А. Ю. Плахов, О многочастичных системах на прямой с треугольным отображением рассеяния, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 173–174

## О МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ НА ПРЯМОЙ С ТРЕУГОЛЬНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ РАССЕЯНИЯ

А. Ю. Плахов

1. Рассмотрим гамильтонову систему в $\mathbb{R}^{2n}$ с гамильтонианом

$$H(q, p)=\sum \frac{p_i^2}{2}+\sum V(q_j-q_i). \tag{1}$$

Будем считать, что потенциал взаимодействия $V$ удовлетворяет следующим условиям:

$$V'(x)<0, \quad x\in(0, \infty); \quad V(x)\to+\infty \quad (x\to 0+); \quad \int^{\infty} |V(x)|\,dx<\infty. \tag{2}$$

Известно (см. [1]), что они являются достаточными для существования отображения рассеяния $\sigma$: $(q^-, p^-)\to(q^+, p^+)$, где $q^\pm$, $p^\pm\in\mathbb{R}^n$.

Обозначим $M_n$ множество потенциалов, для которых отображение рассеяния в системе с гамильтонианом (1) имеет треугольный вид, т. е. $p^+=f(p^-)$, $q^+=g(q^-, p^-)$. В случае $n=2$ отображение рассеяния всегда имеет треугольный вид: $q_1^+=q_2^-+\delta(p_1^--p_2^-)$, $q_2^+=q_1^--\delta(p_1^--p_2^-)$, $p_1^+=p_2^-$, $p_2^+=p_1^-$. Таким образом, каждому потенциалу $V$ можно сопоставить функцию $\delta$ (сдвиг фаз), определенную на $(0, \infty)$. Потенциал $V$ принадлежит $M_n$, если и только если для всех $(q^-, p^-)$ $p_i^+=p_{n+1-i}^-(i=1, \ldots, n)$.

Известно, что для всех $n$ потенциалы $a^2x^{-2}$ и $a^2\,\mathrm{sh}^{-2}\,bx$ принадлежат $M_n$ (см. [2]).

В [3] показано, что $V(x)=x^{-2}$, если $V\in M_3$ и $V(x)$ убывает степенным образом: $V(x)=x^{-k}(1+o(1))$ $(x\to+\infty)$, $k>1$.

Теорема 1. *Пусть* $V(x)=e^{-kx+a(x)}\in M_n$, $n\geqslant 3$, $k>0$, $a\in c^2(0, \infty)$, $a'\to 0$, $a''\to 0$ $(x\to+\infty)$. *Тогда* $V(x)=b^2\,\mathrm{sh}^{-2}(kx/2)$ *для некоторого* $b>0$.

Можно показать, что $M_n\supset M_{n+1}$ при $n\geqslant 2$, и поэтому достаточно ограничиться случаем $n=3$.

Движение системы трех частиц определяется шестью параметрами: $q_1^-$, $q_2^-$, $q_3^-$, $p_1^-$, $p_2^-$, $p_3^-$. Фиксировав все параметры, кроме $q_3^-$, рассмотрим движение $\{q_i(t, q_3^-), p_i(t, q_3^-), i=1, 2, 3\}$ при $q_3^-\to+\infty$. Положим $t_1=(3\delta_{12}-q_{12}-q_{13})(p_{12}+p_{13})^{-1}$, $t_2=(3\delta_{13}-q_{13}-q_{23})(p_{13}+p_{23})^{-1}$, $d_1=p_{12}t_1+q_{12}-2\delta_{12}$, $d_2=p_{32}t_2+q_{32}+\delta_{13}-\delta_{12}$, где $p_{ij}=p_i^--p_j^-$, $q_{ij}=q_i^--q_j^-$, $\delta_{ij}=\delta(p_{ij})$. На каждом из промежутков $(-\infty, t_1)$, $(t_1, t_2)$, $(t_2, +\infty)$ находим изменение импульса $p_1$.

На $(-\infty, t_1)$ рассмотрим движение $\{\bar q_j(t), \bar p_j(t), j=1, 2\}$ 1-й и 2-й частиц без учета влияния 3-й. Оказывается, что

$$p_1(t_1)=\bar p_1(t_1)+O(V(2d_1(1-\varepsilon)))=p_2^-+p_{12}^{-1}V(d_1)+O(V(2d_1(1-\varepsilon)))$$

при $q_3^-\to+\infty$ для любого $\varepsilon\in(0, 1)$. Далее, поскольку $\{q_i(-t), -p_i(-t), i=1, 2, 3\}$ есть движение с тем же потенциалом и данными рассеяния при $t\to-\infty$ $(q_3^-+\delta_{13}+\delta_{23}$, $q_2^-+\delta_{12}-\delta_{23}$, $q_1^--\delta_{12}-\delta_{13}$, $-p_3^-$, $-p_2^-$, $-p_1^-)$, сразу получаем аналогичную формулу для $p_1(t_2)$. Отсюда

$$p_1(t_2)-p_1(t_1)=-p_{12}^{-1}V(d_1)-p_{23}^{-1}V(d_2)+O(V(2d_1(1-\varepsilon))+V(2d_2(1-\varepsilon))). \tag{3}$$

С другой стороны, изменение импульса $p_1$ на промежутке $(t_1, t_2)$ можно найти по формуле

$$p_1(t_2)-p_1(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}[V'(q_2(t)-q_1(t))+V'(q_3(t)-q_1(t))]\,dt. \tag{4}$$

Заменяем в правой части (4) $q_1(t)$ на $p_2^-t+q_2^-+\delta_{12}$, $q_2(t)$ и $q_3(t)$ на координаты в момент времени $t$ частиц, взаимодействующих с потенциалом $V$ с данными рассеяния при $t\to-\infty$ $(q_1^--\delta_{12}$, $q_3^-$, $p_1^-$, $p_3^-)$, и показываем, что правая часть (4) изменится на $o(V(h))$, где $h=p_{12}p_{13}^{-1}(\delta_{12}+\delta_{13}-q_{13})+(q_{12}-2\delta_{12}-\delta_{13}/2)$. Вычисляя выражение, полученное после замены, находим

$$p_1(t_2)-p_1(t_1)=-p_{12}^{-1}V(d_1)-p_{23}^{-1}V(d_2)+V(h)\,\omega+o(V(h)),\tag{5}$$

где

$$\omega=\frac{4k}{v}\int_0^\infty\left[\operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}q_v\left(\frac{x}{v}\right)\right)-e^{-\delta_{13}}\operatorname{ch}\frac{kx}{2}\right]\operatorname{ch}\frac{\lambda kx}{2}\,dx,\tag{6}$$

$\lambda=(p_{12}-p_{23})/p_{13}$, $v=p_{13}$, $q_v(t)$ — решение уравнения $\dot q^2/2+2V(q)=v^2/2$, $\dot q(0)=0$.

Мы видим, что $\omega$ не зависит от $q_3^-$. Сравнивая правые части (3) и (5) и учитывая, что при некотором $\varepsilon\in(0,1)$ $V(2d_1(1-\varepsilon))+V(2d_2(1-\varepsilon))=o(V(h))$, получаем $\omega=0$. Отсюда с учетом произвольности $\lambda\in(-1,1)$, $v$ выводим, что потенциал имеет вид $b^2\operatorname{sh}^{-2}(kx/2)$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда потенциал $V\in M_n$ продолжается в комплексную окрестность нуля до аналитической функции с алгебраической особой точкой в нуле.

Если $(-q(t),0,q(t))$ — движение в системе с потенциалом $V$, то $(-q(t),q(t))$ есть движение в двухчастичной системе с потенциалом $V(x)+2V(x/2)$. Обозначим $\delta^W(p)$ сдвиг фаз, соответствующий потенциалу, обратному к функции $W$. Отображение $W\to\delta^W$ линейно, $\delta^{W(\alpha y)}(p)=\delta^{W(y)}(\sqrt{\alpha}p)$ для $\alpha>0$ (см. [4]).

Имеем $q_3^+=-\delta^{W_1(y)}(2p)$, где $W_1(y)$ — функция, обратная к $V(x)+2V(x/2)$. С другой стороны, при $V\in M_3$ $q_3^+-q_1^-=-\delta(p_1^--p_2^-)-\delta(p_1^--p_3^-)$ (см. [4]). Отсюда $q_3^+=$ $=-\delta^{W(y)}(p)-\delta^{W(y)}(2p)=-\delta^{W(y/4)+W(y)}(2p)$. Таким образом, $\delta^{W_1(y)}\equiv\delta^{W(y/4)+W(y)}$. Используя результат Мозера [4], получаем $W_1(y)-W(y/4)-W(y)=cy^{-1/2}$ при условии, что $V\in M_3$, $\int^\infty[V(x)]^\theta\,dx<\infty$ $(0<\theta<1)$.

Итак, мы приходим к следующей лемме.

Лемма *Пусть $W(y)$ — функция, обратная к $V(x)$; $V$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда функции $V(x/2)+V(x)/2$ и $W(2y)+W(y/2)+cy^{-1/2}$ взаимно обратны при некотором $c$.*

С помощью этой леммы доказывается

Теорема 2. *Пусть $V[x]\in M_n$, $\int^\infty[V(x))]^\theta\,dx<\infty$, $\theta\in(0,1)$; $V(x)$ совпадает на $(0,\varepsilon)$ с одной из ветвей аналитической функции, имеющей в нуле алгебраическую особую точку. Тогда либо $V(x)=a^2x^{-2}$, либо $V(x)=a^2\operatorname{sh}^{-2}bx$.*

Наметим доказательство этой теоремы. Сначала находим с помощью леммы тип особенности потенциала $V(x)=x^{-k}(1+o(1))$ $(x\to0+)$. Оказывается, что либо а) $k=2$, либо б) $k=1$. В случае а) разложим в степенной ряд функцию $[V(x)]^{-1/2}=x(a_0+$ $+a_1x^{1/m}+a_2x^{2/m}+\ldots)$, $x\in(0,\varepsilon)$. Можно показать, что коэффициенты разложения $a_n$ однозначно определяются значениями $a_0$ и $a_{2m}$. Следовательно, $V(x)=a^2\operatorname{sh}^{-2}bx$ при надлежащем выборе $a$ и $b$, когда $a_{2m}\neq0$, и $V(x)=a^2x^{-2}$, когда $a_{2m}=0$. Случай б) рассматриваем аналогично. Он не дает новых потенциалов.

Автор благодарит А. М. Степина за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гальперин Асимптотическое поведение системы частиц с отталкиванием.— УМН, 1981, 36 : 5, с. 167.

[2] J. Moser. Three integrable hamiltonian systems connected with isospectral deformation.— Adv. Math., 1975, 16, 197—220.

[3] N. G. Himchenko, Ya. G. Sinai. Description of Classical Reflectionless Potentials.— Reports in Math. Phys., 1982.

[4] J. Moser The scattering problem for some particle systems on the line.— Lect. Notes in Math., 1977, 597, 441—463.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 28 декабря 1981 г.