А. Л. Фельштын, Новая дзета-функция в теории Нильсена и универсальная формула произведения для динамических дзета-функций, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 90–91

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 90—91

УДК 517.53

НОВАЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ В ТЕОРИИ НИЛЬСЕНА И УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ

А. Л. Фельштын

1. Введение. Пусть всюду в дальнейшем M — гладкое компактное связное многообразие и f: $M \to M$ — непрерывное отображение. В теории дискретных динамических систем известны *дзета-функция Артина — Мазура* $\zeta_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (F(f^n)/n)\cdot z^n\right)$, где $F(f^n)$ — число изолированных неподвижных точек f^n; *дзета-функция Лефшеца* $L_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (L(f^n)/n)\cdot z^n\right)$, где $R(f^n) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \cdot \operatorname{tr}[f^n_{*K}: H_K(M, R) \to H_K(M, R)]$ — число Лефшеца f^n; *редуцированные* по mod 2 *дзета-функции Артина — Мазура и Лефшеца; крученные дзета-функции Лефшеца и Артина — Мазура*, коэффициенты которых принадлежат групповому кольцу ZH или Z_2H абелевой группы H [1].

В отличие от дзета-функции Артина — Мазура и ее модификаций, которые учитывают периодические точки геометрически, дзета-функции лефшецевского типа учитывают их алгебраически. Есть еще один способ учета периодических точек — по Нильсену [2]. Пусть p: $\tilde{M} \to M$ — универсальное накрытие M, а K — нормальная подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Рассмотрим регулярное накрытие p_K: $\tilde{M}/K \to M$, соответствующее K. Пусть $\tilde{f}_K$: $\tilde{M}/K \to \tilde{M}/K$ — отображение, накрывающее f, т. е. $p_K \circ f_K = \tilde{f}_K \circ p_K$. Как известно, $\tilde{f}_K$ существует, если $f_*(K) \subset K$, или более точно $f_*(K(m)) \subset K(f(m))$ для некоторой (а значит, для любой, так как K — нормальная подгруппа $\pi_1(M)$) точки $m \in M$. Включение $f_*(K) \subset K$ не будет ограничением на f, если K вполне инвариантная подгруппа $\pi_1(M)$ (т. е. любой эндоморфизм отображает K в K), например, если $K = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$ или K — тривиальная подгруппа. Два накрывающих отображения $\tilde{f}_K$ и $\tilde{f}'_K$ называются сопряженными, если существует скольжение $\gamma_K \in \Gamma_K = \pi_1(M)/K$ такое, что $\tilde{f}'_K = \gamma_K \circ \tilde{f}_K \circ \gamma_K^{-1}$. Подмножество $p_K(\operatorname{Fix}(\tilde{f}_K)) \subset \operatorname{Fix} f$ множества неподвижных точек f определяется классом сопряженных с $\tilde{f}$ отображений и называется mod K-классом неподвижных точек f. Mod K-класс f называется существенным, если его индекс не равен нулю. *Числом Нильсена по модулю нормальной подгруппы* (mod K-числом Нильсена) $KN(f)$ называется число существенных mod K-классов неподвижных точек f. Если K — тривиальная подгруппа, то $KN(f)$ это *число Нильсена* $N(f)$. Mod K-числа Нильсена были введены в 1940 г. Г. Хиршем [3] для оценки чисел Нильсена снизу. Основное свойство mod K-чисел Нильсена — их гомотопическая инвариантность: если отображение g: $M \to M$ гомотопно f, то $KN(f) = KN(g)$, при этом совпадают и mod K-числа Нильсена итераций $KN(f^n) = KN(g^n)$.

В настоящей заметке определяется *дзета-функция Нильсена по модулю нормальной подгруппы* как формальный степенной ряд $KN_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (KN(f^n)/n)\cdot z^n\right)$ и делается попытка ее изучения. Если нормальная подгруппа K тривиальна, новая дзета-функция совпадает с *дзета-функцией Нильсена*, введенной в [4; 5]. $KN_f(z)$ является гомотопическим инвариантом, а также инвариантом топологической сопряженности. В работе найдена точная оценка радиуса сходимости R дзета-функции $KN_f(z)$ через *топологическую энтропию* $h(f)$. В случае периодического отображения M для дзета-функций Артина — Мазура, Лефшеца и mod K-дзета-функции Нильсена доказывается *универсальная формула произведения.* Из этой формулы вытекает, что для периодического отображения mod K дзета-функция Нильсена либо *рациональна*, либо *радикал из рациональной функции.*

2. Радиус сходимости дзета-функции Нильсена по модулю нормальной подгруппы. Покажем, что $KN_f(z)$ имеет *положительный* радиус сходимости R. Пусть $h = \inf h(g)$ по всем g, гомотопным f.

Теорема 1. $R \geqslant \exp(-h) > 0$.

Доказательство. Неравенство $R \geqslant \exp(-h)$ вытекает из *неравенства Н. В. Иванова* $h(f) \geqslant \limsup_n \frac{1}{n} \log N(f^n)$ [6], неравенства $N(f^n) \geqslant KN(f^n)$, формулы Коши — Адамара и гомотопической инвариантности радиуса R mod K-дзета-функции Нильсена. Рассмотрим гладкое отображение g: $M \to M$, гомотопное f. Так как топологическая энтропия $h(g)$ конечна, то $\exp(-h) \geqslant \exp(-h(g)) > 0$.

3. Универсальная формула произведения для динамических дзета-функций периодического отображения. Пусть $A_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (A_n/n)\cdot z^n\right)$ — *абстрактная динамическая дзета-функция,* где A_n — это либо числа Лефшеца $L(f^n)$, либо числа $F(f^n)$, либо $\mathrm{mod}\ K$-числа Нильсена $KN(f^n)$. Пусть $\mu(d)$, $d \in N$,— *функция Мёбиуса* в теории чисел, т. е. $\mu(d) = 0$, если d делится на квадрат, отличный от единицы; $\mu(d) = (-1)^k$, если d не делится на квадрат, отличный от единицы, при этом k обозначает число простых делителей числа d; $\mu(1) = 1$.

Теорема 2. *Пусть f — периодическое отображение наименьшего периода p. Тогда $A_f(z) = \prod_{d\setminus p} \sqrt[d]{(1 - z^d)^{-S(d)}}$, где произведение берется по всем делителям d периода p, а $S(d)$ — целое число, равное $S(d) = \sum_{d_1\setminus d} \mu(d_1)\cdot A_{d/d_1}$.*

Доказательство. Так как $f^p = id$, то $A_j = A_{p+j}$ для $j = 1, 2, 3, \ldots$, при этом $F(f^{jp}) = 0$. Пусть $(k, p) = 1$, покажем, что $A_1 = A_k$. В силу взаимной простоты k и p существуют $t, q \in Z_+$ такие, что $k\cdot t = p\cdot q + 1$. Отсюда $(f^k)^t = f^{kt} = f^{pq+1} = (f^p)^q \circ f = f$. Так как $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Fix}(f^k)$ и $\mathrm{Fix}(f^k) \subset \mathrm{Fix}((f^k)^t) = \mathrm{Fix}(f)$, то $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f^k)$. Значит, и $F(f) = F(f^k)$. Кроме того, равны и *эйлеровы характеристики* многообразий неподвижных точек: $\chi(\mathrm{Fix}(f)) = \chi(\mathrm{Fix}(f^k))$. Но число Лефшеца $L(f^i)$ равно эйлеровой характеристике многообразия неподвижных точек f^i (см. Милнор [7, с. 81]). Отсюда $L(f) = L(f^k)$. Далее, пусть точки m_0 и m_1 принадлежат одному $\mathrm{mod}\ K$-классу неподвижных точек f. Как известно, тогда существует соединяющий их путь α такой, что $\alpha * (f \circ \alpha)^{-1} \in K$. Так как $f_*(K) \subset K$, то $f(\alpha * (f \circ \alpha)^{-1}) = (f \circ \alpha) * (f^2 \circ \alpha)^{-1} \in K$. Отсюда и произведение $\alpha * (f \circ \alpha)^{-1} * (f \circ \alpha) * (f^2 \circ \alpha)^{-1} = \alpha * (f^2 \circ \alpha)^{-1} \in K$. Итерируя этот процесс, получим, что $\alpha * (f^k \circ \alpha)^{-1} \in K$. Следовательно, m_0 и m_1 принадлежат одному $\mathrm{mod}\ K$-классу для f^k. Аналогично доказывается, что если m_0 и m_1 принадлежат различным $\mathrm{mod}\ K$-классам f, то они принадлежат различным $\mathrm{mod}\ K$-классам f^k. Отсюда $KN(f) \leqslant KN(f^k)$. Аналогично $KN(f^k) \leqslant KN(f^{kt}) = KN(f)$. Следовательно, $KN(f) = KN(f^k)$. Совершенно аналогично доказывается, что $A_d = A_{id}$, если $(i, m/d) = 1$. Используя эти *серии* равных чисел, прямым вычислением получаем

$$A_f(z) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (A_i/i)\cdot z^i\right) = \exp\left(\sum_{d\setminus p}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{S(d)}{d}\frac{(z^d)^i}{i}\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{d\setminus p} \frac{-S(d)}{d}\ln(1 - z^d)\right) = \prod_{d\setminus p} \sqrt[d]{(1 - z^d)^{-S(d)}},$$

где целые числа $S(d)$ вычисляются рекурсивно по формуле $S(d) = A_d - \sum_{d_1\setminus d;\ d_1\neq d} S(d_1)$.

Более того, если последнюю формулу переписать в виде $A_d = \sum_{d_1\setminus d} S(d_1)$ и и ользовать *закон обращения* в теории чисел, то $S(d) = \sum_{d_1\setminus d} \mu(d_1)\cdot A_{d/d_1}$. Теорема доказана.

В частности, если p — простое число, то $A_f(z) = \frac{1}{(1 - z)^{A_1}} \cdot \sqrt[p]{(1 - z^p)^{A_1 - A_p}}$.

Если $f = \mathrm{id}_M$, то $\zeta_f(z) = 1$, $L_f(z) = 1/(1 - z)^{\chi(M)}$, а $KN_f(z) = 1$, если $\chi(M) = 0$ и $KN_{\mathrm{id}}(z) = 1/(1 - z)$, если $\chi(M) \neq 0$.

Как следствие теоремы 2 получаем, что гипотеза Артина и Мазура об алгебраичности $\zeta_f(z)$ [8] верна для периодических отображений.

В заключение автор приносит благодарность В. Б. Пилюгиной, О. Я. Виро, Н. В. Иванову, В. Г. Тураеву за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fried D.* // L. N. in Math.—1983.— V. 1007.— P. 261—293. 2. *Boju Jano* // Contemp. Math.—1983.— V. 14.— P. 1—110. 3. *Hirsch G.* // Bull. Sci. Math. —1940.— V. 64.— P. 45—55. 4. *Фельштын А. Л.* // Тезисы докладов 10-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям.— Варна, 1984.— С. 208. 5. *Пилюгина В. Б., Фельштын А. Л.* // Функцион. анализ и его прил.—1985.— Т. 19, вып. 4.— С. 61—67. 6. *Иванов Н. В.* // ДАН СССР.— 1982.— Т. 265, № 2.— С. 284—286. 7. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971. 8. *Artin M., Mazur B.* // Ann. of Math.—1965.— V. 81, № 1.— P. 82—99.

Ленинградский технологический
институт им. Ленсовета

Поступило в редакцию
10 октября 1985 г.