СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 44, № 1, 1980

УДК 511

В. И. БЕРНИК

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 1. Цель настоящей работы — доказательство гипотезы В. Г. Спринджука, сформулированной в ([4]):

Пусть $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ — *целочисленный полином,* $H=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$, $\overline{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_k)$ — *вещественный вектор,* $1\leqslant k\leqslant n$. *Пусть, далее,* $v_n(\overline{\omega})$ — *точная верхняя грань* $v>0$, *для которых система неравенств*

$$\max(|P(\omega_1),\ldots,|P(\omega_k)|)<H^{-v}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$. *Верно ли, что для почти всех* $\overline{\omega}$

$$v_n(\overline{\omega})=\frac{n+1}{k}-1?$$

Заметим, что при $k=1$ получаем известное предположение Малера, доказанное Спринджуком, а при $k=n$ доказательство гипотезы несложно (см. лемму 11). Мы докажем более общую теорему.

Пусть $w_n(\overline{\omega})$ — *точная верхняя грань тех* $w>0$, *для которых неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k}|P(\omega_i)|<H^{-w} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$. *Тогда для почти всех* $\overline{\omega}$

$$w_n(\overline{\omega})=n-k+1.$$

В такой более общей формулировке задача ставилась в ([3]). Там же получены предварительные оценки для $w_n(\overline{\omega})$ $(w_n(\overline{\omega})<2n-k+1)$. Заметим, что для любого $\overline{\omega}$, применяя принцип ящиков Дирихле, можно показать, что $w_n(\overline{\omega})\geqslant n-k+1$.

Основу доказательства составляет метод В. Г. Спринджука, разработанный при решении проблемы Малера. С помощью этого метода были получены наиболее значительные результаты в метрической теории диофантовых приближений зависимых величин. Ознакомиться как

с самим методом, так и с его действием в условиях конкретных задач можно по работам ([2]), ([4])—([6]).

§ 2. В этом параграфе будет обоснован переход от множества всех целочисленных полиномов

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \tag{2}$$

ко множеству неприводимых в поле рациональных чисел полиномов, имеющих определенную структуру коэффициентов и корней. Кроме того, мы докажем несколько лемм и, основываясь на них, введем ряд определений.

Через $c(n)$ мы будем обозначать положительные функции, зависящие только от n. Над $c(n)$ мы будем производить действия по формальным правилам

$$c(n)+c(n)=c(n), \qquad c(n)\cdot c(n)=c(n),$$

смысл которых состоит в том, что сумма и произведение есть снова некоторая функция, зависящая от n.

Для полинома $P(x)$ вида (2) через $H(P)$ обозначим его максимальный по модулю коэффициент — высоту.

Если не возникает двусмысленности, вместо $H(P)$ будем писать просто H. Поскольку в теореме речь идет о конечности или бесконечности числа решений неравенства (1), то будем считать, что $H>H_0$, где H_0 — достаточно большое натуральное число. Далее будем считать, что у вектора $\overline{\omega}=(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ все координаты — трансцендентные числа, поскольку мера тех $\overline{\omega}$ в R^k, у которых хотя бы одна координата алгебраическая, равна нулю.

ЛЕММА 1. *Пусть* $P_1(x), \ldots, P_l(x)$ — *полиномы и* $P(x)=P_1(x)\cdots P_l(x)$. *Тогда*

$$c_1(n)H(P_1)\cdots H(P_l)<H(P)<c_2(n)H(P_1)\cdots H(P_l).$$

Элементарное доказательство леммы 1 можно найти в ([5]). В более сильной формулировке, с указанием в явном виде величины $c_1(n)$, можно найти в ([1]).

ЛЕММА 2. *Пусть все координаты вектора* $\overline{\omega}=(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ *трансцендентны, и пусть* $w_1(\overline{\omega})$, $v_1(\overline{\omega})$ — *точные верхние грани тех* w_1', v_1', *для которых неравенства*

$$\prod_{i=1}^{k}|P(\omega_i)|<H(P)^{-w_1'}, \qquad \prod_{i=1}^{k}|F(\omega_i)|<H(F)^{-v_1'}$$

имеют бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$ *степени не выше* n *и целочисленных неприводимых полиномах* $F(x)$ *степени не выше* n *соответственно. Тогда* $w_1(\overline{\omega})=v_1(\overline{\omega})$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству утверждения § 5 главы 1 из ([5]).

ЛЕММА 3. *Пусть при некотором* $w>0$ *неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} |P(\omega_i)| < H(P)^{-w_2}$$

имеет бесконечное число решений для множества положительной меры $\Omega_1 \subset R^k$ *в целочисленных неприводимых полиномах* $P(x)$ *степени не выше* n. *Тогда неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} |Q(\omega_i)| < H(Q)^{-w_2}$$

имеет бесконечное число решений для некоторого множества положительной меры $\Omega_2 \subset R^k$ *в целочисленных неприводимых полиномах* $Q(x)$ *степени не выше* n, *подчиненных условию*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |a_i(Q)| \leqslant a_n(Q) = H(Q), \tag{3}$$

где $a_i(Q)$ — *коэффициенты полинома* $Q(x)$.

Аналогичное лемме 3 утверждение доказано в § 6 главы I из ([5]).

Леммы 2 и 3 позволяют свести доказательство теоремы к рассмотрению неравенства (1) в неприводимых полиномах, подчиненных условию (3). Обозначим через $P_n(H)$ класс неприводимых полиномов с условием (3), для которых $a_n(P)=H$. Пусть, далее, $P_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} P_n(H)$.

Для того чтобы упростить дальнейшие рассмотрения, будем проводить доказательство для случая $k=2$. Обобщение теоремы на случай произвольного k несложно. Необходимые для этого изменения мы обсудим в конце статьи. Пусть $P(x) \subset P_n(H)$, и пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — его корни. Тогда нетрудно доказать (см., например, лемму 1 гл. I из ([5])), что

$$|\varkappa_i| \leqslant n \quad (i=1, \ldots, n). \tag{4}$$

Будем считать, что корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ упорядочены таким образом, что $\operatorname{Re}\varkappa_1 \leqslant \operatorname{Re}\varkappa_2 \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\varkappa_n$. В случае равенства $\operatorname{Re}\varkappa_l = \operatorname{Re}\varkappa_t$ ранее будем записывать тот корень, у которого меньше модуль мнимой части, а в случае равенства модулей мнимых частей ранее поставим тот корень, мнимая часть которого положительна. Выберем два любых корня $\varkappa_i$ и $\varkappa_j$. Относительно каждого из них все остальные корни упорядочим следующим образом:

$$|\varkappa_i - \varkappa_{i_2}| \leqslant |\varkappa_i - \varkappa_{i_3}| \leqslant \ldots \leqslant |\varkappa_i - \varkappa_{i_n}|, \tag{5}$$

$$|\varkappa_j - \varkappa_{j_2}| \leqslant |\varkappa_j - \varkappa_{j_3}| \leqslant \ldots \leqslant |\varkappa_j - \varkappa_{j_n}|. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$|\varkappa_i - \varkappa_{i_l}| = H^{-\mu_l} \quad (l = 2, \ldots, n), \tag{7}$$

$$|\varkappa_j - \varkappa_{j_s}| = H^{-\theta_s} \quad (s = 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Очевидно, учитывая леммы 2 и 3, доказательство теоремы при $k=2$ будет следовать из того, что мы докажем, что при любом $\varepsilon>0$ неравенство

$$|P(\omega_1)||P(\omega_2)|<H^{-(n-1)-\varepsilon} \tag{9}$$

имеет для почти всех $\bar{\omega}=(\omega_1, \omega_2)$ лишь конечное число решений в целочисленных неприводимых полиномах $P(x)$, подчиненных условию (3). Зафиксируем ε и положим

$$T=\left[\frac{20n^2}{\varepsilon}\right]+1.$$

Определим целые числа l_i и s_i из неравенств

$$\frac{l_i}{T}\leqslant\mu_i<\frac{l_i+1}{T} \quad (i=2, \ldots, n), \tag{10}$$

$$\frac{s_i}{T}\leqslant\theta_i<\frac{s_i+1}{T} \quad (i=2, \ldots, n). \tag{11}$$

С фиксированной парой корней $(\varkappa_i, \varkappa_j)$ полинома $P(x)$ будем связывать целочисленный вектор $\bar{s}_{i,j}=\bar{s}=(l_2, \ldots, l_n, s_2, \ldots, s_n)$. Все многочлены $P(x)\in P_n(H)$, имеющие один и тот же вектор $\bar{s}$, объединим в класс $P_n(H, \bar{s})$.

ЛЕММА 4. *Число классов $P_n(H, \bar{s})$ конечно и зависит только от n и ε.*

Доказательство. Лемма будет доказана, если мы покажем, что любое из целых l_i, s_i принимает лишь конечное, зависящее только от n и ε число значений. Неравенства $-1\leqslant l_i$ и $-1\leqslant s_i$ выполняются при достаточно больших H, так как для любых двух корней полинома $P(x)$ $\varkappa_i$ и $\varkappa_j$ по (4) верно $|\varkappa_i-\varkappa_j|\leqslant 2n$. Сейчас получим верхнюю оценку для l_i и s_i. Рассмотрим дискриминант $D(P)$ полинома $P(x)$. Так как $P(x)$ неприводим, то $|D(P)|\geqslant 1$. С другой стороны,

$$|D(P)|=H^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\varkappa_i-\varkappa_j|^2\leqslant c(n)H^{2n-2}|\varkappa_l-\varkappa_k|^2 \tag{12}$$

для любых $l\neq k$ $(1\leqslant l\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant n)$. Из (12) получаем:

$$1\leqslant|D(P)|^{1/2}\leqslant c(n)H^{n-1}|\varkappa_l-\varkappa_k|. \tag{13}$$

Если $|\varkappa_l-\varkappa_k|<H^{-n}$, то при достаточно больших H неравенство (13) противоречиво. Поэтому $|\varkappa_l-\varkappa_k|\geqslant H^{-n}$. Отсюда и из (10), (11) следует, что $l_i\leqslant nT$ и $s_i\leqslant nT$, а значит, число различных векторов $\bar{s}$ не превосходит $(nT+2)^{2n-2}$.

Теперь, учитывая лемму 4, мы можем считать, что неравенство (9) рассматривается в полиномах $P(x)\in P_n(H, \bar{s})$ с фиксированным вектором $\bar{s}$.

Пусть для некоторого $\bar{w}$ выполняется неравенство (9). Это означает, что $|P(\omega_1)|<H^{-\nu_1(\omega_1)}$, $|P(\omega_2)|<H^{-\nu_2(\omega_2)}$ и $\nu_1(\omega_1)+\nu_2(\omega_2)\geqslant n-1+\varepsilon$. Опреде-

лим целые числа t_1 и t_2 из неравенств

$$\frac{t_1}{T} < \nu_1(\omega_1) \leqslant \frac{t_1+1}{T}, \tag{14}$$

$$\frac{t_2}{T} < \nu_2(\omega_2) \leqslant \frac{t_2+1}{T}. \tag{15}$$

Из определения t_1 и t_2 следует, что

$$\begin{gathered} |P(\omega_1)| < H^{-t_1/T}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-t_2/T}, \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\frac{t_1+t_2}{T} \geqslant \nu_1(\omega_1) + \nu_2(\omega_2) - \frac{2}{T} > n - 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16'}$$

По теореме Спринджука ([4]), ([5]) неравенства $|P(\omega_1)| < H^{-n-1}$, $|P(\omega_2)| < H^{-n-1}$ выполняются бесконечно часто лишь для множеств чисел ω_1 и ω_2, имеющих нулевую меру Лебега на R, поэтому в системе (16) можно считать, что $t_1 < (n+1)T$, $t_2 < (n+1)T$. С другой стороны, неравенства для t_1 и t_2 $t_1 > -T-1$ и $t_2 > -T-1$ следуют из неравенства $|P(x)| < c(n)H$, справедливого для всех x. Таким образом, мы получаем, что как t_1, так и t_2 принимают не более $(n+2)T$ значений. Поэтому если для некоторого $\overline{\omega}$ неравенство (9) имеет бесконечное число решений, то для этого $\overline{\omega}$ бесконечное число раз выполняется система неравенств (16) с фиксированными $t_1 = t_1(\overline{\omega})$ и $t_2 = t_2(\overline{\omega})$, удовлетворяющими неравенству (16′), или это $\overline{\omega}$ принадлежит множеству нулевой меры. Зафиксируем t_1 и t_2 в системе (16).

Пусть $S(\varkappa_i)$ — множество вещественных чисел ω_1, обладающих свойством

$$\min_{1 \leqslant l \leqslant n} |\omega_1 - \varkappa_l| = |\omega_1 - \varkappa_i|. \tag{17}$$

Аналогично, пусть $S(\varkappa_j)$ — множество вещественных чисел ω_2, обладающих свойством

$$\min_{1 \leqslant s \leqslant n} |\omega_2 - \varkappa_s| = |\omega_2 - \varkappa_j|. \tag{18}$$

Очевидно, что $S(\varkappa_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ представляют собой интервалы, причем два крайних интервала имеют вид $(-\infty, \eta_1)$, (η_2, ∞), где η_1 и η_2 — некоторые вещественные алгебраические числа.

Если для некоторого $\overline{\omega}$ система неравенств (16) имеет бесконечное число решений, то для этого $\overline{\omega}$ бесконечное число раз выполняется система неравенств (16) с условием, что $\omega_1 \in S(\varkappa_i)$, $\omega_2 \in S(\varkappa_j)$ для некоторых i и j $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$. Зафиксируем i и j, т. е. будем рассматривать систему неравенств (16) при фиксированных t_1, t_2 и $\omega_1 \in S(\varkappa_i)$,

$\omega_2 \in S(\varkappa_j)$:

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-t_1/T}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-t_2/T}, \\ \omega_1 \in S(\varkappa_i), \quad \omega_2 \in S(\varkappa_j). \end{cases} \tag{19}$$

ЛЕММА 5. *Пусть* $P(x) \in P_n(H)$, $\omega \in S(\varkappa_i)$. *Тогда*

$$|\omega - \varkappa_i| \leqslant 2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_i)|}, \tag{20}$$

$$|\omega - \varkappa_i| \leqslant \min_{2 \leqslant j \leqslant n} \left(2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_i)|} |\varkappa_i - \varkappa_{i_2}| \ldots |\varkappa_i - \varkappa_{i_j}|\right)^{1/j}, \tag{21}$$

где $\varkappa_{i_2}, \ldots, \varkappa_{i_n}$ *упорядочены, как в* (5).

Доказательство. Докажем (20). Из неравенства (17), определяющего $S(\varkappa_i)$, получаем:

$$|\varkappa_i - \varkappa_{i_j}| \leqslant |\omega - \varkappa_i| + |\omega - \varkappa_{i_j}| \leqslant 2|\omega - \varkappa_{i_j}| \quad (j = 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Из тождеств

$$|\omega - \varkappa_i| = \frac{|P(\omega)|}{H|\omega - \varkappa_{i_2}| \ldots |\omega - \varkappa_{i_n}|}, \tag{23}$$

$$|P'(\varkappa_i)| = H|\varkappa_i - \varkappa_{i_2}| \ldots |\varkappa_i - \varkappa_{i_n}| \tag{24}$$

и неравенства (22) находим:

$$|\omega - \varkappa_i| \leqslant 2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_i)|}.$$

Аналогично, используя (22), (23) и (24), получаем:

$$|\omega - \varkappa_i|^j \leqslant |\omega - \varkappa_i| \ldots |\omega - \varkappa_{i_j}| = \frac{|P(\omega)|}{H|\omega - \varkappa_{i_{j+1}}| \ldots |\omega - \varkappa_{i_n}|} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{n-j} \frac{|P(\omega)|}{H|\varkappa_i - \varkappa_{i_{j+1}}| \ldots |\varkappa_i - \varkappa_{i_n}|} =$$
$$= 2^{n-j} \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_i)|} |\varkappa_i - \varkappa_{i_2}| \ldots |\varkappa_i - \varkappa_{i_j}|,$$

откуда следует (21).

ЛЕММА 6. *Пусть* $P(x) \in P_n(H)$,

$$|\omega - \varkappa_i| < |\varkappa_i - \varkappa_{i_2}|. \tag{25}$$

Тогда

$$|\omega - \varkappa_i| \geqslant 2^{-n} \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_i)|}. \tag{26}$$

Доказательство. Для любого i_j $(j = 2, \ldots, n)$

$$|\omega - \varkappa_{i_j}| \leqslant |\omega - \varkappa_i| + |\varkappa^i - \varkappa_{i_j}| \leqslant 2|\varkappa_i - \varkappa_{i_j}|$$

в силу неравенства (25) при $j=2$ и неравенства (5) при $j>2$. Из тождества (23) путем замены $|\omega-\varkappa_{i_j}|$ на $2|\varkappa_i-\varkappa_{i_j}|$ получаем (26).

Определим числа p_i и q_i, пользуясь (10) и (11):

$$p_i=\frac{l_{i+1}+\ldots+l_n}{T}, \tag{27}$$

$$q_i=\frac{s_{i+1}+\ldots+s_n}{T}. \tag{28}$$

ЛЕММА 7. *Пусть* $P(x)\in P_n(H,\bar{s})$. *Тогда*

$$|P^{(l)}(\varkappa_i)|<c(n)H^{1-p_l}. \tag{29}$$

Доказательство. При $l=1$ неравенство (29) следует из (24), (5) и (27), так как

$$|P'(\varkappa_i)|=H|\varkappa_i-\varkappa_{i_2}|\ldots|\varkappa_i-\varkappa_{i_n}|=H^{1-(\mu_2+\ldots+\mu_n)}\leqslant H^{1-p_1}.$$

При любом другом l из тождества $P(\omega)=H\prod\limits_{j=1}^{n}(\omega-\varkappa_j)$ получаем:

$$P^{(l)}(\omega)=Hl!\sum_{k_j}(\omega-\varkappa_{k_1})\ldots(\omega-\varkappa_{k_{n-l}}), \tag{30}$$

где $k_1,\ldots,k_{n-l}$ независимо друг от друга принимают значения $1,\ldots,n$, причем $k_1<\cdots<k_{n-l}$. Из всевозможных произведений $(\varkappa_i-\varkappa_{k_1})\cdots\cdots(\varkappa_i-\varkappa_{k_{n-l}})$ наибольшим по модулю, в силу неравенства (5), является произведение $|\varkappa_i-\varkappa_{i_{l+1}}|\cdots|\varkappa_i-\varkappa_{i_n}|$. Поэтому из (30) получаем:

$$|P^{(l)}(\varkappa_i)<c(n)H|\varkappa_i-\varkappa_{i_{l+1}}|\ldots|\varkappa_i-\varkappa_{i_n}|,$$

откуда следует (29).

§ 3. В этом параграфе мы сделаем переход от класса $P_n(H,\bar{s})$ к конечному числу подклассов, каждый из которых будет характеризоваться одинаковым поведением множества решений системы неравенств (19) при изменении t_1 и t_2.

Для любой системы неравенств

$$\begin{cases}|P(\omega_1)|<H^{-w_1},\\ |P(\omega_2)|<H^{-w_2}\end{cases}$$

через $\tau_P(w_1)$ будем обозначать пересечение круга

$$|z_1-\varkappa_i|\leqslant 2^nH^{-w_1}/|P'(\varkappa_i)|$$

с действительной осью ω_1, а через $\tau_P(w_2)$ — пересечение круга

$$|z_2-\varkappa_j|\leqslant 2^nH^{-w_2}/|P'(\varkappa_j)|$$

с действительной осью ω_2. Здесь z_1 и z_2 — комплексные числа. Так как $\varkappa_i$ и $\varkappa_j$ могут быть комплексными числами, то для некоторых w_1 и w_2 возможно, что $\tau_P(w_1)=\varnothing$ и $\tau_P(w_2)=\varnothing$. Если для некоторого w_1'

$\tau_P(w_1') \neq \varnothing$, то $\tau_P(w_1) \neq \varnothing$ для всех $w_1 < w_1'$ и представляет собой интервал, в котором наряду с точками $\omega_1 \in S(\varkappa_i)$ могут содержаться и точки $\omega_1 \in S(\varkappa_l)$ $(l \neq i)$.

Наряду с системой (19) мы будем рассматривать системы неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-\frac{t_1-l_1}{T}}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-\frac{t_2-l_2}{T}}, \\ \omega_1 \in S(\varkappa_i), \quad \omega_2 \in S(\varkappa_j) \end{cases} \tag{31}$$

с целыми l_1 и l_2. Обозначим через k_1 такое целое l_1, что $\tau_P\left(\frac{t_1-l_1}{T}\right) \subset S(\varkappa_i)$, но уже $\tau_P\left(\frac{t_1-l_1-1}{T}\right) \not\subset S(\varkappa_i)$, т. е. в $\tau_P\left(\frac{t_1-l_1-1}{T}\right)$ содержится хотя бы одна точка $\omega_1 \in S(\varkappa_l)$ $(l \neq i)$. Аналогично, через k_2 обозначим такое целое l_2, что $\tau_P\left(\frac{t_2-l_2}{T}\right) \subset S(\varkappa_j)$, но уже $\tau_P\left(\frac{t_2-l_2-1}{T}\right) \not\subset S(\varkappa_j)$, что означает существование $\omega_2 \in \tau_P\left(\frac{t_2-l_2-1}{T}\right)$, принадлежащего $S(\varkappa_l)$ $(l \neq j)$.

Заметим, что из неравенства (20) следует, что все $\omega_1 \in S(\varkappa_i)$, для которых выполняется первое неравенство системы (31), содержатся в интервале $\tau_P\left(\frac{t_1-l_1}{T}\right)$, а все $\omega_2 \in S(\varkappa_j)$, для которых выполняется второе неравенство системы (31), содержатся в интервале $\tau_P\left(\frac{t_2-l_2}{T}\right)$.

ЛЕММА 8. *Число векторов* $\bar{k} = (k_1, k_2)$ *конечно и зависит от* n *и* ε.

Доказательство. Из неравенства $|P(\omega)| < c(n)H$, справедливого для всех $\omega \in (-n, n)$, следует, что $k_1 < t_1 + T \leqslant (n+2)T$ и $k_2 < t_2 + T \leqslant (n+2)T$. С другой стороны, если $k_1 < t_1 - 2nT$, то в интервале $\tau_P(2n)$ содержатся как точки $\omega_1' \in S(\varkappa_i)$, так и точки $\omega_1'' \in S(\varkappa_l)$ $(l \neq i)$. В неравенстве

$$|\varkappa_i - \varkappa_l| < |\omega_1' - \varkappa_i| + |\omega_1' - \omega_1''| + |\omega_1'' - \varkappa_l|$$

точки ω_1' и ω_1'' можно взять как угодно близкими, поэтому будем считать, что $|\omega_1' - \omega_1''| + |\omega_1'' - \varkappa_l| < 2|\omega_1' - \varkappa_i|$. Из определения $\tau_P(2n)$ получаем, что

$$|\omega_1' - \varkappa_i| < 2^n \frac{H^{-2n}}{|P'(\varkappa_i)|},$$

откуда

$$|\varkappa_i - \varkappa_l| < 3 \cdot 2^n \frac{H^{-2n}}{|P'(\varkappa_i)|}$$

и

$$|\varkappa_l - \varkappa_{i_2}| \cdots |\varkappa_i - \varkappa_{i_n}| |\varkappa_i - \varkappa_l| < 3 \cdot 2^n H^{-2n-1}.$$

Из неприводимости полинома $P(\omega)$ следует, что его дискриминант $|D(P)|\geqslant 1$. Имеем:

$$1\leqslant |D(P)| = H^{2(n-1)} \prod_{1\leqslant t<s\leqslant n} |\varkappa_t-\varkappa_s|^2 < c(n)H^{2(n-1)}\times$$

$$\times|\varkappa_i-\varkappa_{i_2}|\cdots|\varkappa_i-\varkappa_{i_n}||\varkappa_i-\varkappa_l|<c(n)H^{-3}.$$

Полученное неравенство противоречиво и показывает, что $k_1\geqslant t_1-2nT\geqslant \geqslant -T-1-2nT\geqslant -(2n+2)T$. Аналогичное неравенство справедливо и для k_2. Отсюда следует, что вектор $\overline{k}$ может принимать не более $(3n+4)^2T^2$ значений.

Полиномы $P(x)$, принадлежащие $P_n(H, \overline{s})$, будем относить к одному и тому же подклассу $P_n(H, \overline{s}, \overline{k})$, если они имеют один и тот же вектор $\overline{k}=(k_1, k_2)$. Теперь ясно, что теорема будет доказана, если мы ее докажем для системы (19) в полиномах $P(x)\in P_n(H, \overline{s}, \overline{k})$ при $\omega_1\in S(\varkappa_i)$, $\omega_2\in S(\varkappa_j)$.

Пусть $P(x)\in P_n(H, \overline{s})$ и $Q(x)\in P_n(H, \overline{s})$. Обозначим через $\varkappa_i(P)$ корни $P(x)$ и через $\varkappa_i(Q)$ — корни $Q(x)$, $1\leqslant i\leqslant n$.

ЛЕММА 9. *Пусть выполнены два условия*:

$$\tau_P(w)\cap\tau_Q(w)\neq\varnothing, \tag{32}$$

$$\frac{l_2}{T}<\frac{w+1-p_2}{2}. \tag{33}$$

Тогда для всех $\omega\in\tau_P(w)$

$$|Q(\omega)|<c(n)H^{-w+\frac{\varepsilon}{20}}. \tag{34}$$

Доказательство. Так как $\tau_P(w)$ и $\tau_Q(w)$ пересекаются, то для любых двух точек $\omega_1\in\tau_P(w)$ и $\omega_2\in\tau_Q(w)$ справедливо неравенство

$$|\omega_1-\omega_2|\leqslant 2\max_{\omega\in\tau_P(w)}|\omega-\varkappa_i(P)|+2\max_{\omega\in\tau_Q(w)}|\omega-\varkappa_i(Q)|\leqslant$$

$$\leqslant 2^{n+1}H^{-w}\left(\frac{1}{|P'(\varkappa_i(P))|}+\frac{1}{|Q'(\varkappa_i(Q))|}\right). \tag{35}$$

Так как $P(x)$ и $Q(x)$ принадлежат одному и тому же классу $P_n(H,\overline{s})$, то

$$\max\left(\frac{1}{|P'(\varkappa_i(P))|}, \frac{1}{|Q'(\varkappa_i(Q))|}\right)<H^{p_1+\frac{n}{T}-1}. \tag{36}$$

Из (35) и (36) получаем:

$$|\omega_1-\omega_2|<2^{n+2}H^{-w+p_1+\frac{n}{T}-1}. \tag{37}$$

Воспользуемся разложением $Q(\omega)$ в ряд Тэйлора в корне $\varkappa_i(Q)$ этого полинома:

$$Q(\omega)=Q(\varkappa_i(Q))+Q'(\varkappa_i(Q))(\omega-\varkappa_i(Q))+$$

$$+\frac{1}{2}Q''(\varkappa_i(Q))(\omega-\varkappa_i(Q))^2+\ldots+\frac{1}{n!}Q^{(n)}(\omega)(\omega-\varkappa_i(Q))^n. \tag{38}$$

Если $\omega \in \tau_P(w)$, то по (37) получаем:

$$|\omega - \varkappa_i(Q)| < 2^{n+2} H^{-w+p_1+\frac{n}{T}-1}.$$

Поэтому

$$|Q'(\varkappa_i(Q))|\,|\omega - \varkappa_i(Q)| < c(n) H^{1-p_1-w+p_1+\frac{n}{T}-1} = c(n) H^{-w+\frac{n}{T}}. \tag{39}$$

Оценим сверху третий член разложения (36). Для этого воспользуемся оценкой $|\omega - \varkappa_i(Q)|$ и леммой 7. Имеем:

$$\left|\frac{1}{2} Q''(\varkappa_i(Q))(\omega - \varkappa_i(Q))^2\right| < c(n) H^{1-p_2-2w+2p_1+\frac{2n}{T}-2} =$$
$$= c(n) H^{-w+2\frac{l_2}{T}+p_2-w-1+\frac{2n}{T}}. \tag{40}$$

Из неравенства (33) следует, что $\frac{2l_2}{T} - w - 1 + p_2 < 0$, поэтому (40) можно переписать в виде

$$\left|\frac{1}{2} Q''(\varkappa_i(Q))(\omega - \varkappa_i(Q))^2\right| < c(n) H^{-w+\frac{\varepsilon}{20}}. \tag{41}$$

Далее, при $3 \leqslant s \leqslant n$

$$\left|\frac{1}{s!} Q^{(s)}(\varkappa_i(Q))(\omega - \varkappa_i(Q))^s\right| < c(n) H^{1-p_s-sw+sp_1-s+\frac{sn}{T}} =$$
$$= c(n) H^{-w+\frac{n}{T}-(s-1)(w+1)+\frac{(s-1)n}{T}+sp_1-p_s}. \tag{42}$$

Из неравенства (33) и неравенства $\frac{l_s}{T} \leqslant \frac{l_t}{T}$ для $s > t$ следует, что

$$(s-1)(w+1) + p_s \geqslant (s-1)p_1 + (s-1)\frac{l_2}{T} + p_s \geqslant sp_1. \tag{43}$$

Неравенства (42) и (43) дают для любого $s \geqslant 3$:

$$\left|\frac{1}{s!} Q^{(s)}(\varkappa_i(Q))(\omega - \varkappa_i(Q))^s\right| < c(n) H^{-w+\frac{\varepsilon}{20}}.$$

Последнее неравенство вместе с разложением (38) и неравенствами (39), (41) доказывает лемму.

§ 4. Доказательство теоремы мы начнем с двух простых лемм.

ЛЕММА 10. *Пусть* $B(\delta, t_1, t_2)$ — *множество вещественных векторов* $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, *для которых система неравенств* (16) *имеет бесконечное число решений в полиномах* $P(x) \in P_n$ *с условием* $|\varkappa_i - \varkappa_j| > \delta$ *для любых* i, j *и некоторого произвольного, но фиксированного* $\delta > 0$. *Тогда для любого* δ *имеем* $\operatorname{mes} B(\delta, t_1, t_2) = 0$.

Доказательство. При фиксированном $P(x) \in P_n(H)$ любое $\omega_1 \in S(\varkappa_i)$, для которого выполняется первое из неравенств (16), удов-

летворяет по лемме 5 неравенству

$$|\omega_1 - \varkappa_i| < c(n) \frac{|P(\omega_1)|}{H|\varkappa_i - \varkappa_{i_2}| \cdots |\varkappa_i - \varkappa_{i_n}|},$$

откуда, используя условия леммы, получаем:

$$|\omega_1 - \varkappa_i| < c(n)\delta^{-(n-1)} H^{-\frac{t_1}{T}-1}. \tag{44}$$

Аналогично, для $\omega_2 \in S(\varkappa_j)$ и удовлетворяющих второму из неравенств системы (16), находим:

$$|\omega_2 - \varkappa_j| < c(n)\delta^{-(n-1)} H^{-\frac{t_2}{T}-1}. \tag{45}$$

Из (44) и (45) получаем, что мера тех $\overline{\omega}$, для которых выполняется система неравенства (16), не превосходит

$$c(n)\delta^{-2(n-1)} H^{-\frac{t_1+t_2}{T}-2}.$$

Число полиномов $P(x) \in P_n(H)$ не превосходит $c(n)H^n$, поэтому суммарная мера $\overline{\omega}$, для которых (16) выполняется хотя бы для одного $P(x) \in P_n(H)$, не превосходит

$$f(n, H) = c(n)\delta^{-2n-1)} H^{-\frac{t_1+t_2}{T}-2+n}.$$

Так как $\frac{t_1+t_2}{T} > n - 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, то $f(n, H) < c(n)\delta^{-2(n-1)} H^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$. Теперь ясно, что ряд $\sum\limits_H f(n, H)$ сходится, и для окончания доказательства леммы 10 осталось применить известную лемму Бореля — Кантелли.

ЛЕММА 11. *Пусть $B_2(t_1, t_2)$ — множество тех $\overline{\omega}$, для которых система неравенств* (16) *имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in P_2$. Тогда* $\operatorname{mes} B_2(t_1, t_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varkappa_1(P)$ и $\varkappa_2(P)$ — корни $P(x) \in P_2(H)$. Тогда если система (16) выполняется бесконечно часто для полиномов $P(x) \in P_2(H)$ с условием $|\varkappa_1(P) - \varkappa_2(P)| > \delta$, $\delta > 0$, то $\operatorname{mes} B_2(t_1, t_2) = 0$ по лемме 10. Если такого δ найти нельзя, то $|\varkappa_1(P) - \varkappa_2(P)| < \delta$ для любого $\delta > 0$ и $H > H_0(\delta)$.

В этом случае все $\overline{\omega}$, для которых выполняется система неравенств (16) при $H > H_0(\delta)$, находятся от прямой $\omega_1 = \omega_2$ на расстоянии, не превосходящем $c(n)\delta$. Поэтому $\operatorname{mes} B_2(t_1, t_2) = 0$ и в этом случае.

Совершенно аналогично получаем, что меру нуль имеет любое множество $\overline{\omega}$, для которых система (16) выполняется бесконечно часто в полиномах $P(x) \in P_n$ с условием $|\varkappa_i(P) - \varkappa_j(P)| \leqslant \delta$ для любого $\delta > 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$|\varkappa_i(P) - \varkappa_j(P)| > \delta$$

для некоторого произвольного, но фиксированного $\delta > 0$.

Наши дальнейшие рассмотрения будут зависеть от величины k_1+k_2. Будем считать далее, что

$$k_1 \geqslant 0, \qquad k_2 \geqslant 0. \tag{46}$$

ЛЕММА 12. *Пусть* $k_1+k_2 \leqslant T+2n+2$. *Тогда мера тех* $\bar{\omega}=(\omega_1, \omega_2)$, *для которых система* (19) *имеет бесконечное число решений, равна нулю.*

Доказательство. Из определения k_1 следует, что в интервале $\tau_P\left(\frac{t_1-k_1-1}{T}\right)$ содержатся как точки $S(\varkappa_i)$, так и точки $S(\varkappa_l)$ $(l \neq i)$. Пусть

$$\omega_1 \in \tau_P\left(\frac{t_1-k_1-1}{T}\right) \cap S(\varkappa_l).$$

Тогда по определению $\tau_P\left(\frac{t_1-k_1-1}{T}\right)$ имеем:

$$|\omega_1-\varkappa_i| \leqslant 2^n H^{-\frac{t_1-k_1-1}{T}-1+p_1+\frac{n-1}{T}}. \tag{47}$$

С другой стороны, $|\omega_1-\varkappa_l| < |\omega_1-\varkappa_i|$ в силу определения множеств $S(\varkappa_l)$. Из (47) получаем:

$$|\varkappa_i-\varkappa_{i_2}| \leqslant |\varkappa_i-\varkappa_l| \leqslant |\omega_1-\varkappa_i|+|\omega_1-\varkappa_l| <$$
$$< 2|\omega_1-\varkappa_i| \leqslant 2^{n+1} H^{-\frac{t_1-k_1-1}{T}-1+p_1+\frac{n-1}{T}}. \tag{48}$$

Так как

$$|\varkappa_i-\varkappa_{i_2}| \geqslant H^{-\frac{l_2+1}{T}}, \tag{49}$$

то из (48) и (49) находим:

$$\frac{l_2}{T} > \frac{w_1+1+p_2-\frac{n}{T}}{2}, \tag{50}$$

где $w_1 = \frac{t_1-k_1-1}{T}$.

Аналогично, если воспользоваться определением k_2, то получим:

$$\frac{s_2}{T} > \frac{w_1+1-q_2-\frac{n}{T}}{2}, \tag{51}$$

где $w_2 = \frac{t_2-k_2-1}{T}$.

Пусть w_1 и w_2 таковы, что

$$w_1 > \frac{2n}{T}-1, \quad w_2 > \frac{2n}{T}-1. \tag{52}$$

Покажем, что существуют два целых числа m и r ($2\leqslant m\leqslant n-1$, $2\leqslant r\leqslant n-1$), для которых справедлива система неравенств

$$\frac{l_m}{T}>\frac{w_1+1-p_m-\frac{n}{T}}{m}\geqslant\frac{l_{m+1}}{T}, \tag{53}$$

$$\frac{s_r}{T}>\frac{w_2+1-q_r-\frac{n}{T}}{r}\geqslant\frac{s_{r+1}}{T}. \tag{54}$$

При $m=2$ левая часть неравенства (53) следует из (50). Если теперь

$$\frac{w_1+1-p_2-\frac{n}{T}}{2}\geqslant\frac{l_3}{T}, \tag{55}$$

то неравенство (53) справедливо при $m=2$. Если

$$\frac{l_3}{T}>\frac{w_1+1-p_2-\frac{n}{T}}{2},$$

то, полагая $p_2=\frac{l_3}{T}+p_3$, придем к неравенству $3\frac{l_3}{T}>w_1+1-p_3-\frac{n}{T}$ и $\frac{l_3}{T}>\frac{w_1+1-p_3-\frac{n}{T}}{3}$. Если теперь окажется, что

$$\frac{w_1+1-p_3-\frac{n}{T}}{3}\geqslant\frac{l_4}{T},$$

то получим, что неравенство (53) справедливо при $m=3$. В противном случае перейдем к неравенству

$$\frac{l_4}{T}>\frac{w_1+1-p_4-\frac{n}{T}}{3}$$

и т. д. Ясно, что в конце концов мы придем к m, для которого (53) справедливо, так как $|\varkappa_i-\varkappa_j|>\delta$ и, значит, для некоторого $m\leqslant n-1$ $\frac{l_s}{T}<\frac{1}{T}$, $p_{s-1}<\frac{s-2}{T}$ для всех $s\geqslant m$. Аналогично, можно обосновать существование r, для которого справедливо неравенство (54).

Рассмотрим множество полиномов

$$P_n(t)=\bigcup_{2^t\leqslant H<2^{t+1}}P_n(H,\bar{s},\bar{k}).$$

Пусть $\varkappa_l(P)$ — корни $P(x)\in P_n(t)$ и $\varkappa_s(Q)$ — корни $Q(x)\in P_n(t)$, $h=2^t$.

Предположим, что

$$|\varkappa_i(P)-\varkappa_i(Q)|<h^{-\frac{w_1+1-p_m-\frac{n}{T}}{m}}, \tag{56}$$

$$|\varkappa_j(P)-\varkappa_j(Q)|<h^{-\frac{w_2+1-q_r-\frac{n}{T}}{r}}. \tag{57}$$

Тогда из неравенств

$$\frac{l_2}{T}\geqslant\frac{l_3}{T}\geqslant\ldots\geqslant\frac{l_m}{T}>\frac{w_1+1-p_m-\frac{n}{T}}{m}$$

и (56) следует, что

$$\begin{aligned}|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_{i_b}(Q)|&\leqslant|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_i(P)|+|\varkappa_{i_b}(Q)-\varkappa_i(P)|\leqslant\\&\leqslant|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_i(P)|+|\varkappa_{i_b}(Q)-\varkappa_i(Q)|+|\varkappa_i(P)-\varkappa_i(Q)|\leqslant\\&\leqslant 3h^{-\frac{w+1-p_m-\frac{n}{T}}{m}}\end{aligned} \tag{58}$$

для любых g и b ($2\leqslant g\leqslant m$, $2\leqslant b\leqslant m$). Поэтому из (58) получаем, считая $\varkappa_i(P)=\varkappa_{i_1}(P)$, $\varkappa_i(Q)=\varkappa_{i_1}(Q)$:

$$\prod_{1\leqslant g,b\leqslant m}|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_{i_b}(Q)|<c(n)h^{-m\left(w_1+1-p_m-\frac{n}{T}\right)}. \tag{59}$$

При $g\leqslant m$ и $b>m$ из неравенства (53) следует:

$$\begin{aligned}|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_{i_b}(Q)|&\leqslant|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_i(P)|+|\varkappa_i(P)-\varkappa_i(Q)|+\\&+|\varkappa_i(Q)-\varkappa_{i_b}(Q)|<c(n)h^{-\frac{l_b}{T}}.\end{aligned} \tag{60}$$

Неравенство, аналогичное (60), получаем и при $g>m$ и $b\leqslant m$:

$$|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_{i_b}(Q)|<c(n)h^{-\frac{l_g}{T}}. \tag{61}$$

Из (60) и (61) следует:

$$\prod_{\max(g,b)>m}|\varkappa_{i_g}(P)-\varkappa_{i_b}(Q)|<c(n)h^{-2mp_m}. \tag{62}$$

Если сейчас воспользоваться неравенствами

$$\frac{s_2}{T}\geqslant\frac{s_3}{T}\geqslant\ldots\geqslant\frac{s_r}{T}>\frac{w_2+1-q_r}{r}$$

и неравенствами (54), (57), то получим результаты, аналогичные (59) и (62):

$$\prod_{1\leqslant h,a\leqslant r}|\varkappa_{j_h}(P)-\varkappa_{j_a}(Q)|<c(n)h^{-r\left(w_2+1-q_r-\frac{n}{T}\right)}, \tag{63}$$

$$\prod_{\max(h,a)>r}|\varkappa_{j_h}(P)-\varkappa_{j_a}(Q)|<c(n)h^{-2rq_r}. \tag{64}$$

В произведения (59) и (63), (62) и (64) входят различные сомножители, если рассматривать только сомножители, не превосходящие $h^{-\frac{1}{n^2T}}$, так как в противном случае нетрудно получить, что $|\varkappa_i(P)-\varkappa_j(P)|<$ $<h^{-\frac{c(n)}{T}}$ вопреки условию $|\varkappa_i(P)-\varkappa_j(P)|>\delta$. Поэтому произведение левых частей неравенств (59), (62), (63) и (64) не менее произведения

$$c(n)\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\varkappa_i(P)-\varkappa_j(Q)|h^{-\frac{1}{T}},$$

которое незначительно отличается от результанта $R(P, Q)$ полиномов $P(x)$ и $Q(x)$. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней, поэтому $|R(P, Q)|\geqslant 1$. С другой стороны, из неравенств (59), (62), (63) и (64) получаем, учитывая что $p_i>-\frac{n}{T}$:

$$1\leqslant|R(P, Q)|\leqslant H^n(P)H^n(Q)\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\varkappa_i(P)-\varkappa_j(Q)|h^{-\frac{1}{T}}h^{\frac{1}{T}}\leqslant$$

$$\leqslant c(n)2^{2n(t+1)}h^{-m\left(w_1+1-p_m-\frac{n}{T}\right)-2mp_m-r\left(w_2+1-q_r-\frac{n}{T}\right)-2rq_r}h^{\frac{1}{T}}<$$

$$<c(n)2^{t\left(2n-m(w_1+1)-r(w_2+1)+\frac{2mn+2rn+1}{T}\right)}<c(n)2^{t\left(2n-2(w_1+w_2+2)+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{1}{T}\right)}. \quad (65)$$

Так как

$$w_1+w_2+2=\frac{t_1+t_2}{T}+2-\frac{k_1+k_2+2}{T}\geqslant n+\frac{\varepsilon}{4},$$

то при подходящем $t>t_0(n, \varepsilon)$ неравенство (65) противоречиво. Поэтому в прямоугольнике

$$\begin{cases}|\omega_1-\varkappa_i(P)|<h^{-\frac{w_1+1-p_m-\frac{n}{T}}{m}},\\ |\omega_2-\varkappa_j(P)|<h^{-\frac{w_2+1-q_r-\frac{n}{T}}{r}}\end{cases}$$

нет корней $\varkappa_i(Q)$, $\varkappa_j(Q)$ никакого другого полинома $Q(x)\in P_n(t)$. Это значит, что число полиномов $P(x)\in P_n(t)$, для которых выполняются неравенства (50), (51), не превосходит

$$c(n)2^{t\left(\frac{w_1+1-p_m-\frac{n}{T}}{m}+\frac{w_2+1-q_r-\frac{n}{T}}{r}\right)}. \quad (66)$$

Из неравенства (21) получаем, что мера тех $\omega_1\in S(\varkappa_i)$, для которых выполняется первое неравенство системы (16), не превосходит

$$c(n)2^{-t\left(\frac{t_1+T-n}{T}-p_m\right)/m}, \quad (67)$$

а мера тех $\omega_2 \in S(\varkappa_j)$, для которых выполняется второе неравенство системы (16), не превосходит

$$c(n)\,2^{-t\left(\frac{t_2+T-n}{T}-q_r\right)/r}. \tag{68}$$

По (67) и (68) мера $\overline{\omega}=(\omega_1, \omega_2)$ $(\omega_1 \in S(\varkappa_i),\ \omega_2 \in S(\varkappa_j))$, для которых выполняется система неравенств (16), не превосходит

$$c(n)\,2^{-t\left(\left(\frac{t_1+T-n}{T}-p_m\right)/m+\left(\frac{t_2+T-n}{T}-q_r\right)/r\right)}. \tag{69}$$

Из (66) и (69) заключаем, что мера тех $\overline{\omega}=(\omega_1, \omega_2)$, для которых выполняется (16) хотя бы для одного полинома $P(x) \in P_n(t)$, не превосходит

$$c(n)2^{-t\left(\frac{k_1+1}{mT}+\frac{k_2+1}{rT}\right)} < c(n)\,2^{-\frac{2t}{Tn}}. \tag{70}$$

Так как ряд $\sum\limits_t 2^{-t}$ сходится при любом $\mu>0$, то лемма 12 следует теперь из неравенства (70) и леммы Бореля — Кантелли.

Если не выполнено условие (52), т. е., например, $w_1 \leqslant \frac{2n}{T}-1$, то мы придем к неравенству $\frac{t_2}{T} > n-1+\frac{\varepsilon}{4}$, означающему, что

$$|P(\omega_2)| < H^{-(n-1)-\frac{\varepsilon}{4}}. \tag{71}$$

Неравенство (71) при выполнении условия (51) имеет бесконечное число решений только для множества нулевой меры (§ 3 главы 3 из ([5])). Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 13. *При $k_1+k_2>T+2n+2$ система неравенств* (19) *имеет бесконечное число решений лишь на множестве нулевой меры.*

Доказательство. Заметим, что из определения k_1 и k_2 следует:

$$\frac{t_1-k_1}{T} \geqslant -1, \quad \frac{t_2-k_2}{T} \geqslant -1. \tag{72}$$

Не умаляя общности, будем считать, что $k_2>k_1$. Определим k_1' из равенства

$$k_1' = \min(k_1,\ T+n+2).$$

Пусть $k_1<T+n+2$. Тогда $k_1'=k_1$. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-\frac{t_1-k_1}{T}}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-\frac{t_2-k_3}{T}}, \\ \omega_1 \in S(\varkappa_i), \quad \omega_2 \in S(\varkappa_j), \end{cases} \tag{73}$$

где $k_3=T-k_1+2n+2$. Поскольку $k_1 \geqslant 0$ и $k_3 \geqslant 0$, то любое решение системы неравенств (19) является решением системы неравенств (73). Из

определения k_1 следует, что для всех $\omega_1 \in \tau_P\left(\frac{t_1-k_1}{T}\right)$ выполняется неравенство

$$|\omega_1 - \varkappa_i| < |\varkappa_i - \varkappa_{i_2}|,$$

так как в круге

$$|\omega_1 - \varkappa_i| < 2^n \frac{H^{-\frac{t_1-k_1}{T}}}{|P'(\varkappa_i)|}$$

нет не только $\varkappa_{i_2}$, но и $\omega_1 \in S(\varkappa_{i_2})$. Если взять ω_1 на границе круга и использовать лемму 6, то получим:

$$c(n)\frac{H^{-\frac{t_1-k_1}{T}}}{|P'(\varkappa_i)|} < |\omega_1 - \varkappa_i| < |\varkappa_i - \varkappa_{i_2}| \leqslant H^{-\frac{l_2}{T}},$$

откуда

$$\frac{l_2}{T} < \frac{t_1 - k_1 + T(1-p_2)}{2T}. \tag{74}$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{s_2}{T} < \frac{t_2 - k_2 + T(1-q_2)}{2T},$$

а так как $k_3 < k_2$, то

$$\frac{s_2}{T} < \frac{t_2 - k_3 + T(1-q_2)}{2T}. \tag{75}$$

Будем рассматривать систему неравенств (73) с условиями (74) и (75). Пусть $Q(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{k})$ и для $Q(x)$ выполняются неравенства (74), (75) и система неравенств

$$\begin{cases} |Q(\omega_1)| < H^{-\frac{t_1-k_1}{T}}, \\ |Q(\omega_2)| < H^{-\frac{t_2-k_3}{T}}. \end{cases} \tag{76}$$

Все $\omega_1 \in S(\varkappa_i(P))$ и $\omega_2 \in S(\varkappa_j(P))$, для которых выполняется система неравенств (73), расположены внутри прямоугольника $T_P = \tau_P\left(\frac{t_1-k_1}{T}\right) \times \times \tau_P\left(\frac{t_2-k_3}{T}\right)$. Аналогично, все $\omega_1 \in S(\varkappa_i(Q))$ и $\omega_2 \in S(\varkappa_j(Q))$, для которых выполняется система неравенств (76), расположены внутри прямоугольника $T_Q = \tau_Q\left(\frac{t_1-k_1}{T}\right) \times \tau_Q\left(\frac{t_2-k_3}{T}\right)$. Пусть два прямоугольника T_P и T_Q пересекаются. Тогда

$$\tau_P\left(\frac{t_1-k_1}{T}\right) \cap \tau_Q\left(\frac{t_1-k_1}{T}\right) \neq \varnothing, \tag{77}$$

$$\tau_P\left(\frac{t_2-k_3}{T}\right) \cap \tau_Q\left(\frac{t_2-k_3}{T}\right) \neq \varnothing. \tag{78}$$

По лемме 9 из неравенств (74) и (77), (75) и (78) следует, что в любой точке $(\omega_1, \omega_2) \in T_P$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |Q(\omega_1)| < c(n)\, H^{-\frac{t_1-k_1}{T}+\frac{\varepsilon}{20}}, \\ |Q(\omega_2)| < c(n)\, H^{-\frac{t_2-k_3}{T}+\frac{\varepsilon}{20}}. \end{cases} \tag{79}$$

Из (73) и (79) получаем, что для полинома $R(x) = P(x) - Q(x)$ выполняется в T_P система неравенств

$$\begin{cases} |R(\omega_1)| < c(n)\, H^{-\frac{t_1-k_1}{T}+\frac{\varepsilon}{20}}, \\ |R(\omega_2)| < c(n)\, H^{-\frac{t_2-k_3}{T}+\frac{\varepsilon}{20}}. \end{cases} \tag{80}$$

Полином $R(x)$ имеет степень не выше $n-1$ и высоту $H(R) \leqslant 2H$. Сумма показателей степеней в системе неравенств (80) равна $-\frac{1}{T}(t_1 + t_2 - T - 2n - 2) + \frac{\varepsilon}{10}$, что не больше $-n-2-\frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому по индуктивному предположению (базой индукции является лемма 11) можно заключить, что мера тех $\bar{\omega}$, которые попадают в бесконечное число таких T_P, равна нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда прямоугольники T_P и T_Q не пересекаются ни при каких $P(x)$ и $Q(x)$ из $P_n(H, \bar{s}, \bar{k})$. Все эти прямоугольники можно заключить в квадрат $(-n-1, n+1) \times (-n-1, n+1)$, что следует из неравенств $|\varkappa_i| < n$ для корней полиномов из $P_n(H)$. Поэтому

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{k})} \operatorname{mes} T_P < c(n). \tag{81}$$

Все те $\omega_1 \in S(\varkappa_i)$, для которых выполняется первое неравенство системы (16), лежат внутри интервала $\tau_P\left(\frac{t_1}{T}\right)$, а те $\omega_2 \in S(\varkappa_j)$, для которых выполняется второе неравенство системы (16), лежат внутри интервала $\tau_P\left(\frac{t_2}{T}\right)$. Из неравенств

$$\operatorname{mes} \tau_P\left(\frac{t_1}{T}\right) < H^{-k_1/T} \operatorname{mes} \tau_P\left(\frac{t_1 - k_1'}{T}\right),$$

$$\operatorname{mes} \tau_P\left(\frac{t_2}{T}\right) < H^{-k_3/T} \operatorname{mes} \tau_P\left(\frac{t_2 - k_3}{T}\right),$$

которые непосредственно следуют из определения интервалов $\tau_P(w)$ и k_1, k_3, получаем:

$$\operatorname{mes}(\tau_P(t_1/T) \times \tau_P(t_2/T)) < H^{-\frac{k_1'+k_3}{T}} \times$$

$$\times \operatorname{mes}\left(\tau_P\left(\frac{t_1 - k_1'}{T}\right) \times \tau_P\left(\frac{t_2 - k_3}{T}\right)\right) \leqslant H^{-1-\frac{2n+2}{T}} \operatorname{mes} T_P. \tag{82}$$

Из неравенств (81) и (82) находим:

$$\sum_{H=1}^{\infty} \sum_{P\in P_n(H,\,\bar{s},\bar{k})} \operatorname{mes}(\tau_P(t_1/T)\times\tau_P(t_2/T))<$$

$$<\sum_{H=1}^{\infty} H^{-1-\frac{2n+2}{T}} \sum_{P\in P_n(H,\,\bar{s},\bar{k})} \operatorname{mes} T_P<\infty. \tag{83}$$

Теперь неравенство (83) и лемма Бореля — Кантелли приводят к доказательству леммы, если $k_1<T+n+2$.

Если $k_1'=T+n+2$, то вместо системы неравенств (73) будем рассматривать систему неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)|<H^{-\frac{t_1-\frac{T}{2}-n-1}{T}}, \\ |P(\omega_2)|<H^{-\frac{t_2-\frac{T}{2}-n-1}{T}}, \\ \omega_1\in S(\varkappa_i), \quad \omega_2\in S(\varkappa_j), \end{cases} \tag{84}$$

которая может быть рассмотрена аналогично системе неравенств (73), поскольку из неравенств (72) и неравенства $k_2\geqslant k_1\geqslant T+n+2$, получаем, что

$$\frac{t_1-\frac{T}{2}-n-1}{T}>-1, \quad \frac{t_2-\frac{T}{2}-n-1}{T}>-1.$$

Тем самым лемма 13 при условии (46) доказана.

Пусть условие (46) не выполнено. Тогда если $k_1<0$, а $k_2>T+2n+2$, то вместо системы неравенств (73) будем рассматривать систему неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)|<H^{-t_1/T}, \\ |P(\omega_2)|<H^{-\frac{t_2-T-n}{T}}, \\ \omega_1\in S(\varkappa_i), \quad \omega_2\in S(\varkappa_j). \end{cases} \tag{85}$$

Обозначим

$$r=\min\left(\frac{H^{-t_1/T}}{|P'(\varkappa_i)|},\ \min_{2\leqslant j\leqslant n}\left(2^n\frac{H^{-t_1/T}}{|P'(\varkappa_i)|}|\varkappa_i-\varkappa_{i_2}|\cdots|\varkappa_i-\varkappa_{i_j}|\right)^{1/j}\right),$$

а через $\tau_P'\left(\frac{t_1}{T}\right)$ — интервал, образованный пересечением круга $|z_1-\varkappa_i|<r$ с действительной осью. По лемме 5 все те $\bar{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$, для которых выполняется система неравенств (85), расположены внутри прямоугольника

$$T_P'=\tau_P'\left(\frac{t_1}{T}\right)\times\tau_P\left(\frac{t_2-T-n}{T}\right).$$

Если ни для каких двух многочленов $P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{k})$ и $Q(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{k})$ прямоугольники T_P' и T' не пересекаются, то рассуждаем,

как и при анализе системы неравенств (73), поскольку

$$\operatorname{mes} \tau_P\left(\frac{t_2}{T}\right) < H^{-1-\frac{n}{T}} \operatorname{mes} \tau_P\left(\frac{t_2-T-n}{T}\right).$$

Если два прямоугольника T'_P и T'_Q пересекаются, то пересекаются и интервалы

$$\tau_P\left(\frac{t_2-T-n}{T}\right),\ \tau_Q\left(\frac{t_2-T-n}{T}\right);\ \tau'_P\left(\frac{t_1}{T}\right),\ \tau'_Q\left(\frac{t_2}{T}\right).$$

Так как $k_2 > T+2n+2$, то

$$\frac{s_2}{T} < \frac{t_2-(T+n)+T(1-q_2)}{2}. \tag{86}$$

Используя лемму 9 и неравенство (86), получим что в любой точке $\omega_2 \in \tau_P\left(\frac{t_2-T-n}{T}\right)$ выполняется неравенство

$$|Q(\omega_2)| < c(n) H^{-\frac{t_2-T-n}{T}+\frac{\varepsilon}{20}}. \tag{87}$$

Из пересечения интервалов $\tau'_P\left(\frac{t_1}{T}\right)$ и $\tau'_Q\left(\frac{t_2}{T}\right)$ заключаем, что для любых двух точек $\omega'_1 \in \tau'_P\left(\frac{t_1}{T}\right)$ и $\omega''_1 \in \tau'_Q\left(\frac{t_1}{T}\right)$ справедливо неравенство, аналогичное (35):

$$|\omega'_1-\omega''_2| < 2 \max_{\omega\in\tau'_P\left(\frac{t_1}{T}\right)} |\omega-\varkappa_i(P)| + 2 \max_{\omega\in\tau'_Q\left(\frac{t_1}{T}\right)} |\omega-\varkappa_i(Q)| \leqslant$$

$$\leqslant c(n) \min_{1\leqslant j\leqslant n} H^{\left(-\frac{t_1-n}{T}-1+p'_j\right)/j}. \tag{88}$$

Запишем разложение $Q(x)$ по степеням $\omega-\varkappa_i(Q)$ для $\omega \in \tau'_P\left(\frac{t_1}{T}\right)$:

$$Q(\omega) = Q'(\varkappa_i(Q))(\omega-\varkappa_i(Q)) + \frac{Q''(\varkappa_i(Q))}{2}(\omega-\varkappa_i(Q))^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{Q^{(l)}(\varkappa_i(Q))}{l!}(\omega-\varkappa_i(Q))^l + \ldots + \frac{Q^{(n)}(\varkappa_i(Q))}{n!}(\omega-\varkappa_i(Q))^n. \tag{89}$$

Используя (88) и лемму 7, получаем:

$$\left|\frac{Q^{(l)}(\varkappa_i(Q))}{l!}(\omega-\varkappa_i(Q))^l\right| < c(n) H^{-\frac{t_1}{T}+\frac{n}{T}}. \tag{90}$$

Из (89) и (90) следует, что

$$|Q(\omega)| < c(n) H^{-\frac{t_1}{T}+\frac{n}{T}} \tag{91}$$

для всех $\omega \in \tau'_P\left(\frac{t_1}{T}\right)$. Неравенства (87) и (91) позволяют получить для многочлена $R(x)=P(x)-Q(x)$ во всех точках $\overline{\omega}=(\omega_1, \omega_2)\in T'_P$ систему

неравенств

$$\begin{cases} |R(\omega_1)| < H^{-\frac{t_1}{T}+\frac{n}{T}}, \\ |R(\omega_2)| < H^{-\frac{t_2}{T}+1+\frac{\varepsilon}{10}}, \end{cases}$$

которая аналогична системе неравенств (80).

Если теперь $k_1<0$ и $k_2<T+2n+2$, то будем рассуждать так, как при доказательстве леммы 12, только вместо неравенств (56), (57) рассмотрим неравенства

$$|\varkappa_i(P)-\varkappa_i(Q)| < h^{-\left(\frac{t_1-1}{T}+1-p_m-\frac{n}{T}\right)/m},$$

$$|\varkappa_j(P)-\varkappa_j(Q)| < h^{-\left(\frac{t_2-1}{T}+1-q_r-\frac{n}{T}\right)/r}$$

и дальше, как при доказательстве леммы 12.

§ 5. Доказательство теоремы в случае произвольного k требует незначительных изменений. Произойдет естественное обобщение леммы 11, являющейся базой индукции. Вместо двух чисел $m_1=k_1$ и $m_2=k_2$ придется ввести k чисел $m_1, \ldots, m_k$. Затем будем вести рассмотрение в зависимости от величины суммы $m_1+\ldots+m_k$. Вначале предположим, что

$$m_1+\ldots+m_k \leqslant T+kn+k, \quad m_1 \geqslant 0, \ldots, m_k \geqslant 0.$$

В этом случае теорему можно доказать, используя результант двух полиномов, имеющих близкие корни, как это сделано в лемме 12. Если

$$m_1+\ldots+m_k > T+kn+k,$$

то поступаем аналогично тому, как это сделано в лемме 13.

Случай, когда среди чисел $m_1, \ldots, m_k$ есть отрицательные, сводится с помощью изменений неравенств типа (56), (57) или к обобщению леммы 12 или к обобщению леммы 13.

В заключение отметим, что теорема может быть обобщена. Неравенство (1) можно рассматривать в комплексных, а также p-адических числах с естественными изменениями при нормировании произведения и $w_n(\omega_1, \ldots \omega_k)$. Также можно рассматривать задачу о приближении точки (покоординатно) корнями одного и того же многочлена. При этом можно будет получать результаты, аналогичные результатам Вирзинга ([7]), а для почти всех чисел $\overline{\omega}$ даже доказывать аналог его гипотезы.

Автор благодарит профессора В. Г. Спринджука за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Поступило
5.VI.1978

Литература

[1] **Гельфонд А. О.**, Трансцендентные и алгебраические числа, М., ГИТТЛ, 1952.

[2] **Слесорайтене Р.**, Теорема Малера — Спринджука для полиномов третьей степени от двух переменных (II), Литовск. матем. сб., 10, № 4 (1970), 791—814.

[3] **Спринджук В. Г.**, Метрические теоремы о диофантовых приближениях и приближениях алгебраическими элементами ограниченной степени, ЛГУ им. А. А. Жданова (1963) (диссертация).

[4] **Спринджук В. Г.**, Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел, Изв. АН СССР. Сер. матем., 29 (1965), 379—436.

[5] **Спринджук В. Г.**, Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, «Наука и техника», 1967.

[6] **Baker A.**, On Theorem of Sprindzuk, Proc. Royal Soc., A, 292, № 1428 (1966), 92—104.

[7] **Wirsing E.**, Approximation mit algebraischen Zahlen beschrankten Grades, J. reine und angewandte Math., 206, № 1—2 (1961), 67—77.