

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. G. Ponomarev, B. L. Rozhdestvenskii,
M. I. Stoynev, Navier–Stokes simulation of turbulent flows
for various external conditions, *Mat. Model.*, 1996, Volume 8,
Number 10, 35–44

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

February 19, 2025, 05:37:59



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВНЕШНИХ УСЛОВИЯХ

© С.Г. Пономарев, Б.Л. Рождественский, М.И. Стойнов

Институт математического моделирования РАН

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17386) и
Международного научного фонда Сороса (код проекта MKS300)

На основе численного интегрирования уравнений Навье-Стокса моделируются нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале. Рассматриваются периодические по однородным координатам решения. Сравниваются интегральные характеристики течений, рассчитанных при различных внешних условиях: а) фиксированный средний по пространству градиент давления, б) постоянный расход жидкости через поперечное сечение канала, в) заданное значение средней по однородным координатам скорости течения на оси канала.

NAVIER-STOKES SIMULATION OF TURBULENT FLOWS FOR VARIOUS EXTERNAL CONDITIONS

S.G. Ponomarev, B.L. Rozhdestvensky, M.I. Stoynov

§1. Постановка задачи и численный алгоритм

Исследуются решения уравнений Навье-Стокса (Н.С.)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p / \rho + R^{-1} \Delta \mathbf{V}, \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\mathbf{V}(x, y, \pm 1, t) = 0, \quad \mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}(x+X, y, z, t) = \mathbf{V}(x, y+Y, z, t),$$

$$\mathbf{V}(x, y, z, 0) = \mathbf{V}_0(x, y, z),$$

где $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – поле скорости течения, p – давление, ρ – плотность жидкости. Решения системы (1) описывают течения жидкости в бесконечном плоском канале $K = \{ \mathbf{x}: x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in [-1, 1] \}$. Уравнения (1) записаны в безразмерном виде: здесь и ниже в качестве единицы длины используется полуширина канала h , в качестве единицы скорости – величина скорости ламинарного течения Пуазейля на оси канала $z=0$. В выбранных единицах ламинарное течение описывается формулами $U_L(z) = 1 - z^2$, $p_L(x) = -2/Rx$, $R = U_L(0)h/\nu = 1/\nu$, где ν – коэффициент кинематической вязкости.

Известно, что (1) является недоопределенной системой (см. [1],[2] [3]). В уравнениях для основного течения, получающихся осреднением по x и y уравнений Навье-Стокса, появляется неизвестный зависящий от времени вектор среднего градиента давления

$$P = P(t) = \langle \nabla p \rangle_{xyz}(t) = \frac{1}{2XY} \int_0^X \int_0^Y \int_{-1}^1 \nabla p(x, y, z, t) dz dy dx.$$

Для однозначного определения этой величины к системе уравнений (1) необходимо добавить дополнительное (внешнее) условие, определяющее режим течения. Обычно используется одно из следующих условий:

$$P = (-2/R, 0, 0), \quad (2a)$$

$$Q = (4/3, 0, 0), \quad (2б)$$

$$\langle V(x, y, 0, t) \rangle_{xy} = (1, 0, 0), \quad (2в)$$

где $Q = Q(t) = \langle V \rangle_{xyz}$ - вектор расхода жидкости. При заданном числе R нестационарные решения уравнений (1), вычисленные при различных внешних условиях (2), не совпадают друг с другом. Для сравнения течений, полученных при различных внешних условиях, удобно ввести следующие величины:

$$R_p(t) = |P(t)| h^3 / 2\nu^2 \rho, \quad R_Q(t) = 3|Q(t)| h / 4\nu, \quad R_c(t) = |\langle V(x, y, 0, t) \rangle_{xy}| h / \nu. \quad (3)$$

Для стационарного решения $U_L(z)$, $p_L(x)$ все три величины в (3) постоянны, равны между собой и совпадают с числом R , введенным в (1). В нестационарном же случае лишь одно из трех чисел не зависит от времени, совпадает с числом R и может использоваться в качестве критерия подобия. Например, в задаче с фиксированным расходом (условие (2б)) в качестве критерия подобия должно использоваться число Рейнольдса $R = R_Q$, числа же R_p и R_c являются функциями времени. В этом случае выход течения на статистически стационарный режим определяется по стабилизации R_p и R_c . То есть, на конечной стадии развития течения $R_p(t)$, $R_c(t)$ практически постоянны, либо незначительно (с амплитудой не более 1%) колеблются вблизи некоторых средних значений.

Для интегрирования уравнений (1) использовался численный алгоритм, изложенный в [4]. Приближенное решение представляется в виде

$$V(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^M A_{mn}(z, t) \cos(\alpha_0 mx) + \sum_{m=1}^M B_{mn}(z, t) \sin(\alpha_0 mx) \right) \cos(\beta_0 ny) + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=0}^M C_{mn}(z, t) \cos(\alpha_0 mx) + \sum_{m=1}^M D_{mn}(z, t) \sin(\alpha_0 mx) \right) \cos(\beta_0 ny), \quad (4)$$

где $A_{mn}(z, t)$, $B_{mn}(z, t)$, $C_{mn}(z, t)$, $D_{mn}(z, t)$ при любом фиксированном t являются алгебраическими полиномами степени не выше L по переменной z . Для дискретизации по x используется метод Галеркина, по z - метод коллокации (в качестве узлов коллокации использовались нули многочлена Чебышева $T_{L+1}(z)$). Дискретизация по времени проводится по неявной, 2-го порядка точности схеме типа Кранка-Николсона. Количество базисных функций (числа M , N) в представлении (4) выбиралось достаточно большим, чтобы обеспечить малость отбрасываемых в галеркинской процедуре гармоник. Это определялось

по поведению старших фурье-гармоник $E_{mn} = 1/2 \langle A_{mn}^2 + B_{mn}^2 + C_{mn}^2 + D_{mn}^2 \rangle$. Уравнения интегрировались до выхода течения на статистически-стационарный режим (вторичное течение) с установившимися значениями интегральных характеристик течения (расхода, энергии пульсаций и др.). Цель расчетов – сопоставление вторичных течений, полученных при различных внешних условиях (2), а также сравнение времени выхода на статистически-стационарный режим.

§2. Результаты расчетов

Одномерная задача. Пусть решения уравнений (1) зависят только от переменных z, t и $V = (u, 0, 0)$. Тогда

$$u(z, t) = 1 - z^2 + \hat{u}(z, t), \quad \hat{u}(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{u}_i(z) \exp(-\lambda_i t), \quad \lambda > 0,$$

где $\hat{u}_i(z)$ – решения уравнения:

$$-\nabla p / \rho + R^{-1} u'' = 0.$$

Очевидно любое начальное возмущение $\hat{u}(z, 0)$ экспоненциально затухает при $t \rightarrow \infty$. Для любой из приведенных постановок задачи можно указать минимальный декремент затухания λ :

$$\lambda^a = \frac{\pi^2}{4R}, \quad \lambda^{b,v} = \frac{\pi^2}{R}$$

в случае условий (2а) и (2б), (2в) соответственно. Следовательно, отправившись от произвольных начальных данных, мы вправе ожидать более быстрый выход на стационарное решение при использовании условий (2б), (2в), чем при условии (2а). Это хорошо продемонстрировано на рис.1а. Здесь изображены зависимости $R_Q(t), R_p(t)$ для расчетов с условием (2а), (2б) соответственно и обе величины $R_Q(t), R_p(t)$ для расчета с условием (2в). В первом случае постоянно $R_p = R$, во втором $R_Q = R$, в третьем $R_c = R$. Во всех трех случаях в начальный момент задавалось распределение

$$V_0(z) = \left(1 - z^2 + 0.1((1 - z^2)^2 - 2.5(1 - z^2)^3 + 1.5(1 - z^2)^4), 0, 0 \right) \text{ и } R = 5000.$$

Для этих же расчетов на рис. 1б изображены графики зависимости энергии возмущений $E(t) = 1/2 \langle |V_1 - (1 - z^2)|^2 \rangle_{xyz}$ от времени. В расчетах с условиями (2б) и (2в) величина $E(t)$ выходит на постоянное значение $E = 8/15$ за одинаковое время. Напротив, для задачи (1) с условиями (2а) выход происходит на четверо большем интервале времени.

Двумерная задача. Поле скорости V зависит от двух пространственных координат x, z ($\alpha_0 \neq 0$) и имеет две ненулевые компоненты $V = (u, 0, w)$. Мы рассмотрели как коротковолновые ($\alpha_0 = 1.25$), так и длинноволновые ($\alpha_0 = 0.125$) вторичные решения.

На рис. 2а показано изменение $R_Q(t)$ в коротковолновом расчете №1. Моделирование проводилось при условии (2а) и $R = R_p = 6000$. Начальное поле скорости имело вид

$$V_0(x, z) = \left(1 - z^2 + f'(z) / \alpha_0 \cdot \cos(\alpha_0 x), 0, f(z) \cdot \sin(\alpha_0 x) \right),$$

$$f(z) = 0.08 \cdot (1 + z) \cdot (1 - z^2)^2. \tag{5}$$

Течение начинает выходить на режим при $t \approx 3000$ ($t \approx 0.5R_p$), и для $t > t^* \approx 7000$

($t^* \approx R_p$) $R_Q(t)$ практически не меняется:

$$R_Q = R_Q(t) = 4063.0 \pm 0.1.$$

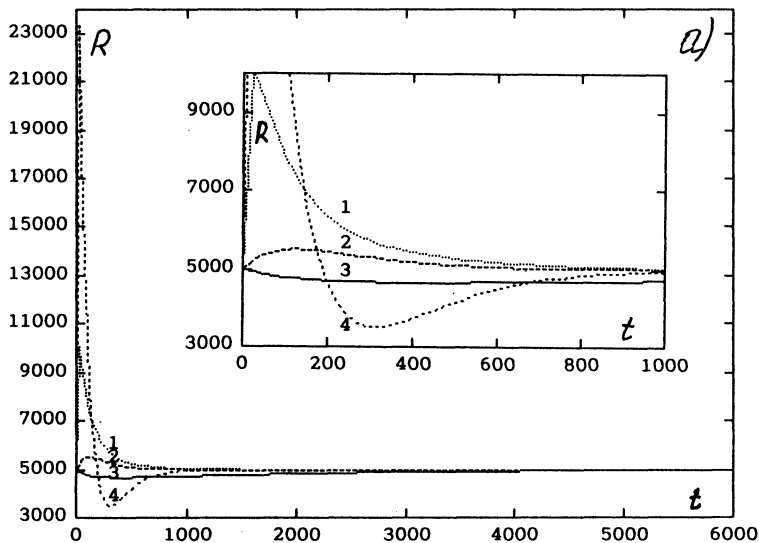


Рис.1а. Зависимости $R_Q(t)$, $R_p(t)$ для одномерных расчетов. 1 — $R_p(t)$ для расчета с условием (2б), 3 — $R_Q(t)$ для расчета с условием (2а), 2,4 — $R_p(t)$, $R_Q(t)$ для расчета с условием (2в)

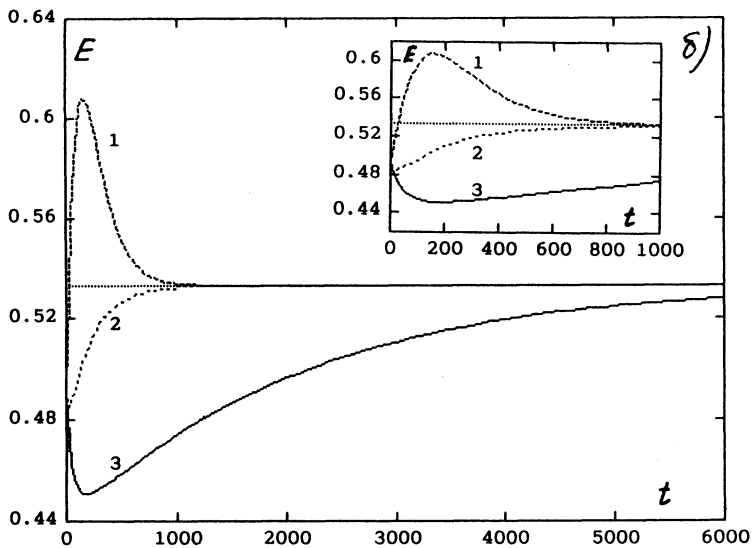


Рис.1б. Зависимости $E(t)$ для одномерных расчетов. 1 — $E(t)$ для расчета с условием (2б), 3 — $E(t)$ для расчета с условием (2а), 2 — $E(t)$ для расчета с условием (2в)

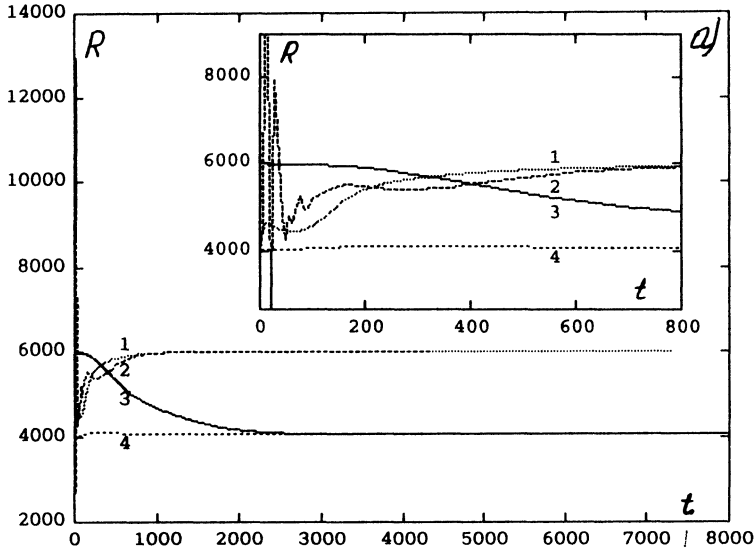


Рис.2а. Зависимости $R_Q(t)$, $R_p(t)$ для двумерных расчетов. 1 — $R_p(t)$ для расчета с условием (2б), 3 — $R_Q(t)$ для расчета с условием (2а), 2, 4 — $R_p(t)$, $R_Q(t)$ для расчета с условием (2в)

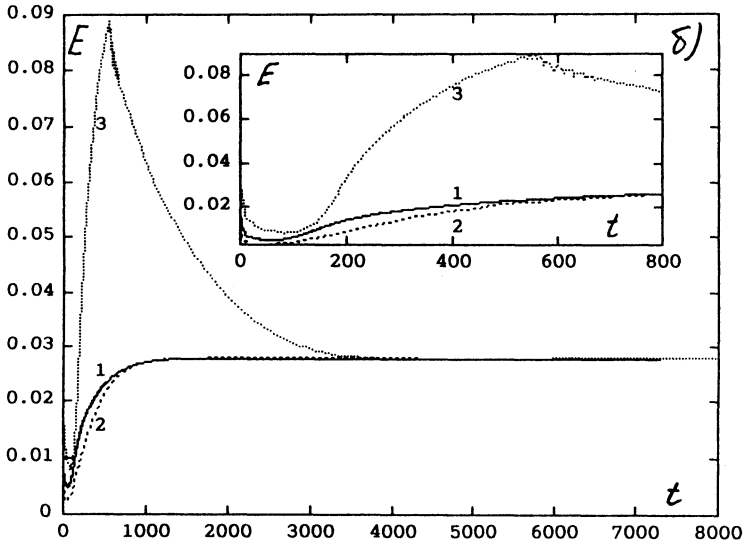


Рис.2б. Зависимости $E(t)$ для двумерных расчетов. 1 — $E(t)$ для расчета с условием (2б), 3 — $E(t)$ для расчета с условием (2а), 2 — $E(t)$ для расчета с условием (2в)

На этом же рисунке показано изменение величины $R_p(t)$ в расчете № 2, выполненном при условии (2б) (фиксировано $R=R_Q=4063$) и начальных данных (5). За время $t^* \approx 3000$ ($t^* \approx R_Q$) течение вышло на режим при значении $R_p = 6000.0 \pm 0.1$.

На конечной стадии расчетов №1, №2 величина $R_c(t) = 4170$. Интегрирование в расчете №3 выполнялось при условии (2в), т.е. при постоянном $R = R_c = 4170$ и начальных данных (5). На рис.2а изображены графики $R_p(t)$ и $R_Q(t)$. Момент выхода на режим определяется по наиболее медленно меняющейся величине $R_Q(t)$ и $t^* \approx R_Q$. Для этих же расчетов на рис.2б изображены графики зависимости энергии возмущений $E(t)$ от времени.

В данном случае выход течения на статистически стационарный режим происходит быстрее, если при численном интегрировании уравнений Навье-Стокса используется условие (2б) или (2в). Этот вывод справедлив только при условии, что начальные данные имеют вид (5) (средний по x профиль скорости течения совпадает с $1 - z^2$), и очевидно, что изменение вида начальных данных может существенно повлиять на время выхода течения на вторичный режим.

Следует отметить, что в расчетах с условиями (2б) и (2в) наблюдается резкое изменение решения на начальной стадии развития. Это приводит к существенным ограничениям на амплитуды начальных возмущений. Значит, интегрируя уравнение (1) при постоянном P , нам легче получить вторичное решение, чем при использовании условий (2б) и (2в), хотя выход на статистически стационарный режим будет более долгим.

Каждому вторичному течению соответствует точка на плоскости (R_Q, R_p) – рис.3. Точки, лежащие на биссектрисе 1, отвечают ламинарным режимам течения. Только выше прямой 1 находятся точки, соответствующие вторичным течениям. Точка B на плоскости (R_Q, R_p) имеет координаты (3662.5, 5000). Коротковолновое течение с такими параметрами можно получить, начав расчет при фиксированном градиенте давления и начальных данных вида (5) (т.е. $R = R_p = 5000$) – точка A , либо при фиксированном расходе жидкости: постоянно $R = R_Q = 3662.5$, соответственно точка C . Таким образом, в точку B можно попасть, двигаясь из точки A при $R = R_p$, или из C при $R = R_Q = 3662.5$. В обоих случаях мы получаем одно и то же течение. Так как это течение периодическое по времени с периодом T , то можно указать для него число Струхала:

$$Sh = h^3 / (QT) = 0.35.$$

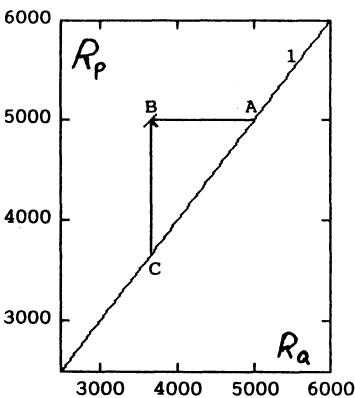
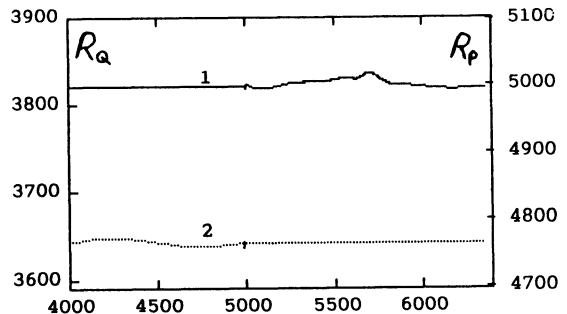


Рис.3.

Рис.4. Для двумерного расчета $R_p(t)$ – 1, $R_Q(t)$ – 2. До $t=5000$ выполняется условие (2а), дальше (2б)

Пусть мы получили вторичное течение при фиксированном расходе жидкости и $R = R_Q$. Для этого течения $R_p(t)$ практически постоянно и равно R_p^* .

Используем теперь полученное поле скорости в качестве начальных данных для расчета с постоянным градиентом давления и $R=R_p^*$. Как показывают результаты расчетов все характеристики течения остаются неизменными. Аналогичные результаты получатся если провести расчет с фиксированным $R=R_c^*$.

Таким образом, можно считать, и это подтверждается множеством экспериментов при различных R , α_0 , что любое коротковолновое течение определяется парой чисел (R_p, R_Q) (либо (R_p, R_c) , (R_c, R_Q)) независимо от способа получения. Это, очевидно, является следствием простоты рассматриваемых течений, поле скорости которых представляется в виде основного течения и бегущей волны [5,6].

Рассмотрим длинноволновый случай ($\alpha_0 \ll 1$). Поле скорости таких решений уже не является периодической функцией времени и, как правило, та или иная интегральная характеристика течения не выходит на постоянное значение, а испытывает незначительные колебания вблизи своего среднего значения. Поэтому, сравнивая такие величины, мы всегда подразумеваем наличие некоторой погрешности при определении их значений. Также следует иметь ввиду, что отправившись от одних и тех же значений числа Рейнольдса и α_0 , мы можем получить несколько различных вторичных течений (см [6]).

Вторичное течение №5 было получено при условии (2а) и $R=R_p=5000$. На интервале времени $4000 < t < 5000$ величина R_Q незначительно колебалась вблизи средней величины $R_Q^*=3644$. Поле скорости этого течения при $t=5000$ взяли в качестве начальных данных для расчета с условием (2б), зафиксировав $R_Q=R=3644$. Численное интегрирование на интервале времени $5000 < t < 7000$ показало, что течение практически не изменилось. Об этом мы судим не только по величине R_p (рис.4), но и по другим пространственно-временным характеристикам (энергия возмущений $E(t)$, среднеквадратичные пульсации скорости, и т.д.).

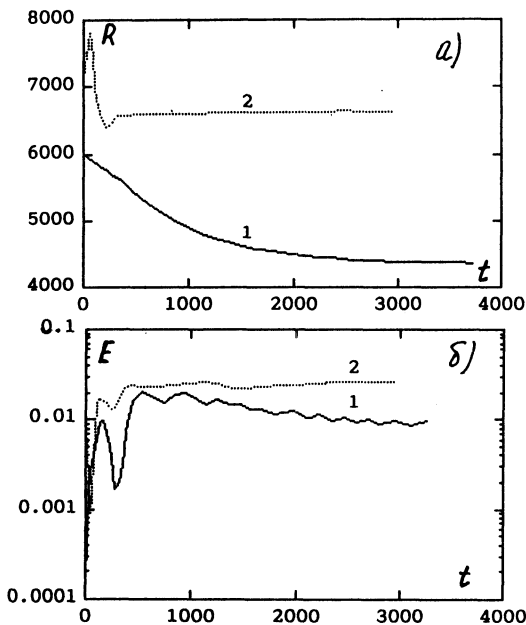


Рис.5. Зависимости $R_Q(t)$, $R_p(t)$, $E(t)$ для двумерных длинноволновых расчетов. 1 — $R_Q(t)$, $E(t)$ для расчета с условием (2а), 2 — $R_p(t)$, $E(t)$ для расчета с условием (2б).

Если судить о времени выхода течения на статистически стационарный режим по изменению величин R_Q , R_p (рис.5а), то в случае использования условия (2б) (расчет №7) мы имеем более быстрый выход на режим, чем в случае (2а) (расчет №6). Однако наблюдение за другой характеристикой течения, например: $E(t)$ (рис. 5б), показывает, что выход течения на статистически стационарный режим происходит в обоих случаях примерно за одно и то же время. Следует отметить, что вторичные течения №7 и №6, которые здесь сравнивались, различны, хотя они получены при одних и тех же значениях R_p , α_0 . Отметим, что факт неединственности длинноволновых течений был продемонстрирован ранее в работе [6].

Трехмерная задача. В этом случае $V=V(x,y,z,t)$, и все три компоненты u , v , w вектора V отличны от нуля. В отличие от двумерных, в трехмерных расчетах, как правило, все интегральные характеристики изменяются во времени.

Так, расчет №9 проводился при фиксированном $R=R_Q=1999$, $\alpha_0=1.25$, $\beta_0=2$. Течение вышло на статистически стационарный режим при $t^* \approx 1500$. Значение величины $R_p(t)$ колебалось вблизи 5000, и $R_c(t) \approx 1600$. На рис.6а изображены зависимости $R_Q(t)$, $R_p(t)$ для трехмерных расчетов №8 (постоянно $R=R_p$), №9, №10 (постоянно $R=R_c$) (α_0 , β_0 - те же). Для этих же расчетов на рис.6б представлены зависимости $E(t)$. Более быстрый выход течений на статистически стационарный режим наблюдается в расчетах, которые проводились при условии (2б) или (2в).

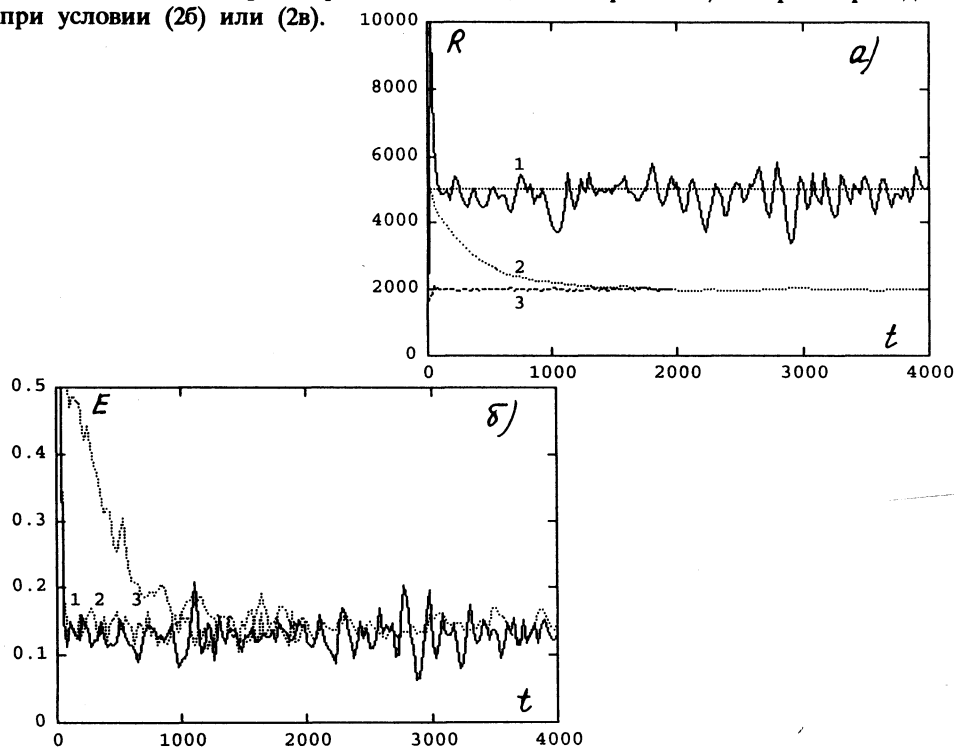


Рис.6. Зависимости $R_Q(t)$, $R_p(t)$, $E(t)$ для трехмерных расчетов. 1 - $R_p(t)$, $E(t)$ для расчета с условием (2б), 2 - $R_Q(t)$, $E(t)$ для расчета с условием (2в), 3 - $R_Q(t)$, $E(t)$ для расчета с условием (2а).

Нестационарные решения, полученные в расчетах №8, №9, №10, различны, но они, по-видимому, описывают одно и то же вторичное течение, так как их интегральные характеристики совпадают. Так, на рис.7 изображены графики среднеквадратичных пульсаций скорости

$$u' = \sqrt{\langle u^2 \rangle_{xy}(z)} / u_T, \quad v' = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{xy}(z)} / u_T, \quad w' = \sqrt{\langle w^2 \rangle_{xy}(z)} / u_T,$$

(черта над величиной - усреднение по времени, u_T - динамическая скорость). Видно, что указанные расчеты дают одинаковые результаты.

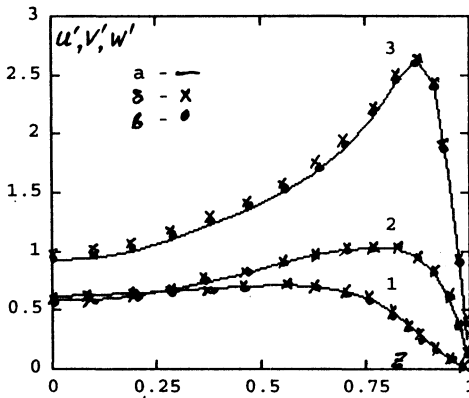


Рис.7. Среднеквадратичные пульсации скорости для трехмерных расчетов №8, №9, №10, 1 - u' , 2 - v' , 3 - w' а) - расчет №8 с условием (2а), б) - расчет №9 с условием (2б), в) - расчет №10 с условием (2в)

Таким образом, двумерные и трехмерные статистически стационарные решения (1), рассчитанные при различных внешних условиях (2а), (2б), (2в), имеют одинаковые интегральные характеристики, если им отвечает одна и та же комбинация чисел (R_p, R_Q) (либо (R_p, R_c), (R_c, R_Q)). В этом смысле эти решения определяют одно и то же течение.

Время выхода t^* решения на статистически стационарный режим пропорционально величине R ; следовательно, t^* меньше в расчетах с условиями (2б), (2в), так как для (2а) $R=R_p$, для (2б) $R=R_Q$, для (2в) $R=R_c$ и $R_p > R_c \sim R_Q$. С другой стороны, при использовании (2б), (2в) необходимо более тщательно подбирать начальные данные, так как в таких расчетах на начальной стадии развития происходит резкое изменение поля скорости, что может приводить к неудовлетворительным результатам.

В заключении авторы выражают глубокую благодарность с.н.с. ИММ РАН Приймаку Владимиру Георговичу за полезные замечания, высказанные по результатам этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рожественский Б.Л., Симакин И.Н.* // Докл. АН СССР 1982, т.292, №6, с.1020-1027.
2. *Herbert T.* // AIAA J., 1980, v.18, №3, p.243-248.
3. *Рожественский Б.Л., Симакин И.Н.* // Ж. Вычисл. матем. и Матем. Физ., 1985, т.25, №1, с.96-121.
4. *Рожественский Б.Л., Стойнов М.И.* // Препринт № 119. – М.: ИПМатем. им.М.В.Келдыша АН СССР, 1987.
5. *Пономарев С.Г., Приймак В.Г., Рожественский Б.Л.* // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ., 1988, т.28, № 9, с.1354-1366.
6. *Пономарев С.Г., Рожественский Б.Л., Стойнов М.И.* // Математическое моделирование, 1994, т.6, № 5, с.3-14.

Поступила в редакцию
21.12.95.