Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. V. Voevodin, The asymptotic distribution of round-off errors in the factorization of a matrix and in the solution of systems of equations, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1969, Volume 9, Number 4, 932–934

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
`http://www.mathnet.ru/eng/agreement`

Download details:
IP: 18.97.9.169
March 23, 2025, 08:24:37

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 9 Июль 1969 Август № 4

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 518:512.25

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ МАТРИЦЫ НА МНОЖИТЕЛИ И РЕШЕНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В. В. ВОЕВОДИН

(Москва)

Пусть квадратные матрицы A порядка n распределены в некоторой выпуклой области R пространства n^2 измерений и $P(A) \geqslant c > 0$ есть непрерывная плотность распределения. Ниже результаты [1] распространяются на исследование ошибок округления как функций случайного аргумента A в процессах разложения матрицы на множители. В качестве частного результата исследуется распределение ошибок при решении систем линейных алгебраических уравнений. Всюду ниже, если не делается дополнительных оговорок, используются обозначения и терминология из [1].

Рассмотрим следующий вычислительный процесс. По матрице A строятся матрицы $A_r = U_r U_{r-1} \ldots U_1 A$, $r = 1, 2, \ldots, n$, следующим образом.

1. Матрицы U_r вычисляются по элементам r-го столбца матрицы A_{r-1} ($A_0 = A$) из условия обращения в нуль некоторых элементов r-го столбца матрицы A_r. При этом вычисления ведутся таким образом, что r-й столбец A_r не меняется от умножения на $U_{r+1}, \ldots, U_n$.

2. Матрицы U_r непрерывно зависят от A и вычисляются однозначно почти во всей области R.

Описанный процесс позволяет находить разложение матрицы на множители. Именно

$$A = U_1^{-1} \ldots U_n^{-1}(U_n \ldots U_1 A).$$

Матрица в скобках обычно треугольная или диагональная.

Как и в [1], мы будем исследовать лишь главный член эквивалентного возмущения разложения матрицы на множители, т. е. для каждого r-го столбца исследовать главный член ошибки, возникающей при первых $r-1$ преобразованиях. Мажорантные оценки нормы остальной части ошибки не превосходят [1, 2] математического ожидания нормы главного члена.

Обозначим через α_r прямоугольную матрицу, составленную из первых r столбцов матрицы A, через $\alpha_r^{(t)}$ — соответствующую матрицу для матрицы $A^{(t)}$, полученной из A округлением ее элементов до t знаков после запятой. Пусть $\sigma_{ir}^{(t)}$ есть главный член ошибки в r-м столбце при i-м преобразовании. При любых значениях α_{r-1} пусть r-й столбец принадлежит некоторой n-мерной области и распределен в ней с соответствующей плотностью условного распределения. Согласно [1] и предположениям относительно вычислительного процесса разложения матрицы будем иметь

$$\lim_{t\to\infty} P(\sigma_{1r}^{(t)} \subset S_1, \ldots, \sigma_{r-1,r}^{(t)} \subset S_{r-1}/\alpha_{r-1}^{(t)}) = \operatorname{mes} S_1 \ldots \operatorname{mes} S_{r-1} \tag{1}$$

почти для всех матриц α_{r-1}.

Сходимость (1) не будет, вообще говоря, равномерной по α_{r-1}. Тем не менее будет выполняться предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} P(\sigma_{1r}^{(t)} \subset S_1, \ldots, \sigma_{r-1,r}^{(t)} \subset S_{r-1}) = \tag{2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{\alpha_{r-1}^{(t)}} P(\alpha_{r-1}^{(t)}) P(\sigma_{1r}^{(t)} \subset S_1, \ldots, \sigma_{r-1,r}^{(t)} \subset S_{r-1}/\alpha_{r-1}^{(t)}) = \operatorname{mes} S_1 \ldots \operatorname{mes} S_{r-1}.$$

Доказательство соотношений типа (2) будет встречаться довольно часто, поэтому мы остановимся на нем несколько подробнее.

Зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$ и целое положительное число τ. Обозначим через $\alpha_\varepsilon^{(\tau)}$ такую сферу ненулевого радиуса с центром в α_{r-1}, что

$$P(\sigma_{1r}^{(t)} \subset S_1, \ldots, \sigma_{r-1,r}^{(t)} \subset S_{r-1}/\alpha_{r-1}^{(t)}) = \operatorname{mes} S_1 \ldots \operatorname{mes} S_{r-1} + O(\varepsilon)$$

для всех $\alpha_{r-1}^{(t)} \subset \alpha_\varepsilon^{(\tau)}$ при $t \geqslant \tau$. В силу непрерывной зависимости матриц $U_1, \ldots, U_{r-1}$ от α_{r-1} ясно [1], что при фиксированном ε почти для каждой матрицы α_{r-1} найдется соответствующее τ, при котором сфера $\alpha_\varepsilon^{(\tau)}$ будет непустой.

Пусть

$$R_\varepsilon^{(\tau)} = \bigcup_{\alpha_{r-1}} \alpha_\varepsilon^{(\tau)},$$

тогда

$$R_\varepsilon^{(\tau)} \subset R_\varepsilon^{(\tau+1)} \subset R_\varepsilon^{(\tau+2)} \subset \ldots \subset R.$$

Имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} \operatorname{mes} R_\varepsilon^{(\tau)} = \operatorname{mes} R, \tag{3}$$

так как в противном случае придем в противоречие с тем, что (1) выполняется почти для всех α_{r-1}.

Из (3) вытекает, что предельное соотношение (1) асимптотически выполняется равномерно на множестве, вероятность попадания в которое сколь угодно близка к единице. Следовательно, (2) имеет место.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для любой непрерывной отличной от нуля почти всюду плотности распределения $P(A)$ главный член эквивалентного возмущения в каждом столбце при разложении матрицы на множители есть сумма величин, асимптотически независимых и равномерно распределенных в параллелепипедах с центром в нуле и со сторонами длиной 2^{-t}.*

Если обозначить через ν главный член, то сформулированная теорема показывает, что для разложений матриц в произведение двух треугольных по методу Гаусса и в произведение ортогональной и треугольной по методу отражений [3] будем иметь

$$\lim_{t\to\infty} 2^{2t} M\|\nu\|_E{}^2 \leqslant \frac{n^3}{36}.$$

Аналогичные результаты получаются и при решении систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$. Пусть $P(A, b)$ — плотность совместного распределения A, b и μ — главный член эквивалентного возмущения в b. Согласно [1] почти для всех фиксированных A величина μ асимптотически будет суммой независимых равномерно распределенных величин.

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} 2^{2t} M\|\mu\|_E{}^2 \leqslant \frac{n^2}{24}.$$

Сами ν и μ асимптотически будут независимы между собой. Доказательства этих утверждений мало чем отличаются от рассмотренных выше, поэтому мы не будем на них останавливаться.

В заключение сделаем следующее замечание. Если мы заранее знаем меру обусловленности матрицы A, например величину $\|A\| \, \|A^{-1}\|$, то знание оценок эквивалентных возмущений позволяет a priori оценить точность вычисленного решения. Если же обусловленность матрицы A неизвестна, то точность решения всегда можно определить a posteriori.

В самом деле, процесс решения системы гарантирует, что вычисленное решение является точным для некоторой системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$ и мы знаем оценку элементов $A - \tilde{A}$ и $b - \tilde{b}$. Кроме этого, мы знаем точное разложение матрицы $\tilde{A}$ на множители, следовательно, можем оценить какую-либо меру ее обусловленности значительно проще, чем для матрицы A. Рассматривая исходную систему $Ax = b$ как возмущенную систему $\tilde{A}x = \tilde{b}$, мы можем оценить теперь разность решений этих систем, т. е. точность вычисленного решения.

Итак, исследование асимптотического распределения ошибок в решении систем приводит к необходимости искать распределение некоторых непрерывных почти всюду функций $\varphi(A, b, \nu, \mu)$. В этих исследованиях ошибки ν и μ асимптотически можно считать независимыми с A, b и между собой.

Поступила в редакцию 12.12.1967

Цитированная литература

1. В. В. Воеводин. Об асимптотическом распределении ошибок округления при линейных преобразованиях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 5, 965—976.
2. J. H. Wilkinson. The algebraic eigenvalue problem. Oxford, Clarendon Press, 1965.
3. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., Физматгиз, 1963.

УДК 518:512.25

О МЕТОДЕ РЕДУКЦИИ В ПРИМЕНЕНИИ К ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

А. А. КИРИЛЕНКО, С. А. МАСАЛОВ

(Харьков)

При решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на системе идеально проводящих скошенных полуплоскостей в работе [1] получена следующая бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_n:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma_n^+ - \omega_m} = \frac{1}{\Gamma_0^- + \omega_m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

где

$$\omega_m = \sqrt{[k^2 - (m / 2\cos\psi)^2]}, \quad \Gamma_n^{\pm} = \sqrt{(k^2 - \Phi_n^2)}\cos\psi \pm \Phi_n \sin\psi, \quad \Phi_n = n + k\sin\varphi.$$

Здесь ψ — угол между плоскостями решетки и нормалью к поверхности раздела, характеризующий, таким образом, асимметрию структуры; k и φ — параметры, связанные с падающей волной.

Аналогичные системы уравнений возникают и в других дифракционных задачах. В отличие от (1) они не могут быть решены аналитически. Возникает вопрос о применимости метода редукции к подобного рода системам уравнений.