



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. M. Badkov, Approximation of functions by the
Fourier–Jacobi sums,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1966, Volume 167,
Number 4, 731–734

<https://www.mathnet.ru/eng/dan32183>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

April 29, 2025, 22:26:16



В. М. БАДКОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1965)

Пусть $\{\hat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{0^\infty}$ — ортонормированная на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ с весом $n(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ($\alpha, \beta > -1$) система многочленов Якоби, а $R_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = f(x) - S_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$ — n -й остаток ряда Фурье — Якоби функции $f(x)$, принадлежащей классу $W^{(r)}H^{(\gamma)}$ всех функций, r -я производная ($r \geq 0$) которых на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ удовлетворяет условию Липшица порядка γ ($0 < \gamma \leq 1$) с константой, равной единице.

В настоящей заметке при α и $\beta \geq 0$ получена оценка величины

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} \|R_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)\|_C,$$

где $\|u(x)\|_C = \max_{-1 \leq x \leq 1} |u(x)|$. Кроме того, для случая ультрасферических многочленов ($\alpha = \beta = \lambda - 1/2$) доказывается, что полученная оценка является точной в смысле порядка.

В дальнейшем $q = \max(\alpha, \beta)$ и все постоянные C_1, \dots не зависят ни от x , ни от n , ни от функции $f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}$.

Теорема 1. Пусть $r \geq 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $r + \gamma > 1/2$. Если $\alpha, \beta > 0$, $q \geq 1/2$, то справедлива оценка

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} \|R_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)\|_C \leq \frac{C_1}{(n+1)^{r+\gamma-q-1/2}}, \quad (1)$$

а если $\alpha, \beta > 0$, $q < 1/2$ или если $\alpha\beta = 0$ ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0$), то

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} \|R_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)\|_C \leq \frac{C_2 \ln(n+2)}{(n+1)^{r+\gamma-q-1/2}}. \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть $\alpha > -1/2$, $r \geq 0$, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда найдется постоянная $C_3 > 0$ такая, что

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} |R_n^{(\alpha, \alpha)}(f, 1)| \geq \frac{C_3}{(n+1)^{r+\gamma-\alpha-1/2}}. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью усиленной теоремы Джексона (см. (4), стр. 276), в силу которой при любом $n > r$ для всякой функции $f(x) \in W^{(r)}H^{(\gamma)}$ можно построить алгебраический многочлен $Q_n(x)$ степени $\leq n$ такой, что

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{C_4}{n^{r+\gamma}} \left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\gamma} + \frac{1}{n^{r+\gamma}} \right] \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} |R_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)| &\leq |f(x) - Q_n(x)| + \int_{-1}^1 |f(t) - Q_n(t)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, t)| n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{C_5}{(n+1)^{r+\gamma}} + \frac{C_6}{(n+1)^{r+\gamma}} \int_{-1}^1 (1-t)^{r/2+\gamma/2+\alpha} (1+t)^{r/2+\gamma/2+\beta} |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, t)| dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_7}{(n+1)^{2(r+\gamma)}} \int_{-1}^1 |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, t)| n(t) dt = \\
& = \frac{C_5}{(n+1)^{r+\gamma}} + \frac{C_6}{(n+1)^{r+\gamma}} I_1 + \frac{C_7}{(n+1)^{2(r+\gamma)}} I_2,
\end{aligned} \quad (4)$$

где

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(x, t) = \sum_{k=0}^n \hat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x) \hat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(t).$$

Для интеграла I_2 имеем

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq \left\{ \int_{-1}^1 |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, t)|^2 n(t) dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-1}^1 n(t) dt \right\}^{1/2} = \\
& = \left\{ \sum_{k=0}^n |\hat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-1}^1 n(t) dt \right\}^{1/2} \leq C_8 \left\{ \sum_{k=0}^n (k+1)^{2q+1} \right\}^{1/2} \leq C_9 (n+1)^{q+1}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Из оценки (5) следует, что последнее слагаемое в (4) есть $O((n+1)^{q+1-2r-2\gamma})$ равномерно по x и f .

Оценка интеграла I_1 в случае $\alpha, \beta > 0, q \geq 1/2$ проводится при помощи формулы

$$\begin{aligned}
P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) & = \frac{1}{(1-x)^{\alpha/2+1} (1+x)^{\beta/2+1}} \times \\
& \times \left\{ \int_{-1}^x (1-\tau)^{\alpha/2} (1+\tau)^{\beta/2} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - 2 \right) \right] P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(\tau) d\tau - \right. \\
& \left. - 2n \int_{-1}^x (1-\tau)^{\alpha/2} (1+\tau)^{\beta/2} P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(\tau) d\tau \right\} \quad (\alpha, \beta > 0),
\end{aligned} \quad (6)$$

следующей из дифференциального уравнения для многочленов Якоби. Из этой формулы вытекает, что при любых α и $\beta > 0$, для которых $q \geq 1/2$, и при $-1 < t < 1$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{x-t} \right| \leq \frac{C_{10} (n+1)^{q+1/2}}{(1-t)^{\alpha/2+1} (1+t)^{\beta/2+1}} \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (7)$$

в котором постоянная C_{10} не зависит ни от x , ни от t , ни от n . Воспользовавшись формулой Кристоффеля — Дарбу ((2), стр. 83) и неравенством (7), при α и $\beta > 0, q \geq 1/2$ получим

$$\begin{aligned}
I_1 & \leq C_{11} (n+1)^{q+1/2} \times \\
& \times \int_{-1}^1 (1-t)^{(r+\gamma+\alpha-2)/2} (1+t)^{(r+\gamma+\beta-2)/2} [|\hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(t)| + |\hat{P}_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t)|] dt.
\end{aligned} \quad (8)$$

Но интеграл в неравенстве (8) ограничен при $n \rightarrow \infty$ (см. (2), стр. 180). Из неравенств (4), (5) и (8) следует справедливость оценки (1).

В случаях, когда $\alpha, \beta > 0, q < 1/2$ или когда $\alpha\beta = 0$ ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0$), интеграл I_1 оценивается при помощи приема, примененного П. К. Суетиным (5) для многочленов Лежандра ($\alpha = \beta = 0$), и доказанного С. Н. Бернштейном (3) неравенства

$$|\hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)| (1-x)^{\alpha/2+1/4} (1+x)^{\beta/2+1/4} \leq C_{12} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

При доказательстве теоремы 2 можно ограничиться рассмотрением функций $f(x) \in W^{(r)}H^{(v)}$, для которых $f(1) = f'(1) = \dots = f^{(r)}(1) = 0$.

Имеем для любого $\lambda > 0$ и $0 < \theta < \pi$

$$(\sin \theta)^{2\lambda-1} P_n^{(\lambda)}(\cos \theta) = \frac{2^{2-2\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu n}^{(\lambda)} \sin(n+2\nu+1)\theta, \quad (9)$$

$$f_{0n}^{(\lambda)} = 1; \quad f_{\nu n}^{(\lambda)} = \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\dots(\nu-\lambda)}{\nu!} \times \\ \times \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+\nu)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)\dots(n+\lambda+\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

В случае нецелого λ эта формула имеется у Г. Сегё (2). Пользуясь равномерной сходимостью по λ ряда в (9), можно доказать формулу (9) для натурального $\lambda = k$, причем $f_{\nu n}^{(k)} = 0$, если $\nu \geq k$. С помощью представления (9) выражение для остатка $R_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(f, 1) = R_n^{(\lambda)}$ при любых $\lambda > 0$ приводится к виду

$$R_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} \left\{ \int_0^{2\pi} f(\cos \psi) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu n}^{(\lambda)} \left[\cos(n+2\nu+1)\psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\lambda}{n+\nu+1+\lambda}\right) \cos(n+2\nu+2)\psi \right] d\psi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} f(\cos \psi) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu n}^{(\lambda)} \frac{2\lambda}{n+\nu+1+\lambda} \frac{\sin(n+2\nu+3/2)\psi}{2\sin\psi/2} d\psi \right\}, \quad (10)$$

где $a_n^{(\lambda)} = \Gamma(n+2\lambda+1) [2^{2\lambda} \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1/2) \Gamma(n+\lambda+1)]^{-1}$.

Применение r -кратного интегрирования по частям и преобразования Абеля в первом интеграле из (10), а также применение оценки Джексона (4) для n -го остатка ряда Фурье 2π -периодической дифференцируемой функции при оценке второго интеграла из (10) позволяет привести выражение (10) к виду

$$R_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} \left\{ \frac{(-1)^r 2^{\lambda+1}}{(n+1)^r} \int_0^{\pi} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} + \lambda\right) \psi + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2} \right] \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\psi}{2} \sin^{r+\lambda-1} \psi \cdot f^{(r)}(\cos \psi) d\psi + I_3 \right\}, \quad (11)$$

где

$$I_3 = O\left(\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^{r+\gamma+1}}\right), \quad \text{если } \lambda \geq 1; \\ I_3 = O\left(\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^{r+\gamma+\varepsilon}}\right), \quad \text{если } 0 < \varepsilon < \lambda < 1.$$

Из (11) и того, что

$$\sup_{\varphi(x) \in H^{(\gamma)}} \left| \int_0^{\pi} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} + \lambda\right) \psi + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2} \right] \cos \frac{\psi}{2} \sin^{r+\lambda-1} \psi \cdot \varphi(\cos \psi) d\psi \right|$$

имеет порядок $n^{-\gamma}$, и следует справедливость теоремы 2. Указанный порядок достигается на функции $v_n(x) \in H^{(\gamma)}(-1 \leq x \leq 1)$, определяемой формулой

$$v_n(x) = \frac{1}{2} u_n(x) \operatorname{sign} \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} + \lambda\right) \arccos x + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2} \right] \right\},$$

где $u_n(x) = (x-a)^\gamma$ при $x \in [a, (a+b)/2]$ и $u_n(x) = (b-x)^\gamma$ при $x \in [(a+b)/2, b]$, а $[a, b]$ — любая из частей, на которые сегмент

$[-1, 1]$ делится нулями функции

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} + \lambda \right) \arccos x + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2} \right].$$

Заметим, что в случае, когда $\alpha = \beta$ — целое число, неравенство (1) следует из полученной И. К. Даугаветом ⁽⁶⁾ оценки функции Лебега ряда Фурье — Якоби.

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. ² Г. Сегё, Ортогональные многочлены, М., 1962. ³ С. Н. Бернштейн, О многочленах, ортогональных на конечном отрезке, Соч., 2, Изд. АН СССР, 1954, стр. 7. ⁴ D. Jackson, The Theory of Approximation, N. Y., 1930. ⁵ П. К. Суэтин, ДАН, 158, № 6, 1275 (1964). ⁶ И. К. Даугавет, Сибирск. матем. журн., 6, № 1, 70 (1965).