_2)h\bigr)\\ &= \alpha(g_1) + \sum_{h\in G}\chi(h,g_2)g_1^{-1}(h) = \alpha(g_1) + g_1^{-1}(\alpha(g_2)).\end{aligned}$$

Здесь мы применили "перенумерацию" элементов группы, воспользовавшись точностью действия, а именно: если $g_1(h)=m$, то $h=g_1^{-1}(m)$, а также транзитивностью, поставив знак суммирования по всей группе.

Поскольку в выкладке все переходы эквивалентны, получаем, что из выполнения тождества (3.2) следует, что для коэффициентов, определенных формулой (3.3), будет выполняться свойство определяющее характер (1.2). Что и требовалось.

Приведем два очевидных примера классов операторов, описываемых тождествами типа $\mathscr{A}$.

Пример 6. Если наше действие – это действие левыми сдвигами tr_-, то тождество (3.2) примет вид

$$\alpha(uv) = v^{-1}\alpha(u) + \alpha(v). \tag{3.4}$$

Если λ – действие сопряжениями, то тождество (3.2) примет вид

$$\alpha(uv) = v^{-1}\alpha(u)v + \alpha(v). \tag{3.5}$$

Приведем еще одно аналогичное семейство операторов, которое в вычислительном смысле несколько более громоздкое, однако доставляет нам основные примеры тождеств, встречающихся в других разделах, а именно классические дифференцирования и дифференцирования Фокса.

Определение 12. Обозначим через $\mathscr{B}(\mathbb{C}[G],\lambda)$ пространство операторов, действующих в $\mathbb{C}[G]$, таких, что для каждого $\alpha \in \mathscr{B}$ выполнено

$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + uv \cdot v^{-1}(u^{-1} \cdot \alpha(u)). \tag{3.6}$$

Для краткости будем писать $\mathscr{B}$ вместо $\mathscr{B}(\mathbb{C}[G],\lambda)$.

Предложение 3. *Пространство операторов $\mathscr{B}$ канонически изоморфно $X(\Gamma_\lambda)$.*

Доказательство. Оператор $\alpha \in \mathscr{B}$, если (и только если) тождество (3.2) выполнено на всех образующих. Запишем оператор α для $g \in G$ в виде

$$\alpha(g) = \sum_{h\in G} \chi(h,g)gh. \tag{3.7}$$

Остальное доказательство полностью аналогично доказательству предложения 2.

Несмотря на более громоздкий вид, семейства операторов $\mathscr{B}$ как раз обобщают понятия классического дифференцирования и дифференциальное исчисление Фокса.

Пример 7. Если рассматриваем действие левыми сдвигами tr_-, то тождество (3.6) примет вид

$$\alpha(uv) = \alpha(u) + u\alpha(v). \tag{3.8}$$

Если λ – действие сопряжениями, то тождество (3.2) определяет дифференцирования, т.е. задает правило Лейбница

$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + v\alpha(u). \tag{3.9}$$

Поясним, что тождество $\alpha(u) + u\alpha(v)$ соответствует тождеству, которому удовлетворяют так называемые производные Фокса (Fox derivatives). Этот интересный пример мы рассмотрим подробнее ниже.

Несложно построить и другие примеры аналогичных семейств операторов, задаваемых различными тождествами. При этом для всякого такого семейства будет действовать обобщение следствия 5.

Теорема 2. *Если λ – точное транзитивное действие, то для семейств операторов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ следующие утверждения эквивалентны:*

- *для каждой компоненты связности sk_u графа $\mathrm{sk}(G;\lambda)$ имеем $e(\mathrm{sk}_u) \leqslant 1$;*
- *если оператор α семейства задается характером χ, тривиальным на петлях, $\chi \in X_0(\Gamma_\lambda)$, то найдется такое N, что для каждого g количество ненулевых слагаемых в правой части соответствующих формул (3.3), (3.7) не превышает N.*

Доказательство. Из теоремы 1 получаем, что условие $e(\mathrm{sk}_u) > 1$ равносильно тому, что существует тривиальный на петлях характер χ такой, что он не задается характером из $X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]})$. По предложению 1 он задается функцией p с бесконечным носителем. Причем, как следует из доказательства теоремы 1, характер χ можно выбрать таким образом, что носитель функции p – это подмножество E_1 (из доказательства теоремы 1).

Тогда для базисного элемента $g \in G$ с длиной $|g|$ количество ненулевых слагаемых в соответствующей формуле (3.3), (3.7) будет не меньше, чем $|M_g|$ – количество элементов на расстоянии $|g|$ от Q. Поясним это утверждение. Рассмотрим множество

$$M_g = \{h \in E_1 \mid \rho(h, Q) \leqslant |g|\}.$$

Тогда если $q(h) \in Q$ такое, что расстояние от h до $q(h)$ минимально, то для морфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(h, q(h))$ имеем $\chi(\varphi) \neq 0$.

Дальнейшие рассуждения очевидны.

В качестве одного из приложений теоремы 2 отметим, что характеры, которые задаются функциями $p \in \mathbb{P}(\Gamma_{[u]})$, задающими локально финитные характеры, определены на групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$. Однако они не будут ограниченными, если на $\mathbb{C}[G]$ задать норму, в которой $\|g\| = 1$ для всех $g \in G$. Более подробно о дифференцированиях со значениями в нормированных бимодулях см. [27].

4. Примеры

Перейдем к разбору примеров применения теорем 1 и 2. Оба примера относятся к введенному выше семейству операторов $\mathscr{B}$.

4.1. Действие сопряжениями. Пусть λ – это действие группы на себе сопряжениями. То есть $g(a) = gag^{-1}$. Рассмотрим дифференцирование d, а именно, линейный оператор $d\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, удовлетворяющий правилу Лейбница

$$d(uv) = d(u)v + ud(v), \qquad u, v \in \mathbb{C}[G].$$

Как показано в [3] (см. теоремы 1, 2), пространство (на самом деле, алгебра) дифференцирований изоморфно пространству локально финитных характеров $X(\Gamma_\lambda)$. Более того, для дифференцирования d справедлива формула (после соответствующих переобозначений вытекающая из теоремы 1 в [2]) для базисного элемента $g \in G \subset \mathbb{C}[G]$

$$d(g) = \sum_{h \in G} \chi(h, g) hg. \tag{4.1}$$

Подпространство характеров $X_0(\Gamma_\lambda)$ задает по формуле (4.1) квазивнутренние дифференцирования (см. [14; раздел 4], где они названы слабыми дифференцированиями), а именно дифференцирования, которые задаются характерами, которые равны нулю на всех эндоморфизмах. Квазивнутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре дифференцирований, содержащий в себе внутренние [14; теорема 4.1].

При этом характеры из пространства X_0^{loc} порождают по формуле (4.1) внутренние дифференцирования (это следует из [14; предложение 4.2]), т.е. задаваемые для фиксированного $a \in \mathbb{C}[G]$ по формуле

$$x \mapsto ax - xa.$$

По теореме 1, если $e(\mathrm{sk}_u) > 1$ для некоторого $[u] \in G^G$, то эти пространства не совпадают. Более того, из теоремы 1 следует

Следствие 2. *Для бесконечного класса сопряженности* $[u]$ *справедлива формула*

$$\dim X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_{[u]}) = e(\mathrm{sk}_u) - 1.$$

Это же дает критерий совпадения квазивнутренних и внутренних дифференцирований

Следствие 3. *Если группа* G *такова, что* $e(\mathrm{sk}_u) = 1$ *для всех* $u \in G$, *то все квазивнутренние дифференцирования будут внутренними.*

Замечание 2. Если группа G такова, что для по меньшей мере одного класса сопряженных элементов $[u]$ соответствующий граф sk_u имеет более одного конца, то найдутся квазивнутренние дифференцирования, не являющиеся при этом внутренними. Следовательно, существуют разные внешние дифференцирования, совпадающие на эндоморфизмах. Более подробно см. приложение к [3] и работу [4].

Квазивнешними дифференцированиями называется фактор-алгебра всех дифференцирований по квазивнутренним (см. [15]). Теорема 1 позволяет изучить алгебру квазивнешних дифференцирований.

Обозначим через $X^*(\Gamma_{[u]})$ факторпространство $X(\Gamma_{[u]})/X_0(\Gamma_{[u]})$. Элементы этого пространства $X^*(\Gamma_{[u]})$ можно понимать как ограничение локально финитного характера на эндоморфизмы вершины u. Которые, в свою очередь, удобно интерпретировать как гомоморфизмы $\mathrm{Hom}(u,u) \to \mathbb{C}$.

Следствие 4. *Справедливо следующее разложение алгебры квазивнешних дифференцирований*

$$Q\,\mathrm{Out}\,\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} X^*(\Gamma_{[u]}).$$

Если, кроме того, $e(\mathrm{sk}_u) \leqslant 1$ *для каждого* $[u]$, *то последнее разложение справедливо для алгебры внешних дифференцирований.*

Разберем вопрос, что происходит, когда $e(\mathrm{sk}_u) > 1$ для некоторого класса сопряженности. Наиболее показательным нам представляется случай группы Гейзенберга $\mathbf{H}$, разобранный более подробно в [2; раздел 3.3]. Для нецентрального элемента u в случае группы Гейзенберга, как несложно убедиться, $e(\mathrm{sk}_u) = 2$ и соответствующий граф (для подходящей системы образующих) является графом Кэли циклической группы, т.е. попросту $\mathbb{Z}$.

Применение теорем 1 и 2 дает нам следующий результат.

Пример 8. Существует такое дифференцирование $d^+ \colon \mathbb{C}[\mathbf{H}] \to \mathbb{C}[\mathbf{H}]$, что выполнены следующие условия:

1) дифференцирование d^+ не может быть записано в виде $d^+(x) = [a, x]$, для некоторого $a \in \mathbf{H}$;
2) оператор d^+ может быть представлен в виде бесконечной суммы

$$d^+(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [a_i, x],$$

для бесконечного набора ненулевых $a_i \in \mathbf{H}$.

Примером такого дифференцирования является оператор, заданный формулой (3.10) из [2]. В более общем виде это дает такое следствие из теоремы 2.

Следствие 5. *Следующие утверждения эквивалентны*:
1) $e(\mathrm{sk}_u) \in \{0; 1\}$ *для каждого класса сопряженности* $u \in G^G$;
2) *если дифференцирование* $d\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ *представимо в виде линейной комбинации внутренних дифференцирований, то оно внутреннее.*

4.2. Дифференцирования Фокса. Понятие дифференцирования Фокса было введено в оригинальной работе [6]. В дальнейшем дифференциальное исчисление Фокса применялось к различным задачам, в частности, к теории узлов (см. [7]). При помощи таких производных может быть вычислена матрица Александера и полиномы Александера, являющиеся инвариантами узлов. Напомним определение дифференцирования Фокса, следуя работе [7].

Определение 13 [7; с. 96]. Для группы G назовем *дифференцированием Фокса* линейное отображение $\partial\colon G \to \mathbb{Z}[G]$ такое, что

$$\partial(g_1 g_2) = \partial(g_1) + g_1\, \partial(g_2) \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G. \tag{4.2}$$

Такие операторы продолжаются по линейности до оператора $\partial\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$, действующего на всем $\mathbb{Z}[G]$.

Отметим, что для дифференциального исчисления Фокса рассматривается групповая алгебра не с комплексными коэффициентами, как у нас, а с целочисленными. Однако это не влияет на саму конструкцию отождествления. Учитывая определение 12 и формулу (3.8) для случая, когда $\lambda = \mathrm{tr}_-$ – действие группы на себе левыми сдвигами, получаем, что дифференцирования Фокса – это не что иное как $\mathscr{B}(\mathbb{Z}[G], \mathrm{tr}_-)$. Так что задача описания всех дифференцирований Фокса соответствует задаче исследования характеров на группоиде Γ_{tr_-}.

Предложение 4. *Все локально финитные характеры на* Γ_{tr_-} *тривиальны на эндоморфизмах*, *т.е.*

$$X(\Gamma_{\mathrm{tr}_-}) = X_0(\Gamma_{\mathrm{tr}_-}).$$

Доказательство. Легко видеть, что для эндоморфизма $(a, g) \in \mathrm{End}(a)$ имеем, что $ag = a$, следовательно, g есть нейтральный элемент в группе. Значит, все эндоморфизмы имеют вид $(*, e)$.

Обозначим пространство всех производных Фокса через $\mathscr{F}(G)$. Обозначим через $X_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$ пространство локально финитных характеров с целочисленными значениями (аналогично определению 2, но заменяя поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ на кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$). Конечно, пространство $X_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$ является подпространством в пространстве всех локально финитных характеров $X(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$. Соответсвенно, через $X^{\mathrm{loc}}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$ мы обозначим целочисленные характеры, удовлетворяющие одновременно определению 5.

Предложение 5. *Для конечнопорожденной группы G производные Фокса канонически изоморфны пространству $X_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$ локально финитных целочисленных характеров.*

Доказательство. Граф $\mathrm{sk}(G;\mathrm{tr}_-)$ – это граф Кэли группы G для той же системы образующих. Отождествление дифференцирований и характеров строится как в предложении 3. Ну а каноничность имеем из теоремы 1.

Имея такое отождествление, мы можем описать все дифференцирования Фокса. Начнем с аналога “внутренних” дифференцирований, т.е. отвечающих характерам из пространства $X^{\mathrm{loc}}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$.

Предложение 6. *Дифференцирования $\partial \in \mathscr{F}(G)$ с характерами из пространства $X^{\mathrm{loc}}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$ имеют вид на базисных элементах*

$$\partial_u(g) = u - gu, \tag{4.3}$$

где $u \in \mathbb{C}[G]$.

Доказательство. Мы воспользуемся отождествлением из предложения 1, поскольку по доказанному выше предложению 4 все характеры тривиальны на петлях.

Зафиксируем базисный элемент групповой алгебры $a \in G$. Рассмотрим функцию $P_a \in \mathbb{P}_0$ такую, что $P_a(a) = 1$, и равную нулю для всех других аргументов. Порождаемый элементом a характер обозначим χ_a.

В силу предложения 3 имеем, что соответствующее дифференцирование ∂_a может быть вычислено на базисе следующим образом:

$$\partial_a(g) = \sum_{h\in G} gh\chi_a(h,g) = \sum_{h\in G}(P_a(gh) - P(h))gh = a - ga.$$

Соответственно, для $u = \sum_{a\in G}\lambda_a a$ в силу линейности имеем

$$\partial_u = \sum_{a\in G}\lambda_a\,\partial_a.$$

Откуда и получаем искомое.

По теореме 2 имеем, что если $e(G) \in \{0;1\}$, то $X^{\mathrm{loc}}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-}) \equiv X_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\mathrm{tr}_-})$ и никаких других дифференцирований, кроме тех, что описаны в последнем предложении, нет. Однако для групп, у которых более одного конца, есть и другие дифференцирования Фокса. То есть дифференцирования ∂_u, которые задаются элементом u, не лежащим в групповой алгебре.

Пример 9. Для целочисленной групповой алгебры над $\mathbb{Z}$ дифференцированием Фокса будет оператор ∂_+ вида

$$\partial_+(g) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{|g|-1}\mathrm{sgn}(g)\mathbf{k}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{k}$ – базисный элемент групповой алгебры $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$.

Доказательство. Мы берем в качестве функции $p \in \mathbb{P}_0$ индикатор множества натуральных (включая 0) чисел.

Обобщим этот пример, пользуясь доказательством теоремы 1, чтобы получить явную конструкцию для описания таких дифференцирований.

Для группы G с числом концов более одного, $e(G) > 1$, возьмем конечный подграф Q в графе Кэли $\mathrm{Cayley}(G)$. Зафиксируем E – *бесконечную* компоненту связности графа $\mathrm{Cayley}(G) \setminus Q$. Обозначим через P_E функцию-индикатор множества E. Тогда соответствующий ей характер χ_E будет локально финитным, а соответствующее ему дифференцирование Фокса ∂_E будет задаваться формулой

$$\partial_E(g) = \sum_{h \in G} (P_E(gh) - P_E(h))gh. \tag{4.5}$$

По теореме 2 в правой части последней формулы для каждого g лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Объединяя вышесказанное, получаем следующую теорему, описывающую пространство дифференцирований Фокса $\mathscr{F}(G)$.

Теорема 3. *Дифференцирования Фокса $\mathscr{F}(G)$ имеют следующие порождающие*:

- *если $e(G) \in \{0; 1\}$, то они порождаются операторами для некоторого $u \in \mathbb{Z}[G]$, имеющими на образующих вид*

$$\partial_u(g) = u - gu.$$

- *если $e(G) > 1$, то кроме указанных дифференцирований, также добавляются к системе образующих операторы вида*

$$\partial_E(g) = \sum_{h \in G} (P_E(gh) - P_E(h))gh,$$

где E – бесконечная компонента связности графа $\mathrm{Cayley}(G) \setminus Q$ для некоторого конечного подграфа Q, P_E – функция-индикатор множества E.

Автор благодарен профессору А. С. Мищенко за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, А. И. Штерн, “Деривации групповых алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:6 (2016), 65–78.

[2] А. А. Арутюнов, “Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 28–41.

[3] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 3–29.

[4] A. S. Mischenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology”, *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, Trends Math., Birkhauser, Cham, 2021, 263–272.

[5] А. А. Арутюнов, “О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 305–317.

[6] R. H. Fox, "Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring", *Ann. of Math.* (2), **57** (1953), 547–560.

[7] R. H. Crowell, R. G. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Company, Boston, MA, 1963.

[8] G. Massuyeau, V. Turaev, "Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2014**:1 (2014), 1–64.

[9] А. Н. Кабанов, В. А. Романьков, "Строго неручные примитивные элементы свободной метабелевой алгебры Ли ранга 3", *Сиб. матем. журн.*, **50**:1 (2009), 82–95.

[10] V. A. Roman'kov, "Superpositions of free Fox derivations", *ПДМ*, 2022, № 56, 28–32.

[11] A. V. Alekseev, A. A. Arutyunov, S. Silvestrov, *On (σ, τ)-derivations of group algebra as category characters*, arXiv: 2008.00390.

[12] J. A. Álvarez López, A. Candel, *Generic Coarse Geometry of Leaves*, Lecture Notes in Math., **2223**, Springer, Cham, 2018.

[13] A. A. Arutyunov, L. M. Kosolapov, "Derivations of group rings for finite and FC groups", *Finite Fields Appl.*, **76** (2021), 101921.

[14] A. A. Arutyunov, A. V. Alekseev, "Complex of n-categories and derivations in group algebras", *Topology Appl.*, **275** (2020), 107002.

[15] H. Freudenthal, "Über die Enden topologischer Räume und Gruppen", *Math. Z.*, **33**:1 (1931), 692–713.

[16] J. R. Stallings, "On torsion-free groups with infinitely many ends", *Ann. of Math.* (2), **88** (1968), 312–334.

[17] J. R. Stallings, *Group Theory and Three-Dimensional Manifolds*, Yale University Press, New Haven,, 1971.

[18] R. Geoghegan, *Topological Methods in Group Theory*, Graduate Texts in Math., **243**, Springer-Verlag, New York, 2008.

[19] G. Peschke, "The theory of ends", *Nieuw Arch. Wisk.* (4), **8**:1 (1990), 1–12.

[20] Y. Ma, J. Dydak, *Coarse Freundenthal Compactification and Ends of Groups*, arXiv: 2102.05002.

[21] K. Mann, K. Rafi, *Large Scale Geometry of Big Mapping Class Groups*, arXiv: 1912.10914.

[22] G. A. Niblo, "A geometric proof of Stallings' theorem on groups with more than one end", *Geom. Dedicata*, **105** (2004), 61–76.

[23] M. J. Dunwoody, "Cutting up graphs", *Combinatorica*, **2**:1 (1982), 15–23.

[24] W. R. Scott, *Group Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[25] Ю. М. Горчаков, *Группы с конечными классами сопряженных элементов*, Наука, М., 1978.

[26] H. Hopf, "Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen", *Comment. Math. Helv.*, **16** (1944), 81–100.

[27] A. A. Arutyunov, *A Combinatorial View on Derivations in Bimodules*, arXiv: 2208.05478.

А. А. Арутюнов
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Московская область, г. Долгопрудный
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

Поступило
09.01.2023
Принято к публикации
15.03.2023