Н. Ю. Косовская, Бимодульная резольвента для алгебр Лю–Шульца, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2005, том 321, 213–223

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

Н. Ю. Косовская

БИМОДУЛЬНАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА ДЛЯ АЛГЕБР ЛЮ–ШУЛЬЦА

1. Введение

Пусть K – произвольное поле. Для ненулевого $\rho \in K$ определим алгебру (см. [1–3])

$$R = R_\rho = K\langle X_0, X_1, X_2\rangle / (\{X_i^2, X_{i+1}X_i + \rho X_i X_{i+1}\}_{i=0,1,2}) \qquad (1.1)$$

(мы всюду дополнительно отождествляем $X_3 \equiv X_0$). Через x_i обозначим классы вычетов X_i. Как легко видеть, R – 8-мерная локальная K-алгебра:

$$R = {}_K\langle 1,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_0x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0x_1x_2\rangle.$$

В [3] была вычислена алгебра Йонеды алгебры R, при этом существенным было предварительное построение минимальной проективной резольвенты (единственного) простого R-модуля.

Пусть $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – обертывающая алгебра алгебры R. Цель этой работы – построение бимодульной резольвенты для алгебры R. Опираясь на некоторые эмпирические наблюдения, мы выдвигаем гипотезу о строении минимальной Λ-проективной резольвенты Λ-модуля R, и затем эту гипотезу доказываем. Резольвенту мы строим как тотализацию некоторого трикомплекса. Технический прием, используемый для доказательства точности, вынесен в отдельное предложение, применимое в более общей ситуации.

2. Трикомплексы

Определение 2.1. *Набор модулей и гомоморфизмов* $B_{\bullet\bullet\bullet} = (B_{ijk}; d', d'', d''')_{i,j,k\in\mathbb{Z}}$, *где* $d', d'', d''' : \bigoplus_{i,j,k\in\mathbb{Z}} B_{ijk} \to \bigoplus_{i,j,k\in\mathbb{Z}} B_{ijk}$, *называется трикомплексом, если выполняются свойства* (*ср.* [4, *стр.* 236])*:*

$$d'(B_{ijk}) \subseteq B_{i-1jk}, \quad d''(B_{ijk}) \subseteq B_{ij-1k}, \quad d'''(B_{ijk}) \subseteq B_{ijk-1}; \qquad (2.1)$$

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00674.

$$d'd' = d''d'' = d'''d''' = 0; \tag{2.2}$$

$$d'd'' + d''d' = 0, \quad d''d''' + d'''d'' = 0, \quad d'''d' + d'd''' = 0. \tag{2.3}$$

Для трикомплекса $B_{\bullet\bullet\bullet}$ положим $T_m = \bigoplus_{i+j+k=m} B_{ijk}$ и $d = d' + d'' + d'''$. Тогда из условий (2.2), (2.3) следует, что (T, d) является цепным комплексом, который называют тотализацией трикомплекса $B_{\bullet\bullet\bullet}$ и обозначают $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet\bullet})$. Трикомплекс $B_{\bullet\bullet\bullet}$ называют неотрицательным, если $B_{ijk} = 0$ для $(i,j,k) \notin \mathbb{N}_0^3$.

Предложение 2.2. *Пусть $B_{\bullet\bullet\bullet}$ – неотрицательный трикомплекс. И пусть выполняются следующие условия:*

(A) (точность в "3-мерной верхушке") Для любого $n \in \mathbb{N}_0$, если $r_{100} \in B_{10n}$, $r_{010} \in B_{01n}$, $r_{001} \in B_{00n+1}$ такие, что $d'(r_{100}) + d''(r_{010}) + d'''(r_{001}) = 0$, то существуют $t_{ijk} \in B_{ijk+n}$, $i+j+k = 2$ такие, что

$$\begin{cases} d'(t_{200}) + d''(t_{110}) + d'''(t_{101}) = r_{100}, \\ d'(t_{110}) + d''(t_{020}) + d'''(t_{011}) = r_{010}, \\ d'(t_{101}) + d''(t_{011}) + d'''(t_{002}) = r_{001}; \end{cases}$$

(B) (точность в "2-мерной верхушке") Для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$, если $r_{10} \in B_{1mn}$, $r_{01} \in B_{0m+1n}$ такие, что $d'(r_{10}) + d''(r_{01}) = 0$, то существуют $t_{ij} \in B_{ijn}$, $i+j = 2$ такие, что

$$\begin{cases} d'(t_{20}) + d''(t_{11}) = r_{10}, \\ d'(t_{11}) + d''(t_{02}) = r_{01}; \end{cases}$$

(C) (точность "горизонталей" $B_{\bullet mn}$) Для любых $l, m, n \in \mathbb{N}_0$, если $r \in B_{l+1mn}$ такой, что $d'(r) = 0$, то существует $t \in B_{l+2mn}$ такой, что $d'(t) = r$.

Тогда комплекс $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet\bullet})$ точен (кроме степени 0).

Доказательство. Разделим доказательство на два шага.

Шаг I (m, n). Вначале, используя только условия (B) и (C), докажем точность (кроме степени 0) $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet n})$. Пусть $r = (r_{ij}) \in \bigoplus_{i+j=m+1} B_{ijn}$ и $(d' + d'')_m(r) = 0$. Хотим доказать, что $r \in \mathrm{Im}(d' + d'')_{m+1}$. Отметим, что n зафиксировано и все d', d'' сужены на $B_{\bullet\bullet n}$. Так как $(d' + d'')_m(r) = 0$, то, в частности, верно равенство $d'(r_{1m}) + d''(r_{0m+1}) = 0$. Следовательно, согласно (B) существуют $t_{ij} \in B_{ij+mn}$, $i + j = 2$ такие, что

$$\begin{cases} d'(t_{20}) + d''(t_{11}) = r_{1m}, \\ d'(t_{11}) + d''(t_{02}) = r_{0m+1}. \end{cases}$$

Возьмем $s = (s_{ab}) \in B_{abn}$, $a + b = m + 2$, где

$$s_{ab} = \begin{cases} t_{ij}, & \text{если } (a,b) = (i, j+m), \text{ где } i + j = 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что у элемента $r' = r - (d' + d'')_{n+1}(s)$ компоненты $(1, m)$ и $(0, m+1)$ равны нулю, $(d' + d'')_m(r') = 0$ и очевидно, что $r \in \operatorname{Im}(d' + d'')_{m+1} \Leftrightarrow r' \in \operatorname{Im}(d' + d'')_{m+1}$. Таким образом, сводим наш случай к рассмотрению такого элемента r, у которого $r_{1m} = r_{0m+1} = 0$. Так как $(d' + d'')_m(r) = 0$, то $d'(r_{2m-1}) + d''(r_{1m}) = d'(r_{2m-1}) = 0$. Следовательно, согласно условию (C) существует $t \in B_{3m-1n}$ такой, что $d'(t) = r_{2m-1}$. Возьмем $s = (s_{ab}) \in B_{abn}$, $a + b = m + 2$, где

$$s_{ab} = \begin{cases} t & \text{для } (a,b) = (3, m-1), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что у элемента $r' = r - (d' + d'')_{n+1}(s)$ дополнительно обнулилась компонента с индексами $(2, m-1)$ и опять же $(d' + d'')_m(r') = 0$ и $r \in \operatorname{Im}(d' + d'')_{m+1} \Leftrightarrow r' \in \operatorname{Im}(d' + d'')_{m+1}$. Тогда можно считать, что $r_{2m-1} = 0$, и, следовательно, $d'(r_{3m-2}) = 0$ и опять применимо условие (C). Повторяя эту операцию несколько раз, приходим к рассмотрению элемента r, у которого все компоненты кроме r_{m+10} равны 0, находим по условию (C) элемент t такой, что $d'(t) = r_{m+10}$. Тогда для $s = (s_{ab}) \in B_{abn}, a + b = m + 2$, где

$$s_{ab} = \begin{cases} t & \text{для } (a,b) = (m+2, 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

выполнено $(d' + d'')_{n+1}(s) = r$.

Итак, мы доказали, что $\operatorname{Ker}(d' + d'')_m \subset \operatorname{Im}(d' + d'')_{m+1}$. Это можно также расписать следующим образом. Предположим, что $r_{ij} \in B_{ijn}$, где $i + j = m + 1$, причем $d'(r_{a+1b}) + d''(r_{ab+1}) = 0$, где $a + b = m$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Тогда существуют $t_{ab} \in B_{abn}$, где $a + b = m + 2$, причем $d'(t_{i+1j}) + d''(t_{ij+1}) = r_{ij}$, где $i + j = m + 1$. Именно это мы будем использовать в Шаге II.

Шаг II. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}_0$ и докажем точность $T_\bullet = \operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet\bullet})$ в члене T_{n+1}. Для этого достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} d_n \subset \operatorname{Im} d_{n+1}$.

Пусть $r = (r_{ijk})_{i+j+k=n+1} \in T_{n+1}$ и $d_n r = 0$. Тогда $d'(r_{10n}) + d''(r_{01n}) + d'''(r_{00n+1}) = 0$, и по условию (A) существуют $t_{ijk} \in$

$B_{ijk+n}, i+j+k=2$, такие, что

$$\begin{cases} d'(t_{200}) + d''(t_{110}) + d'''(t_{101}) = r_{10n}, \\ d'(t_{110}) + d''(t_{020}) + d'''(t_{011}) = r_{01n}, \\ d'(t_{101}) + d''(t_{011}) + d'''(t_{002}) = r_{00n+1}. \end{cases}$$

Возьмем $s = (s_{abc}) \in B_{abc}$, $a+b+c = n+2$, где

$$s_{abc} = \begin{cases} t_{ijk}, & \text{если } (a,b,c) = (i,j,k+n), \text{ где } i+j+k=2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и рассмотрим элемент $r - d_{n+1}s$. Заметим, что у него нулевые компоненты с индексами $(1,0,n)$, $(0,1,n)$ и $(0,0,n+1)$ и $d_n(r - d_{n+1}s) = d_n r - d_n d_{n+1} s = 0$, причем очевидно, что $r \in \operatorname{Im} d_{n+1} \Leftrightarrow (r - d_{n+1}s) \in \operatorname{Im} d_{n+1}$. Таким образом, требуемое утверждение достаточно проверить для элементов с нулевыми компонентами, имеющими индексы $(1,0,n)$, $(0,1,n)$ и $(0,0,n+1)$. Итак, пусть у нас $r = (r_{ijk})_{i+j+k=n+1} \in \operatorname{Ker} d_n$ и $r_{10n} = r_{01n} = r_{00n+1} = 0$. Так как $d_n r = 0$, то

$$\begin{cases} d'(r_{20n}) + d''(r_{11n}) = 0, \\ d'(r_{11n}) + d''(r_{02n}) = 0. \end{cases}$$

Применяя Шаг I $(1,n)$ к $(r_{20n}, r_{11n}, r_{02n})$, находим $t_{ab} \in B_{abn}$, $a+b = 3$, такие, что $d'(t_{i+1j}) + d''(t_{ij+1}) = r_{ijn}$, $i+j=2$. Рассматривая $s = (s_{abc}) \in T_{n+2}$, где

$$s_{abc} = \begin{cases} t_{ij}, & \text{если } (a,b,c) = (i,j,n), \text{ где } i+j=2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и замечая, что у элемента $r - d_{m+1}s$ шесть компонент равны нулю, сводим наш случай к рассмотрению элемента r с нулевыми компонентами r_{ijn}, $i+j \le 2$.

Аналогично доказательству Шага I (см. также [3]) повторим упрощение еще n раз. Каждый раз, применяя точность бикомплекса, доказанную на Шаге I, и сводя ситуацию к более простой, получим окончательно точность $\operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet\bullet})$ во всех степенях кроме 0. $\square$

3. Резольвенты

Пусть $R = R_\rho$, $\rho \in K^* = K \setminus \{0\}$ – алгебры, определенные в разделе 1, $\Lambda = \Lambda_\rho = R^e = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – их обертывающие алгебры.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ. В дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w, и часто будем опускать штрихи во второй компоненте элемента из Λ.

Рассмотрим неотрицательный трикомплекс $B_{\bullet\bullet\bullet}$, в котором $B_{ijk} = \Lambda$ для всех $(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3$ и

$$\begin{aligned}
d' &= (\rho^j x_0 \otimes 1' + (-1)^{i+j+k+1} \rho^k 1 \otimes x_0')^* : B_{i+1jk} \longrightarrow B_{ijk},\\
d'' &= (\rho^k x_1 \otimes 1' + (-1)^{i+j+k+1} \rho^i 1 \otimes x_1')^* : B_{ij+1k} \longrightarrow B_{ijk},\\
d''' &= (\rho^i x_2 \otimes 1' + (-1)^{i+j+k+1} \rho^j 1 \otimes x_2')^* : B_{ijk+1} \longrightarrow B_{ijk}.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что свойства (2.2), (2.3) в определении 2.1 выполняются, и, таким образом, получаем неотрицательный трикомплекс $B_{\bullet\bullet\bullet}$.

Теорема 3.1. *Тотализация* $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet\bullet})$ *трикомплекса* $B_{\bullet\bullet\bullet}$ *представляет собой минимальную проективную резольвенту* Λ-*модуля* R.

Доказательство. Пусть $m: \Lambda \to R$, $m(a \otimes b') = ab$ – каноническое отображение, индуцированное умножением в R. Построим Λ-проективную резольвенту модуля R ${}_\Lambda Q_\bullet \to {}_\Lambda R$. Определим $Q_0 = \Lambda$.

Введем следующие обозначения для элементов из Λ^3:

$$e_0 = (1, 0, 0), e_1 = (0, 1, 0), e_2 = (0, 0, 1).$$

Ядро $\mathrm{Ker}\, m$ как Λ-модуль порождают три элемента:

$$\mathrm{Ker}\, m =_\Lambda \left\langle x_i \otimes 1' - 1 \otimes x_i' \right\rangle_{i=0,1,2}.$$

Определим $Q_1 = \bigoplus_{i+j+k=1} \Lambda$ и

$$d_0 = \Sigma_{i=0,1,2} (x_i \otimes 1' - 1 \otimes x_i')^* e_i : Q_1 \to Q_0.$$

Отметим, что $\mathrm{Im}\, d_0 \subset \mathrm{Rad}\, \Lambda = {}_\Lambda\langle 1 \otimes x_i', x_i \otimes 1' \rangle_{i=0,1,2}$ и, следовательно, $\mathrm{Ker}\, d_0$ мало в Q_0.

Таким образом, мы построили точную последовательность – начало проективной резольвенты, совпадающее с началом $\mathrm{Tot}\, B_{\bullet\bullet\bullet}$:

$$Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{m} R \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Далее определим $Q_\bullet = \operatorname{Tot} B_{\bullet\bullet\bullet}$ и с помощью предложения 2.2 докажем точность $Q_\bullet$.

Вычислим ядро гомоморфизма

$$\Phi = \Phi_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} = \Sigma_{i=0,1,2}(x_i \otimes 1' - \alpha_i 1 \otimes x_i')^* e_i : \Lambda^3 \to \Lambda.$$

для произвольных $\alpha_i \in K$, $i = 0,1,2$. Занумеруем базис R тройками из $\mathbb{Z}_2^3$, точнее:

$$\begin{array}{llll} x^{(000)} = 1, & x^{(100)} = x_0, & x^{(010)} = x_1, & x^{(001)} = x_2, \\ x^{(110)} = x_0x_1, & x^{(011)} = x_1x_2, & x^{(101)} = x_2x_0, & x^{(111)} = x_0x_1x_2. \end{array}$$

Тогда любой элемент из R представляется в виде $\Sigma_{s\in\mathbb{Z}_2^3} k_s x^{(s)}$, где $k_s \in K$, а элемент из Λ представляется следующим образом $\Sigma_{s,t\in\mathbb{Z}_2^3} k_{s,t} x^{(s)} \otimes x^{(t)}$, где $k_{s,t} \in K$. Пусть $\lambda = (\lambda_i)_{i=0,1,2} \in \Lambda^3$, распишем

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \Sigma_{i=0,1,2}\lambda_i(x_i \otimes 1' - \alpha_i 1 \otimes x_i') = \\ &= \Sigma_{i=0,1,2}\Sigma_{s,t\in\mathbb{Z}_2^3} k_{s,t}^{(i)} x^{(s)} \otimes x^{(t)\prime} = \Sigma_{u,v\in\mathbb{Z}_2^3}\varphi_{u,v} x^{(u)} \otimes x^{(v)\prime}, \end{aligned}$$

где $k_{s,t}^{(i)}, \varphi_{u,v} \in K$. Тогда $\lambda \in \operatorname{Ker}\Phi \Leftrightarrow \varphi_{u,v} = 0$.

Заметим, что

$$\varphi_{u,v} = \Sigma_{i=0,1,2,u_i=1}\beta(u,i)k_{u-e_i,v}^{(i)} - \Sigma_{j=0,1,2,v_j=1}\alpha_j\gamma(v,j)k_{u,v-e_j}^{(j)},$$

где

$$\beta(u,i) = \begin{cases} -\rho, & \text{если } u_{i+1} = 1, u_{i+2} = 0 \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\gamma(v,j) = \begin{cases} -\rho, & \text{если } v_{j+1} = 0, v_{j+2} = 1 \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_{0,0} = 0$, получаем $8\times 8 - 1$ уравнений на $k_{s,t}^{(i)}$. Из этих уравнений получаем набор образующих для ядра Φ. Обозначим первые шесть образующих $(i = 0,1,2)$:

$$\begin{aligned} y_i &= (x_i \otimes 1' + \alpha_i 1 \otimes x_0')e_i, \\ z_i &= (x_{i+1} \otimes 1' + \alpha_{i+1}\rho 1 \otimes x_{i+1}')e_i + (\rho x_i \otimes 1' + \alpha_i 1 \otimes x_i')e_{i+1}. \end{aligned}$$

Далее мы выпишем все остальные образующие ядра и сразу же покажем как они выражаются через указанные шесть. Для $i = 0$, 1, 2 имеем:

$$
\begin{aligned}
&(x_ix_{i+1}\otimes 1+\alpha_{i+1}x_i\otimes x_{i+1})e_{i+1}=(x_i\otimes 1)y_{i+1},\\
&(x_{i+1}\otimes x_i-\alpha_{i+1}\rho 1\otimes x_ix_{i+1})e_{i+1}=(1\otimes x_i)y_{i+1},\\
&(x_{i+1}\otimes x_{i+1})e_i+(\rho x_i\otimes x_{i+1}+\alpha_i 1\otimes x_ix_{i+1})e_{i+1}=(1\otimes x_{i+1})z_i,\\
&(x_i\otimes x_{i+1}+\alpha_i 1\otimes x_ix_{i+1})e_i=(1\otimes x_{i+1})y_i,\\
&(x_ix_{i+1}\otimes 1-\alpha_i\alpha_{i+1}\rho 1\otimes x_ix_{i+1})e_i+\alpha_ix_i\otimes x_ie_{i+1}=\\
&=(x_i\otimes 1)z_i-\alpha_{i+1}\rho(1\otimes x_{i+1})y_i,\\
&(x_{i+1}\otimes x_i-\alpha_{i+1}\rho^2 1\otimes x_ix_{i+1})e_i+\rho x_i\otimes x_ie_{i+1}=(1\otimes x_i)z_i,\\
&(x_0x_1x_2\otimes 1+\alpha_0\alpha_1\alpha_2 1\otimes x_0x_1x_2)e_i+(\alpha_ix_{i+2}x_i\otimes x_i)e_{i+1}+\\
&+(\alpha_i\alpha_{i+1}x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+2}=\\
&=(x_{i+2}x_i\otimes 1)z_i+\alpha_i\alpha_{i+1}(1\otimes x_ix_{i+1})z_{i+2}-(x_{i+2}\otimes x_{i+1})y_i,\\
&(x_{i+1}x_{i+2}\otimes x_i-\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}1\otimes x_0x_1x_2)e_i-\\
&-(x_{i+2}x_i\otimes x_i)e_{i+1}-(\alpha_{i+1}x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+2}=\\
&=-\rho^{-1}(x_{i+2}\otimes x_i)z_i-\alpha_{i+1}(1\otimes x_ix_{i+1})z_{i+2},\\
&(x_{i+1}\otimes x_{i+2}x_i+\alpha_{i+1}\rho 1\otimes x_0x_1x_2)e_i+(\rho x_i\otimes x_{i+2}x_i)e_{i+1}=\\
&=(1\otimes x_{i+2}x_i)z_i,\\
&(x_ix_{i+1}\otimes x_{i+2}-\alpha_{i+1}\alpha_i\rho 1\otimes x_0x_1x_2)e_i-(\alpha_i\rho x_i\otimes x_{i+2}x_i)e_{i+1}=\\
&=-\alpha_i(1\otimes x_{i+2}x_i)z_i-\rho^{-1}(x_{i+1}\otimes x_{i+2})y_i,\\
&(x_{i+2}\otimes x_ix_{i+1}+\alpha_{i+2}\rho^{-1}1\otimes x_0x_1x_2)e_i+(\rho^{-1}x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+2}=\\
&=\rho^{-1}(1\otimes x_ix_{i+1})z_{i+2},\\
&(x_{i+2}x_i\otimes x_{i+1}-\alpha_{i+2}\alpha_i\rho^{-1}1\otimes x_0x_1x_2)e_i-\\
&-(\alpha_i\rho^{-1}x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+2}=\\
&=(x_{i+2}\otimes x_{i+1})y_i-\rho^{-1}(1\otimes x_ix_{i+1})z_{i+2},\\
&(x_ix_{i+1}\otimes x_i-\alpha_{i+1}x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+2}+\\
&+(\alpha_{i+2}x_i\otimes x_{i+2}x_i-x_{i+2}x_i\otimes x_i)e_{i+1}=\rho^{-1}(x_i\otimes x_i)z_{i+1},\\
&(x_i\otimes x_{i+1}x_{i+2}+\alpha_i 1\otimes x_0x_1x_2)e_i=(1\otimes x_{i+1}x_{i+2})y_i,\\
&(x_{i+1}\otimes x_ix_{i+1})e_i+(\rho x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+1}=(1\otimes x_ix_{i+1})z_i,\\
&(x_ix_{i+1}\otimes x_{i+1})e_i+(\alpha_ix_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+1}=(x_i\otimes x_{i+1})z_i,\\
&(x_ix_{i+1}\otimes x_i-\alpha_{i+1}\rho x_i\otimes x_ix_{i+1})e_{i+1}=(x_i\otimes x_i)y_{i+1},\\
&(x_0x_1x_2\otimes x_{i+1})e_i+
\end{aligned}
$$

$$+(\alpha_{i+2}\alpha_i x_i \otimes x_0x_1x_2)e_{i+1} + (\alpha_i x_i x_{i+1} \otimes x_i x_{i+1})e_{i+2} =$$
$$= \rho^{-1}(x_i x_{i+1} \otimes x_{i+1})z_{i+2} + \alpha_{i+2}(x_i \otimes x_{i+1}x_{i+2})z_i,$$
$$(x_{i+1}x_{i+2} \otimes x_i x_{i+1})e_i -$$
$$-(\alpha_{i+2}x_i \otimes x_0x_1x_2)e_{i+1} - (x_i x_{i+1} \otimes x_i x_{i+1})e_{i+2} =$$
$$= -\rho^{-1}(x_i \otimes x_i x_{i+1})z_{i+1} - \rho^{-1}(x_{i+2} \otimes x_i x_{i+1})z_i,$$
$$(x_0x_1x_2 \otimes x_i - \alpha_{i+2}\alpha_{i+1}\rho x_i \otimes x_0x_1x_2)e_{i+1} -$$
$$-(\alpha_{i+1}\rho x_i x_{i+1} \otimes x_i x_{i+1})e_{i+2} =$$
$$= (x_i x_{i+1} \otimes x_i)z_{i+1} - \alpha_{i+2}\rho(x_i \otimes x_{i+2}x_i)y_{i+1},$$
$$(x_{i+2}x_i \otimes x_i x_{i+1} - \alpha_{i+2}x_i \otimes x_0x_1x_2)e_i - (x_i x_{i+1} \otimes x_i x_{i+1})e_{i+2} =$$
$$= -\rho^{-1}(x_i \otimes x_i x_{i+1})z_{i+1},$$
$$(x_{i+1} \otimes x_0x_1x_2)e_i + (\rho x_i \otimes x_0x_1x_2)e_{i+1} = (1 \otimes x_0x_1x_2)z_i,$$
$$(x_i x_{i+1} \otimes x_{i+1}x_{i+2})e_i + (\alpha_i x_i \otimes x_0x_1x_2)e_{i+1} = (x_i \otimes x_{i+1}x_{i+2})z_i,$$
$$(x_i x_{i+1} \otimes x_{i+2}x_i + \alpha_{i+1}x_i \otimes x_0x_1x_2)e_{i+1} = (x_i \otimes x_{i+2}x_i)y_{i+1},$$
$$(\alpha_1 x_2 \otimes x_1 - x_1x_2 \otimes 1)e_0 + (x_2x_0 \otimes 1 - \alpha_2\alpha_0 1 \otimes x_2x_0)e_1 +$$
$$+(\alpha_0\alpha_1 1 \otimes x_0x_1 - \alpha_0 x_1 \otimes x_0)e_2 = \rho^{-1}(x_2 \otimes 1)z_0 - \rho^{-1}\alpha_0(1 \otimes x_0)z_1,$$
$$(\alpha_1\alpha_2 1 \otimes x_1x_2 - x_1x_2 \otimes 1)e_0 + (-\alpha_2\alpha_0 1 \otimes x_2x_0 + \alpha_2 x_0 \otimes x_2)e_1 +$$
$$+(x_0x_1 \otimes 1 - \alpha_0 x_1 \otimes x_0)e_2 = \rho^{-1}\alpha_2(1 \otimes x_2)z_0 - \rho^{-1}(x_1 \otimes 1)z_2,$$
$$(\alpha_1\rho 1 \otimes x_1x_2 + x_1 \otimes x_2)e_0 + (-\alpha_0\rho 1 \otimes x_2x_0 + \rho x_0 \otimes x_2)e_1 = (1 \otimes x_2)z_0,$$
$$(x_2 \otimes x_0 + \alpha_2\rho 1 \otimes x_2x_0)e_1 + (-\alpha_1\rho 1 \otimes x_0x_1 + \rho x_1 \otimes x_0)e_2 = (1 \otimes x_0)z_1,$$
$$(-\alpha_2\rho 1 \otimes x_1x_2 + \rho x_2 \otimes x_1)e_0 + (\alpha_0\rho 1 \otimes x_0x_1 + x_0 \otimes x_1)e_2 = (1 \otimes x_1)z_2,$$
$$(x_0x_1x_2 \otimes x_1x_2 + \alpha_0 x_1x_2 \otimes x_0x_1x_2)e_0 = (x_1x_2 \otimes x_1x_2)y_0,$$
$$(\alpha_1 x_1x_2 \otimes x_0x_1x_2)e_0 + (x_0x_1x_2 \otimes x_2x_0)e_1 = \rho^{-1}(x_1x_2 \otimes x_2x_0)z_0,$$
$$(\alpha_2 x_1x_2 \otimes x_0x_1x_2)e_0 + (x_0x_1x_2 \otimes x_0x_1)e_2 = (x_1x_2 \otimes x_0x_1)z_2,$$
$$(-x_1x_2 \otimes x_0x_1x_2)e_0 + (x_2x_0 \otimes x_0x_1x_2)e_1 = \rho^{-1}(x_2 \otimes x_0x_1x_2)z_0,$$
$$(-x_1x_2 \otimes x_0x_1x_2)e_0 + (x_0x_1 \otimes x_0x_1x_2)e_2 = -\rho^{-1}(x_1 \otimes x_0x_1x_2)z_2.$$

Проверим, что у нас выполнены условия предложения 2.2.

Проверка (A). Необходимо доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}_0$, если r_{100}, r_{010}, $r_{001} \in \Lambda$ таковы, что

$$r_{100}(x_0 \otimes 1 + (-1)^{n+1}\rho^n 1 \otimes x_0) + r_{010}(\rho^n x_1 \otimes 1 + (-1)^{n+1} 1 \otimes x_1) +$$
$$+ r_{001}(x_2 \otimes 1 + (-1)^{n+1} 1 \otimes x_2 = 0,$$

то существуют $t_{ijk} \in \Lambda, i+j+k=2$, такие, что

$$\begin{cases} t_{200}(x_0 \otimes 1 + (-1)^n \rho^n 1 \otimes x_0) + t_{110}(\rho^n x_1 \otimes 1 + (-1)^n \rho 1 \otimes x_1) + \\ t_{101}(\rho x_2 \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes x_2) = r_{100}, \\ t_{110}(\rho x_0 \otimes 1 + (-1)^n \rho^n 1 \otimes x_0) + t_{020}(\rho^n x_1 \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes x_1) + \\ t_{011}(x_2 \otimes 1 + (-1)^n \rho 1 \otimes x_2) = r_{010}, \\ t_{101}(x_0 \otimes 1 + (-1)^n \rho^{n+1} 1 \otimes x_0) + t_{011}(\rho^{n+1} x_1 \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes x_1) + \\ t_{002}(x_2 \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes x_2) = r_{001}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$r = (r_{100}, \rho^n r_{010}, r_{001}) \in \operatorname{Ker} \Phi_{(-1)^n \rho^n, (-1)^n \rho^{-n}, (-1)^n}.$$

Тогда $r \in {}_\Lambda\langle y_i, z_i \rangle_{i=0,1,2}$, то есть существуют $s_i \in \Lambda, i = 0, ..., 5$, такие, что

$$\Sigma_{i=0,1,2} s_i y_i + s_{3+i} z_i = r.$$

Тогда коэффициенты

$$\begin{array}{lll} t_{200} = s_0, & t_{020} = s_1 \rho^{-2n}, & t_{002} = s_2, \\ t_{110} = s_3 \rho^{-n}, & t_{101} = s_5, & t_{011} = s_4 \rho^{-n} \end{array}$$

являются искомыми.

Проверка (B). Необходимо доказать, что для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$, если $r_{10}, r_{01} \in \Lambda$, такие, что

$$r_{10}(\rho^m x_0 \otimes 1 + (-1)^{m+n+1} \rho^n 1 \otimes x_0) + r_{01}(\rho^n x_1 \otimes 1 + (-1)^{m+n+1} 1 \otimes x_1) = 0,$$

то существуют $t_{ij} \in \Lambda, i+j=2$, такие, что

$$\begin{cases} t_{20}(\rho^m x_0 \otimes 1 + (-1)^{m+n} \rho^n 1 \otimes x_0) + \\ +t_{11}(\rho^n x_1 \otimes 1 + (-1)^{m+n} \rho 1 \otimes x_1) = r_{10}, \\ t_{11}(\rho^{m+1} x_0 \otimes 1 + (-1)^{m+n} \rho^n 1 \otimes x_0) + \\ +t_{02}(\rho^n x_1 \otimes 1 + (-1)^{m+n} 1 \otimes x_1) = r_{01}. \end{cases}$$

Элемент

$$r = (\rho^m r_{10}, \rho^n r_{01}, 0) \in \operatorname{Ker} \Phi_{(-1)^{m+n} \rho^{n-m}, (-1)^{m+n} \rho^{-n}, \alpha_2}$$
(для любого $\alpha_2 \in K$).

Но рассматривая образующие $\operatorname{Ker} \Phi$, можно заметить, что все элементы с нулевой третьей компонентой порождаются только

y_0, y_1, z_0. Получаем, что существуют $s_0, s_1, s_2 \in \Lambda$, такие, что $s_0y_0 + s_1y_1 + s_2z_0 = r$. Тогда

$$\begin{aligned} t_{20} &= s_0\rho^{-2m}, \\ t_{02} &= s_1\rho^{-2n}, \\ t_{11} &= s_2\rho^{-n-m} \end{aligned}$$

являются искомыми.

Проверка (C). Необходимо доказать, что для любых $l, m, n \in \mathbb{N}_0$, если $r_{100} \in \Lambda$ таков, что

$$r_{100}(\rho^m x_0 \otimes 1 + (-1)^{l+m+n+1}\rho^n 1 \otimes x_0) = 0,$$

то существует $t \in \Lambda$, такой, что

$$t(\rho^m x_0 \otimes 1 + (-1)^{l+m+n}\rho^n 1 \otimes x_0) = r_{100}.$$

Тогда

$$r = (\rho^m r_{100}, 0, 0) \in \operatorname{Ker}\Phi_{(-1)^{l+m+n}\rho^{n-m},\alpha_1,\alpha_2} \text{ (для любых } \alpha_1, \alpha_2 \in K).$$

Но рассматривая образующие $\operatorname{Ker}\Phi$, можно заметить, что все элементы с нулевыми второй и третьей компонентой порождаются только y_0. Получаем, что существует $s \in \Lambda$, такой, что $sy_0 = r$. Тогда $t = s\rho^{-2m}$ является искомым.

Мы проверили, что у нас выполнены условия предложения 2.2, а значит, комплекс $Q_\bullet$ точен во всех степенях, кроме степени 0. Таким образом, доказано, что $Q_\bullet = \operatorname{Tot} B_{\bullet\bullet\bullet}$ является Λ-проективной резольвентой модуля R, а ее минимальность следует из того, что ввиду построения трикомплекса $B_{\bullet\bullet\bullet}$ имеем: $\operatorname{Im} d_n^Q \subset \operatorname{Rad} Q_n$ для всех $n \geqslant 0$. □

В заключение хочу поблагодарить своего научного руководителя А. И. Генералова за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. Sh. Liu, R. Schulz, *The existence of bounded infinite DTr-orbits.* — Proc. Amer. Math. Soc. **122**, No. 4 (1994), 1003–1005.
2. C. M. Ringel, *The Liu–Schulz example.* — In: Representation Theory of Algebras, CMS Conf. Proc. **18** (1996), pp. 587–600.
3. А. И. Генералов, Н. Ю. Фёдорова, *Алгебра Йонеды для “примера Лю–Шульца”.* — Алгебра и анализ **14**, вып. 4 (2002), 19–35.

4. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Complexity and multiple complexes.* — Math. Z. **195** (1987), 221–238.

Kosovskaya N. Yu. Bimodule resolution of the Liu–Schulz algebras.

The minimal projective bimodule resolution of the symmetric 8-dimensional algebras discovered by Liu and Schulz is constructed.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 января 2005