М. Р. Пентус, Исчисление Ламбека и формальные грамматики, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 729–751

Исчисление Ламбека и формальные грамматики*

М. Р. ПЕНТУС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 519.766.23

Ключевые слова: исчисление Ламбека, категориальная грамматика, контекстно-свободная грамматика, интерполяционное свойство.

Аннотация

Доказано, что класс языков, распознаваемых категориальными грамматиками Ламбека, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

Abstract

M. R. Pentus, Lambek calculus and formal grammars, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 729–751.

We prove that the class of languages recognized by Lambek categorial grammars coincides with the class of all context-free languages.

Введение

Вопрос о месте категориальных грамматик в иерархии Хомского возник в конце 50-х — начале 60-х годов. В 1960 году Бар-Хиллел, Гайфман и Шамир [2] доказали, что формальный язык может быть задан некоторой базовой категориальной грамматикой тогда и только тогда, когда он является контекстно-свободным. Они высказали гипотезу о том, что то же самое имеет место для грамматик Ламбека, т. е. для категориальных грамматик, основанных на введенном в 1958 году И. Ламбеком [8] синтаксическом исчислении с тремя связками (умножение или конкатенация языков, левое деление и правое деление).

Доказательство одной половины вышеуказанной гипотезы (а именно, того, что любой контекстно-свободный язык задается некоторой грамматикой Ламбека) фактически совпадает с соответствующим доказательством для базовых категориальных грамматик. Вопрос об обратном включении оставался открытым в течение многих лет. В. Бушковским [4, 5, 6] были получены частичные результаты, относящиеся к фрагменту с одним делением и к фрагменту без умножения с ограничением на вложенность разносторонних делений.

*Работа поддержана грантом ISF № NFQ300.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 729–751.

В 1991 году И. ван Бентхем [3] указал на вышеупомянутую гипотезу как на одну из открытых проблем современной математической лингвистики.

С логической точки зрения, исчисление Ламбека представляет больший интерес, чем исчисление, на котором основаны базовые категориальные грамматики. В частности, в исчислении Ламбека допустимо правило замены эквивалентных подформул. Известно, что исчисление Ламбека вкладывается в некоторые фрагменты некоммутативной и циклической линейных логик.

В данной работе доказано, что категориальные грамматики, основанные на любом из перечисленных ниже исчислений:

- синтаксическое исчисление Ламбека,
- исчисление Ламбека с пустыми антецедентами.
- исчисление Ламбека с единицей,
- мультипликативный фрагмент циклической линейной логики,

порождают в точности все контекстно-свободные языки.

Доказано, что все элементарные фрагменты исчисления Ламбека обладают интерполяционным свойством Крейга.

1 Определения

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, включающее 0, и через $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.

Пусть $\mathcal{M}$ — непустое множество, называемое *алфавитом*, элементы которого будем называть *буквами*. Определим *слово* в алфавите $\mathcal{M}$ как конечную (возможно пустую) последовательность $t_1 t_2 \ldots t_n$ элементов из $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{M}^*$ множество всех слов в алфавите $\mathcal{M}$. Множество всех непустых слов в алфавите $\mathcal{M}$ будем обозначать через $\mathcal{M}^+$. Назовем *языком* произвольное множество слов.

1.1 Контекстно-свободные грамматики

Определение. *Контекстно-свободная грамматика* есть четверка $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$, где $\mathcal{T}$ и $\mathcal{W}$ — два непересекающихся конечных множества, σ — элемент множества $\mathcal{W}$, а $\mathcal{R}$ — конечное множество *контекстно-свободных правил* вида $\alpha \Rightarrow u$, где $\alpha \in \mathcal{W}$ и $u \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{W})^+$. Множество $\mathcal{T}$ называется *терминальным алфавитом*, а множество $\mathcal{W}$ — *вспомогательным алфавитом*. Символ σ называется *начальным символом*.

Слово w' *непосредственно выводимо* из слова w в грамматике $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$, если $w = v_1 \alpha v_2$, $w' = v_1 u v_2$ для некоторых $v_1, v_2 \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{W})^+$ и $\alpha \Rightarrow u$ есть правило из $\mathcal{R}$. Мы говорим, что w' *выводимо* из w в $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$, если существует последовательность $w_0, w_1, \ldots w_n$, такая, что $w_i \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{W})^*$, $w = w_0$, $w' = w_n$ и для каждого $i \leqslant n-1$ слово w_{i+1} непосредственно выводимо из слова w_i. *Языком, порожденным грамматикой* $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$ (обозначение: $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R})$), называется множество всех слов, выводимых в рассматриваемой грамматике из однобуквенного слова σ.

Замечание. Многие авторы в определении контекстно-свободной грамматики разрешают использовать правила вида $\alpha \Rightarrow \varepsilon$. Как известно, это различие несущественно. А именно, для любой контекстно-свободной грамматики, включающей правила вида $\alpha \Rightarrow \varepsilon$, можно эффективно построить такую контекстно-свободную грамматику в нашем смысле, что разность языков, порожденных этими грамматиками, либо пуста, либо содержит лишь пустое слово [1, стр. 295].

Определение. Язык называется *контекстно-свободным* (или *алгебраическим*), если существует контекстно-свободная грамматика, порождающая данный язык.

1.2 Исчисление Ламбека

Рассмотрим синтаксическое исчисление, введенное в [8]. Будем обозначать это исчисление через L и называть его исчислением Ламбека.

Предполагаем, что задано счетное множество

$$\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}.$$

Элементы этого множества будем называть *примитивными типами*. В язык исчисления Ламбека входят три бинарных оператора $\bullet$, $\backslash$, $/$, называемые соответственно *умножением*, *левым делением* и *правым делением*.

Как указано в монографии [3, стр. 31], это исчисление занимает центральное место в современных исследованиях по категориальным грамматикам.

Обозначим через Tp наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Tp}$;
- если $A \in \mathrm{Tp}$ и $B \in \mathrm{Tp}$, то $(A \bullet B) \in \mathrm{Tp}$, $(A \backslash B) \in \mathrm{Tp}$ и $(A/B) \in \mathrm{Tp}$.

Элементы множества Tp будем называть *синтаксическими типами* или просто *типами*.

В некоторых случаях будем опускать скобки, считая, что

- $A \bullet B \bullet C$ значит $(A \bullet B) \bullet C$;
- приоритет оператора $\bullet$ выше, чем операторов $\backslash$ и $/$.

Большими буквами A, B, $\ldots$ будем обозначать типы исчисления Ламбека, большими греческими буквами — конечные (возможно пустые) последовательности типов. Буквы p и q будут использоваться для обозначения примитивных типов. Пустую последовательность типов обозначим через Λ.

Секвенции исчисления Ламбека имеют вид $\Gamma \to A$, где A — произвольный тип и Γ — произвольная непустая последовательность типов. Левую часть секвенции будем называть *антецедентом*, а правую — *сукцедентом*.

Аксиомами исчисления Ламбека служат все секвенции вида $p_i \to p_i$, где $p_i \in \mathrm{Var}$.

Исчисление Ламбека имеет следующие правила:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A{\bullet}B}\ (\to \bullet), \qquad \frac{\Gamma A B \Delta \to C}{\Gamma(A{\bullet}B)\Delta \to C}\ (\bullet \to),$$

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A\backslash B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma\Pi(A\backslash B)\Delta \to C}\ (\backslash \to),$$

$$\frac{\Pi A \to B}{\Pi \to B/A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma(B/A)\Pi\Delta \to C}\ (/ \to),$$

$$\frac{\Pi \to B \quad \Gamma B \Delta \to A}{\Gamma\Pi\Delta \to A}\ (CUT).$$

Теорема об устранимости сечения для рассматриваемого исчисления доказана в [8].

Будем писать $\mathcal{C} \vdash \Gamma \to A$, если секвенция $\Gamma \to A$ выводима в исчислении $\mathcal{C}$. В частности, $L \vdash \Gamma \to A$ означает "секвенция $\Gamma \to A$ выводима в исчислении Ламбека".

1.3 Вспомогательные понятия

Определение. *Длину* $||A||$ типа A определим как количество вхождений в A примитивных типов:

$$||p_i|| \rightleftharpoons 1; \qquad ||A{\bullet}B|| = ||A\backslash B|| = ||A/B|| \rightleftharpoons ||A|| + ||B||.$$

Длина последовательности типов определяется естественным образом:

$$||A_1 \dots A_n|| \rightleftharpoons ||A_1|| + \dots + ||A_n||.$$

Определение. Обозначим множество всех примитивных типов, входящих в тип A, через $\mathrm{Var}(A)$.

Определение. Для каждого примитивного типа $p \in \mathrm{Var}$ определим два отображения $\#_p^+$ и $\#_p^-$ из множества Tp в множество $\mathbb{N}$ и еще одно отображение $\#_p$ из множества Tp в множество $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\#_p^+(q) & \rightleftharpoons & \begin{cases} 1, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } q \in \mathrm{Var} \text{ и } p \neq q, \end{cases} \\
\#_p^-(q) & \rightleftharpoons & 0, \quad \text{если } q \in \mathrm{Var}, \\
\#_p^+(A \bullet B) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A) + \#_p^+(B), \\
\#_p^-(A \bullet B) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A) + \#_p^-(B), \\
\#_p^+(A \backslash B) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A) + \#_p^+(B), \\
\#_p^-(A \backslash B) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A) + \#_p^-(B), \\
\#_p^+(A / B) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A) + \#_p^-(B), \\
\#_p^-(A / B) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A) + \#_p^+(B), \\
\#_p(A) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A) - \#_p^-(A).
\end{array}
$$

Распространим эти определения и на последовательности типов:

$$
\begin{array}{rcl}
\#_p^+(A_1 \ldots A_n) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A_1) + \ldots + \#_p^+(A_n), \\
\#_p^-(A_1 \ldots A_n) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A_1) + \ldots + \#_p^-(A_n), \\
\#_p(A_1 \ldots A_n) & \rightleftharpoons & \#_p(A_1) + \ldots + \#_p(A_n).
\end{array}
$$

1.4 Варианты исчисления Ламбека

Определение. Пусть дана некоторая сигнатура $\Sigma \subseteq \{\backslash, /, \bullet\}$. Обозначим через $\mathrm{Tp}(\Sigma)$ множество всех типов, содержащих операторы только из указанной сигнатуры.

Элементарным фрагментом исчисления L, соответствующим сигнатуре Σ, назовем исчисление, получаемое из L выбрасыванием всех типов, которые не принадлежат множеству $\mathrm{Tp}(\Sigma)$. Этот элементарный фрагмент обозначим $L(\Sigma)$.

Исчисление $L(\backslash, /)$ будем называть *исчислением Ламбека без умножения.*

Определение. Исчисление L^* (см. [3]) получается из первоначального исчисления L, если отбросить требование непустоты антецедента секвенции и условие $\Pi \neq \Lambda$ в правилах $(\to \backslash)$ и $(\to /)$.

Определим теперь исчисление $L^*_{\mathbf{1}}$ (исчисление Ламбека с единицей).

Определение. Обозначим через $\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$ наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\mathbf{1} \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$;
- $\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$;

• если $A \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$ и $B \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$, то $(A{\bullet}B) \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$, $(A\backslash B) \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$ и $(A/B) \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$.

Секвенции исчисления $L^*_{\mathbf{1}}$ имеют вид $\Gamma \to A$, где $A \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$ и $\Gamma \in (\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}})^*$.

Аксиомами исчисления $L^*_{\mathbf{1}}$ служат все секвенции вида $p_i \to p_i$, где $p_i \in \mathrm{Var}$, а также секвенция $\to \mathbf{1}$. Исчисление $L^*_{\mathbf{1}}$ имеет все правила исчисления L^* и, кроме того, правило $(\mathbf{1} \to)$:

$$\frac{\Gamma\Delta \to C}{\Gamma\mathbf{1}\Delta \to C}\ (\mathbf{1} \to).$$

1.5 Грамматики Ламбека

Определение. *Грамматика Ламбека* есть тройка $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$, где $\mathcal{T}$ — некоторое конечное множество (алфавит), H — тип исчисления Ламбека и $\triangleright$ — некоторое конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Tp} \times \mathcal{T}$.

Язык, порожденный грамматикой Ламбека $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех непустых слов $t_1 \ldots t_n$ в алфавите $\mathcal{T}$, для которых существует такая выводимая в исчислении Ламбека секвенция $B_1 \ldots B_n \to H$, что для любого $i \leqslant n$ выполняется $B_i \triangleright t_i$. Обозначим этот язык через $\mathcal{L}_L(\mathcal{T}, H, \triangleright)$.

Аналогично определяются и *категориальные грамматики*, основанные на других секвенциальных исчислениях. С целью унификации определений мы оговорим, что пустое слово не входит в языки, порожденные грамматиками, основанными на исчислении L^* или $L^*_{\mathbf{1}}$.

2 Интерпретация в свободной группе

Обозначим через $F(\mathrm{Var})$ свободную группу, порожденную счетным множеством примитивных типов $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Под свободной группой будем понимать ее реализацию множеством всех приведенных слов в алфавите Var', полученном из множества Var добавлением для каждого $p_i \in \mathrm{Var}$ новой буквы p_i^{-1}. Единицей построенной свободной группы $F(\mathrm{Var})$ является пустое слово ε.

Для каждого элемента $u \in F(\mathrm{Var})$ определим $|u|$ как длину приведенного слова для u.

Определение. *Интерпретацией в свободной группе* (будем обозначать ее $[\![\ ]\!]$) назовем следующее естественное отображение типов и их конечных последовательностей в группу $F(\mathrm{Var})$:

$$\begin{array}{rcl} [\![p_i]\!] & \rightleftharpoons & p_i, \\ [\![A{\bullet}B]\!] & \rightleftharpoons & [\![A]\!][\![B]\!], \\ [\![A\backslash B]\!] & \rightleftharpoons & [\![A]\!]^{-1}[\![B]\!], \\ [\![A/B]\!] & \rightleftharpoons & [\![A]\!][\![B]\!]^{-1}, \\ [\![A_1 \ldots A_n]\!] & \rightleftharpoons & [\![A_1]\!] \ldots [\![A_n]\!]. \end{array}$$

Лемма 1. *Для любого типа A справедливо неравенство* $|[\![A]\!]| \leqslant ||A||$.

Лемма 2. *Если секвенция $\Gamma \to C$ выводима в исчислении Ламбека, то* $[\![\Gamma]\!] = [\![C]\!]$.

3 Тонкие секвенции

В этой главе мы введем понятие “тонкой” секвенции и докажем, что каждая выводимая секвенция исчисления Ламбека получается из некоторой тонкой секвенции с помощью подстановки.

Определение. Секвенция $\Pi \to A$ называется *тонкой* тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathrm{Var}$ справедливы неравенства $\#_p^+(\Pi \to A) \leqslant 1$ и $\#_p^-(\Pi \to A) \leqslant 1$ (т. е. каждый примитивный тип встречается в данной секвенции самое большее один раз положительно и один раз отрицательно).

Определение. Назовем *подстановкой примитивных типов* любую функцию из Var в Var.

Каждой подстановке ϕ естественным образом сопоставляется функция из Tp в Tp, также обозначаемая ϕ:

$$\begin{array}{rcl} \phi(E{\bullet}F) & \rightleftharpoons & \phi(E){\bullet}\phi(F); \\ \phi(E\backslash F) & \rightleftharpoons & \phi(E)\backslash\phi(F); \\ \phi(E/F) & \rightleftharpoons & \phi(E)/\phi(F). \end{array}$$

Распространим отображение ϕ на секвенции следующим образом:

$$\phi(E_1 \dots E_m \to F) \rightleftharpoons \phi(E_1)\dots\phi(E_m) \to \phi(F).$$

Лемма 3. *Пусть ϕ — некоторая подстановка примитивных типов. Если в произвольном выводе исчисления Ламбека заменить каждую секвенцию $\Gamma \to C$ на $\phi(\Gamma \to C)$, то полученное дерево является выводом.*

Теорема 4. *Секвенция $\Pi \to A$ выводима в исчислении Ламбека тогда и только тогда, когда существует выводимая тонкая секвенция $\Theta \to B$ и найдется такая подстановка ϕ, что $\Pi \to A = \phi(\Theta \to B)$.*

Пример 1. Рассмотрим в качестве $\Pi \to A$ секвенцию

$$(p/p)\,p \to p/(p\backslash p).$$

Она имеет вывод

$$\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{p \to p \quad p \to p}{(p/p)\,p \to p}\,(/\to)}{(p/p)\,p\,(p\backslash p) \to p}\,(\backslash\to)}{(p/p)\,p \to p/(p\backslash p)}\,(\to/).$$

В качестве $\Theta \to B$ берется секвенция $(q_3/q_2)\, q_1 \to q_3/(q_1\backslash q_2)$. Положим

$$\phi(q_1) = p, \qquad \phi(q_2) = p, \qquad \phi(q_3) = p.$$

Имеем:

$$\dfrac{\dfrac{q_1 \to q_1 \qquad \dfrac{q_2 \to q_2 \quad q_3 \to q_3}{(q_3/q_2)\, q_2 \to q_3}\,(/\to)}{(q_3/q_2)\, q_1\, (q_1\backslash q_2) \to q_3}\,(\backslash\to)}{(q_3/q_2)\, q_1 \to q_3/(q_1\backslash q_2)}\,(\to/).$$

4 Интерполяция

В 1991 году, применяя метод Маехары и Шютте [14], Д. Роорда [12] доказал, что исчисление L^* обладает интерполяционным свойством Крейга. В статье [13] Д. Роорда отметил, что то же доказательство пройдет и в случае исчисления L.

Интерполяционное свойство в элементарных фрагментах исчисления Ламбека будет подробно изучено в главе 6.

4.1 Интерполяция в исчислении $L(\backslash, /, \bullet)$

Лемма 5. *Пусть $L \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$, где $\Phi \in \mathrm{Tp}^*$, $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$, $\Psi \in \mathrm{Tp}^*$ и $C \in \mathrm{Tp}$. Тогда существует такой тип E, что*

(i) $L \vdash \Theta \to E$;

(ii) $L \vdash \Phi E \Psi \to C$;

(iii) *для любого примитивного типа $p \in \mathrm{Var}$ имеет место неравенство* $\#_p^+(E) \leqslant \min(\#_p^+(\Theta), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Psi))$;

(iv) *для любого примитивного типа $p \in \mathrm{Var}$ имеет место неравенство* $\#_p^-(E) \leqslant \min(\#_p^-(\Theta), \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Psi))$.

Назовем тип E, удовлетворяющий условиям (i) — (iv), *интерполянтом* для последовательности Θ в секвенции $\Phi[\Theta]\Psi \to C$.

Замечание. Из (iii) и (iv) следует неравенство $\#_p^-(E) + \#_p^+(E) \leqslant \min(\#_p^-(\Theta) + \#_p^+(\Theta), \#_p^-(\Phi\Psi C) + \#_p^+(\Phi\Psi C))$.

Следствие 6. *Пусть $L \vdash A \to C$, где $A \in \mathrm{Tp}$ и $C \in \mathrm{Tp}$. Тогда существует такой тип E, что*

(i) $L \vdash A \to E$;

(ii) $L \vdash E \to C$;

(iii) $\mathrm{Var}(E) \subseteq \mathrm{Var}(A) \cap \mathrm{Var}(C)$.

Пример 2. Рассмотрим выводимую секвенцию

$$p_1{\bullet}(p_1\backslash p_2) \to (p_3/p_2)\backslash p_3.$$

Здесь $\mathrm{Var}(p_1{\bullet}(p_1\backslash p_2)) \cap \mathrm{Var}((p_3/p_2)\backslash p_3) = \{p_1, p_2\} \cap \{p_2, p_3\} = \{p_2\}$. Интерполянтом данной секвенции является тип $E = p_2$. Действительно,

$$L \vdash p_1{\bullet}(p_1\backslash p_2) \to p_2$$

и

$$L \vdash p_2 \to (p_3/p_2)\backslash p_3.$$

4.2 Интерполяционное свойство для тонких секвенций

Лемма 7. *Пусть $L \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$, где $\Phi \in \mathrm{Tp}^*$, $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$, $\Psi \in \mathrm{Tp}^*$, $C \in \mathrm{Tp}$ и секвенция $\Phi\Theta\Psi \to C$ является тонкой. Тогда существует такой тип E, что*

(i) $L \vdash \Theta \to E$;

(ii) $L \vdash \Phi E \Psi \to C$;

(iii) *секвенция $\Theta \to E$ является тонкой;*

(iv) *секвенция $\Phi E \Psi \to C$ является тонкой;*

(v) $||E|| = |[\![\Theta]\!]|$.

Доказательство. Согласно лемме 5 существует тип E, удовлетворяющий условиям (i) и (ii). Докажем, что он удовлетворяет также (iii), (iv) и (v).

Рассмотрим произвольный примитивный тип p. Так как $\#_p^+(E) \leqslant \#_p^+(C)+$ $+\#_p^-(\Phi\Psi)$, то $\#_p^+(E)+\#_p^-(\Theta) \leqslant \#_p^+(C)+\#_p^-(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$ (последнее неравенство следует из того, что исходная секвенция $\Phi\Theta\Psi \to C$ является тонкой). Аналогично, $\#_p^-(E) + \#_p^+(\Theta) \leqslant \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$. Тем самым доказано (iii).

Условие (iv) проверяется аналогично.

Для установления (v) достаточно проверить, что $||E|| = |[\![E]\!]|$. Это очевидно, так как ни один примитивный тип не встречается в E более одного раза. ∎

5 Основная теорема

Результаты данной главы опубликованы в [10, 11].

5.1 Конструкция

Определение. Для любого натурального числа m определим множество ограниченных типов $\mathrm{Tp}(m)$ и множество ограниченных последовательностей типов $\mathrm{Ls}(m)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tp}(m) & \rightleftharpoons & \{A \in \mathrm{Tp} \mid \|A\| \leqslant m\}; \\ \mathrm{Ls}(m) & \rightleftharpoons & \{\Pi \in \mathrm{Tp}(m)^+ \mid \|\Pi\| \leqslant 2m\}. \end{array}$$

Определение. Для любых двух натуральных чисел m и q определим конечное множество типов $\mathrm{Tp}(m,q)$ и конечное множество последовательностей типов $\mathrm{Ls}(m,q)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tp}(m,q) & \rightleftharpoons & \{A \in \mathrm{Tp} \mid \mathrm{Var}(A) \subseteq \{p_1,\ldots,p_q\} \text{ и } \|A\| \leqslant m\}; \\ \mathrm{Ls}(m,q) & \rightleftharpoons & \{\Pi \in \mathrm{Tp}(m,q)^+ \mid \|\Pi\| \leqslant 2m\}. \end{array}$$

Рассмотрим произвольную грамматику Ламбека $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$. Поскольку определение языка, порождаемого этой грамматикой, затрагивает только конечное число типов, найдутся такие положительные целые числа m и q, что $H \in \mathrm{Tp}(m,q)$ и если $B \triangleright t$ для некоторого $t \in \mathcal{T}$, то $B \in \mathrm{Tp}(m,q)$.

Не уменьшая общности, можно считать, что множества $\mathcal{T}$ и $\mathrm{Tp}(m,q)$ не пересекаются. Построим теперь искомую контекстно-свободную грамматику $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \rightleftharpoons & \mathrm{Tp}(m,q), \\ \sigma & \rightleftharpoons & H, \\ \mathcal{R} & \rightleftharpoons & \{B \Rightarrow t \ \mid \ t \in \mathcal{T} \text{ и } B \triangleright t\} \cup \\ & & \quad \cup \{A \Rightarrow \Gamma \mid A \in \mathrm{Tp}(m,q), \Gamma \in \mathrm{Ls}(m,q), \text{ и } L \vdash \Gamma \to A\}. \end{array}$$

Цель данной главы — показать, что

$$\mathcal{L}_L(\mathcal{T}, H, \triangleright) = \mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R}).$$

Лемма 8. *Пусть $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$. Слово $t_1 \ldots t_n$ принадлежит языку $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R})$ тогда и только тогда, когда найдутся такие символы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{W}$, что $\sigma \Rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_n$ и для каждого $i \leqslant n$ $(\alpha_i \Rightarrow t_i) \in \mathcal{R}$.*

Доказательство. Легко убедиться, что любой вывод $\sigma \Rightarrow t_1 \ldots t_n$ в построенной контекстно-свободной грамматике $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$ можно перестроить так, чтобы все применения правил $B \Rightarrow t$, где $t \in \mathcal{T}$, шли после применений правил $A \Rightarrow \Gamma$, где $\Gamma \in \mathrm{Ls}(m,q)$. ■

5.2 Представление контекстно-свободной грамматики в виде исчисления

Определение. По заданной контекстно-свободной грамматике $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$ построим исчисление $C_2(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, выводимые объекты которого — секвенции вида $w \to \alpha$, где $w \in \mathcal{W}^+$ и $\alpha \in \mathcal{W}$.

- Для каждой буквы α исчисление $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$ содержит аксиому $\alpha \to \alpha$.
- Если $(\alpha \Rightarrow u) \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathcal{W}$ и $u \in \mathcal{W}^+$, то исчисление $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$ содержит аксиому $u \to \alpha$.
- Единственным правилом исчисления $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$ является правило сечения

$$\frac{u \to \alpha \quad v_1 \alpha v_2 \to \beta}{v_1 u v_2 \to \beta.}$$

Лемма 9. *Пусть* $w \in \mathcal{W}^+$. *Секвенция* $w \to \sigma$ *выводима в исчислении* $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$ *тогда и только тогда, когда слово* w *выводимо из* σ *в контекстно-свободной грамматике* $\langle \mathcal{T},\mathcal{W},\sigma,\mathcal{R}\rangle$.

5.3 Основная лемма

В этом параграфе будет установлена связь между исчислением Ламбека и исчислением $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$, соответствующим построенной в параграфе 5.1 контекстно-свободной грамматике.

Следующая вспомогательная лемма утверждает, по существу, что произвольная последовательность приведенных слов может сократиться до пустого слова только тогда, когда хотя бы одно из слов этой последовательности "потеряет" половину своих букв при сокращении с одним из своих соседей.

Лемма 10. *Если* $u_1,\ldots,u_n \in F(\mathrm{Var})$, $n{>}1$ *и* $u_1\ldots u_n = \varepsilon$, *то найдется индекс* $k{<}n$, *такой, что* $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max(|u_k|,|u_{k+1}|)$.

Для заданного натурального числа m определим вспомогательное исчисление $Lcut_m$, занимающее в некотором смысле промежуточное место между исчислениями L и $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$. А именно, исчисление $C_2(\mathcal{W},\mathcal{R})$ использует формулы из $\mathrm{Tp}(m,q)$, исчисление $Lcut_m$ — формулы из $\mathrm{Tp}(m)$, а исчисление L — формулы из Tp.

Определение. Секвенция $\Gamma \to A$ считается аксиомой исчисления $Lcut_m$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \Gamma \to A$, $A \in \mathrm{Tp}(m)$ и $\Gamma \in \mathrm{Ls}(m)$. Единственным правилом исчисления $Lcut_m$ является (CUT).

Лемма 11. *Пусть* $L \vdash \Pi \to C$, *где* $\Pi \in \mathrm{Ls}(m)$, $C \in \mathrm{Tp}(m)$, *и секвенция* $\Pi \to C$ *тонкая. Тогда* $Lcut_m \vdash \Pi \to C$.

Доказательство. Индукция по $||\Pi||$.

Если $||\Pi|| < 2m$, то $\Pi \to C$ является аксиомой исчисления $Lcut_m$.

Пусть $||\Pi|| \geqslant 2m$. Представим последовательность Π в виде конкатенации $\Pi \equiv \Pi_1 \ldots \Pi_l$, где

- для каждого $i \leqslant l$ имеет место неравенство $||\Pi_i|| \leqslant m$;
- для каждого $i < l$ имеет место неравенство $||\Pi_i|| + ||\Pi_{i+1}|| > m$.

Согласно лемме 2 имеем $[\![\Pi]\!] = [\![C]\!]$. Обозначим $u_1 \rightleftharpoons [\![\Pi_1]\!]$, $\ldots$, $u_l \rightleftharpoons [\![\Pi_l]\!]$, $u_{l+1} \rightleftharpoons [\![C]\!]^{-1}$. Очевидно, $u_1 \ldots u_l u_{l+1} = \varepsilon$. В силу леммы 10 найдется такой индекс $k \leqslant l$, что $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max(|u_k|, |u_{k+1}|)$.

Согласно лемме 1 для каждого $i < l$ имеет место неравенство $|u_i| \leqslant m$. Следовательно, $|u_k u_{k+1}| \leqslant m$.

Случай 1. Пусть $k < l$. Для этого значения k имеем $|[\![\Pi_k \Pi_{k+1}]\!]| \leqslant m$. Применив лемму 7, где

$$\underbrace{\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}}_{\Phi} \underbrace{\Pi_k \Pi_{k+1}}_{\Theta} \underbrace{\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l}_{\Psi} \to C,$$

найдем такой интерполянт E для последовательности $\Pi_k \Pi_{k+1}$ в секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_l \to C$, что $||E|| \leqslant m$ и выводимы тонкие секвенции $\Pi_k \Pi_{k+1} \to E$ и $\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1} E \Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C$.

Заметим, что $||E|| \leqslant m$, но $||\Pi_k \Pi_{k+1}|| > m$. Следовательно,

$$||\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1} E \Pi_{k+2} \ldots \Pi_l|| < ||\Pi_1 \ldots \Pi_l||$$

и можно применить предположение индукции к выводимой тонкой секвенции

$$\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1} E \Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C.$$

С другой стороны, секвенция $\Pi_k \Pi_{k+1} \to E$ является аксиомой исчисления $Lcut_m$, так как $||E|| \leqslant m$ и $||\Pi_k \Pi_{k+1}|| \leqslant 2m$.

Мы доказали, что

$$Lcut_m \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1} E \Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C$$

и

$$Lcut_m \vdash \Pi_k \Pi_{k+1} \to E.$$

Применяя правило сечения, получим, что

$$Lcut_m \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1} \Pi_k \Pi_{k+1} \Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C,$$

т. е. $Lcut_m \vdash \Pi \to C$.

Случай 2. Пусть $k = l$. Имеем $|[\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1}| \leqslant m$. Применив лемму 7, где

$$\underbrace{\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}}_{\Theta} \underbrace{\Pi_l}_{\Psi} \to C,$$

найдем интерполянт E для последовательности $\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}$ в секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_l \to C$, такой, что $||E|| = |[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!]|$ и выводимы тонкие секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1} \to E$ и $E \Pi_l \to C$.

Напомним, что $[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1} \Pi_l]\!] = [\![C]\!]$, откуда $[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!] = [\![C]\!][\![\Pi_l]\!]^{-1} = ([\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1})^{-1}$ и, далее, $|[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!]| = |([\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1})^{-1}| = |[\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1}| \leqslant m$.

Следовательно, $\|E\| = |[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!]| \leqslant m$. Получаем, что $E\Pi_l \in \mathrm{Ls}(m, q)$ и, следовательно, секвенция $E\Pi_l \to C$ является аксиомой исчисления $Lcut_m$.

С другой стороны, $\|\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}\| < \|\Pi_1 \ldots \Pi_l\|$. Осталось применить предположение индукции к тонкой выводимой секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1} \to E$.

Применяя правило сечения, получим, что

$$Lcut_m \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}\Pi_l \to C,$$

т. е. $Lcut_m \vdash \Pi \to C$. ■

Лемма 12. *Пусть* $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$ *— некоторая грамматика Ламбека, а* $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$ *— построенная по ней (см. 5.1) контекстно-свободная грамматика. Пусть* $\Gamma \in \mathcal{W}^+$, $A \in \mathcal{W}$. *Тогда равносильны следующие три утверждения:*

(i) $C_2(\mathcal{W}, \mathcal{R}) \vdash \Gamma \to A$;

(ii) $Lcut_m \vdash \Gamma \to A$;

(iii) $L \vdash \Gamma \to A$.

Доказательство. Импликация (i) $\longrightarrow$ (iii) легко проверяется индукцией по длине вывода в $C_2(\mathcal{W}, \mathcal{R})$.

Проверим, что (ii) $\longrightarrow$ (i). Определим подстановку примитивных типов

$$\phi_q(p_i) \rightleftharpoons \begin{cases} p_i, & \text{если } i \leqslant q, \\ p_1, & \text{если } i > q. \end{cases}$$

Применим ϕ_q ко всем секвенциям некоторого вывода данной секвенции $\Gamma \to A$ в $Lcut_m$. Полученное дерево является выводом в $C_2(\mathcal{W}, \mathcal{R})$.

Осталось проверить, что (iii) $\longrightarrow$ (ii). Пусть $L \vdash \Gamma \to A$, где $\Gamma \in \mathcal{W}^+$. Согласно теореме 4 существует выводимая тонкая секвенция $\Pi \to C$ и найдется такая подстановка ϕ, что $\Gamma \to A = \phi(\Pi \to C)$. Согласно лемме 11 $Lcut_m \vdash \Pi \to C$. Из этого следует, что и секвенция $\Gamma \to A$ выводима в исчислении $Lcut_m$. ■

5.4 Доказательство основной теоремы

Теорема 13. *Пусть* $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$ *— некоторая грамматика Ламбека. Тогда язык* $\mathcal{L}_L(\mathcal{T}, H, \triangleright)$ *является контекстно-свободным.*

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{L}_L(\mathcal{T}, H, \triangleright) = \mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R})$, где $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$ — построенная в пункте 5.1 контекстно-свободная грамматика.

Рассмотрим следующую цепочку равносильных утверждений.

(1) Слово $t_1 \ldots t_n$ принадлежит языку $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R})$.

(2) Найдутся такие типы $B_1, \ldots, B_n$, что $\sigma \Rightarrow B_1 \ldots B_n$ и для каждого $i \leqslant n$ $(B_i \Rightarrow t_i) \in \mathcal{R}$.

(3) Найдутся такие типы $B_1, \ldots, B_n$, что $C_2(\mathcal{W}, \mathcal{R}) \vdash B_1 \ldots B_n \to \sigma$ и для каждого $i \leqslant n$ справедливо $B_i \triangleright t_i$.

(4) Найдутся такие типы $B_1, \ldots, B_n$, что $L \vdash B_1 \ldots B_n \to \sigma$ и для каждого $i \leqslant n$ справедливо $B_i \triangleright t_i$.

(5) Слово $t_1 \ldots t_n$ принадлежит языку $\mathcal{L}_L(\mathcal{T}, H, \triangleright)$.

Равносильность (1) и (2) следует из леммы 8. При переходе от (2) к (3) мы воспользовались леммой 9 и конструкцией множества $\mathcal{R}$. Эквивалентность (3) и (4) следует из леммы 12. Наконец, (4) и (5) равносильны согласно определению языка, порожденного грамматикой Ламбека. ■

Следствие 14. *Произвольный язык порождается некоторой грамматикой Ламбека тогда и только тогда, когда он является контекстно-свободным.*

Замечание. Все приведенные рассуждения сохраняют силу также в случае исчисления Ламбека с единицей и в случае исчисления L^*. Следовательно, класс языков, порожденных категориальными грамматиками, основанными на любом из этих исчислений, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

6 Интерполяция в фрагментах

В этой главе мы введем понятие *обобщенного интерполяционного свойства* и изучим все элементарные фрагменты исчислений L и L^* относительно обычного и обобщенного интерполяционных свойств. В частности, будет доказана “слабая обобщенная интерполяционная теорема” для исчисления Ламбека без умножения, которая позволит нам в главе 7 доказать существование “естественной” контекстно-свободной грамматики для каждой категориальной грамматики, основанной на этом важном фрагменте исчисления Ламбека.

Определение. Пусть $\Sigma \subseteq \{\backslash, /, \bullet\}$ и $\mathcal{C}$ есть либо $L(\Sigma)$, либо $L^*(\Sigma)$. Скажем, что исчисление $\mathcal{C}$ *обладает интерполяционным свойством*, если для любой выводимой в $\mathcal{C}$ секвенции вида $A \to C$, где $A \in \mathrm{Tp}(\Sigma)$ и $C \in \mathrm{Tp}(\Sigma)$, найдется такой тип $B \in \mathrm{Tp}(\Sigma)$, что

(i) $\mathcal{C} \vdash A \to B$;

(ii) $\mathcal{C} \vdash B \to C$;

(iii) $\mathrm{Var}(B) \subseteq \mathrm{Var}(A) \cup \mathrm{Var}(C)$.

Определение. Пусть $\Sigma \subseteq \{\backslash, /, \bullet\}$ и $\mathcal{C}$ есть либо $L(\Sigma)$, либо $L^*(\Sigma)$. Скажем, что исчисление $\mathcal{C}$ *обладает обобщенным интерполяционным свойством*, если для любой выводимой в $\mathcal{C}$ секвенции $\Pi \to C$, где $\Pi \in \mathrm{Tp}(\Sigma)^*$ и $C \in \mathrm{Tp}(\Sigma)$, найдется такой тип $B \in \mathrm{Tp}(\Sigma)$, что

(i) $\mathcal{C} \vdash \Pi \to B$;

(ii) $\mathcal{C} \vdash B \to C$;

(iii) $\mathrm{Var}(B) \subseteq \mathrm{Var}(\Pi) \cup \mathrm{Var}(C)$.

Замечание. Очевидно, что если умножение входит в сигнатуру исчисления $\mathcal{C}$, то $\mathcal{C}$ обладает обобщенным интерполяционным свойством тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}$ обладает обыкновенным интерполяционным свойством (так как $\mathcal{C} \vdash A_1 \ldots A_n \to C$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{C} \vdash (A_1 \bullet \ldots \bullet A_n) \to C$).

Замечание. В силу дуальности сигнатур $\{\backslash\}$ и $\{/\}$, а также $\{\backslash, \bullet\}$ и $\{/, \bullet\}$ достаточно изучить фрагменты, основанные на сигнатурах $\{\backslash\}$, $\{\backslash, /\}$, $\{\bullet\}$, $\{\backslash, \bullet\}$ и $\{\backslash, /, \bullet\}$.

В 1991 году Д. Роорда доказал, что исчисления L^* и $L^*(\backslash, \bullet)$ обладают интерполяционным свойством [12, 13]. Вопросы об интерполяционном свойстве для фрагментов $L(\backslash)$, $L(\backslash, /)$, $L^*(\backslash)$ и $L^*(\backslash, /)$ приводятся в качестве открытых проблем [13, с. 440]. Заметим, что из результатов Д. Роорды легко следует, что интерполяционным свойством обладают исчисления $L^*(\bullet)$, $L(\bullet)$, L и $L(\backslash, \bullet)$.

Лемма 15. *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^*$, $\Theta \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^*$, $\Psi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^*$, $C \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ *и* $L \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$. *Тогда существуют натуральное число* $r \geqslant 0$, *последовательности типов* $\Theta_1, \ldots, \Theta_r \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+$ *и типы* $E_1, \ldots, E_r \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$, *такие, что*

(i) $\Theta_1 \ldots \Theta_r = \Theta$, *т. е. последовательность* Θ *разбита на* r *непустых непрерывных подпоследовательностей (если* $\Theta = \Lambda$, *то* $r=0$*);*

(ii) $L \vdash \Theta_j \to E_j$ *для любого* $j \leqslant r$*;*

(iii) $L \vdash \Phi E_1 \ldots E_r \Psi \to C$*;*

(iv) *для любого примитивного типа* $p \in \mathrm{Var}$ *имеют место неравенства* $\#_p^+(E_1 \ldots E_r) \leqslant \min(\#_p^+(\Theta), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Psi))$ *и* $\#_p^-(E_1 \ldots E_r) \leqslant \min(\#_p^-(\Theta), \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Psi))$.

Назовем последовательность типов $E_1 \ldots E_r$ *интерполянтом* для последовательности Θ в секвенции $\Phi\Theta\Psi \to C$.

Пример 3. Рассмотрим выводимую секвенцию

$$[p_1(p_1\backslash p_2)p_3](p_3\backslash(p_2\backslash p_4)) \to p_4,$$

где квадратными скобками выделена последовательность Θ. Применяя лемму 15, получим разбиение выделенной части

$$p_1(p_1\backslash p_2)p_3 \equiv \Theta_1\Theta_2,$$

где $\Theta_1 = p_1(p_1\backslash p_2)$ и $\Theta_2 = p_3$ (здесь $r{=}2$). Соответствующим интерполянтом является p_2p_3, т. е. $E_1 = p_2$ и $E_2 = p_3$. Действительно, $L \vdash p_1(p_1\backslash p_2) \to p_2$, $L \vdash p_3 \to p_3$ и $L \vdash p_2p_3(p_3\backslash(p_2\backslash p_4)) \to p_4$. Заметим, что для последовательности $p_1(p_1\backslash p_2)p_3$ в секвенции $[p_1(p_1\backslash p_2)p_3](p_3\backslash(p_2\backslash p_4)) \to p_4$ не существует интерполянта, состоящего из одного типа.

Доказательство леммы 15. Индукция по длине вывода без сечения.

Случай 1. Пусть $\Phi\Theta\Psi \to C$ является аксиомой, т. е. $C \equiv \Phi\Theta\Psi$. Рассмотрим три подслучая в зависимости от разбиения аксиомы $C \to C$.

Случай 1a. Пусть $[C] \to C$. Положим $r = 1$, $\Theta_1 = C$, $E_1 = C$.

Случай 1b. Пусть $[\,]C \to C$. Положим $r = 0$.

Случай 1c. Пусть $C[\,] \to C$. Положим $r = 0$.

Во всех следующих случаях выделение подпоследовательности в антецеденте заключения рассматриваемого правила вывода порождает выделение подпоследовательностей в посылках. По предположению индукции найдем интерполянты для посылок.

Случай 2. Рассмотрим правило $(\to\backslash)$:

$$\frac{A\Phi[\Theta]\Psi \to B}{\Phi[\Theta]\Psi \to A\backslash B}\ (\to\backslash).$$

По предположению индукции найдем последовательности $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ и типы $E_1, \ldots, E_r$, такие, что $\Theta_1\ldots\Theta_r = \Theta$, $L \vdash \Theta_j \to E_j$ для любого $j{\leqslant}r$, $A\Phi E_1\ldots E_r\Psi \to B$, $\#_p^+(E_1\ldots E_r) \leqslant \min(\#_p^+(\Theta), \#_p^+(B) + \#_p^-(A\Phi\Psi))$ и $\#_p^-(E_1\ldots E_r) \leqslant \min(\#_p^-(\Theta), \#_p^-(B) + \#_p^+(A\Phi\Psi))$ для любого $p \in \mathrm{Var}$.

Проверим, что (i), (ii), (iii) и (iv) выполняются для заключения правила $(\to\backslash)$ с теми же $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$, $E_1, \ldots, E_r$, что и для посылки. Утверждения (i) и (ii), очевидно, вытекают из предположения индукции. Построив вывод

$$\frac{A\Phi E_1\ldots E_r\Psi \to B}{\Phi E_1\ldots E_r\Psi \to A\backslash B}\ (\to\backslash),$$

установим (iii). Утверждение (iv) следует из предположения индукции и определения $\#_p^+$ и $\#_p^-$.

Случай 3. Правило $(\to/)$ рассматривается аналогично.

Случай 4. Рассмотрим правило $(\backslash\to)$. Разберем шесть подслучаев.

Случай 4a:

$$\frac{\Pi'[\Pi'']\Pi''' \to A \quad \Gamma B\Delta \to C}{\Gamma\Pi'[\Pi'']\Pi'''(A\backslash B)\Delta \to C}\ (\backslash\to).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4b:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma'[\Gamma'']\Gamma'''B\Delta \to C}{\Gamma'[\Gamma'']\Gamma'''\Pi(A\backslash B)\Delta \to C}\ (\backslash\to).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4c:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma B\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to C}{\Gamma\Pi(A\backslash B)\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to C}\ (\backslash \to).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4d:

$$\frac{[\Pi']\Pi'' \to A \quad \Gamma'[\Gamma'']B\Delta \to C}{\Gamma'[\Gamma''\Pi']\Pi''(A\backslash B)\Delta \to C}\ (\backslash \to).$$

Пусть $E_1 \dots E_r$ — интерполянт левой посылки и $F_1 \dots F_m$ — интерполянт правой посылки. Легко проверить, что $F_1 \dots F_m E_1 \dots E_r$ является интерполянтом заключения правила $(\backslash \to)$.

Случай 4e:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma'[\Gamma'' B\Delta']\Delta'' \to C}{\Gamma'[\Gamma''\Pi(A\backslash B)\Delta']\Delta'' \to C}\ (\backslash \to).$$

Пусть последовательность $E_1 \dots E_r$ — интерполянт правой посылки. Докажем, что эта последовательность является также интерполянтом заключения. Утверждения (i) и (iii) очевидны.

По предположению индукции $\Gamma'' B\Delta' \equiv \Theta_1 \dots \Theta_r$. Пусть рассматриваемое вхождение типа B принадлежит последовательности Θ_k. Тогда $\Theta_k \equiv \Xi B \Upsilon$ для некоторых последовательностей типов Ξ и Υ.

Положим $\tilde\Theta_k = \Xi\Pi(A\backslash B)\Upsilon$ и $\tilde\Theta_j = \Theta_j$ для любого $j \neq k$. Очевидно, что $\Gamma''\Pi(A\backslash B)\Delta' \equiv \tilde\Theta_1 \dots \tilde\Theta_r$. По пункту (ii) предположения индукции получаем, что

$$\frac{\Pi \to A \quad \Xi B\Upsilon \to E_k}{\Xi\Pi(A\backslash B)\Upsilon \to E_k}\ (\backslash \to)$$

и $\tilde\Theta_j \to E_j$ для любого $j \neq k$. Тем самым доказано (ii). Для проверки (iv) достаточно заметить, что $\#_p(\Gamma'' B\Delta') \leqslant \#_p(\Gamma''\Pi(A\backslash B)\Delta')$.

Случай 4f:

$$\frac{[\Pi']\Pi'' \to A \quad \Gamma[B\Delta']\Delta'' \to C}{\Gamma\Pi'[\Pi''(A\backslash B)\Delta']\Delta'' \to C}\ (\backslash \to).$$

Пусть $E_1, \dots, E_r$ — интерполянт правой посылки, соответствующий разбиению $B\Delta' \equiv \Theta_1 \dots \Theta_r$. Пусть $F_1, \dots, F_m$ — интерполянт левой посылки, соответствующий разбиению $\Pi' \equiv \Xi_1 \dots \Xi_m$.

Тогда для подходящей последовательности Υ, имеем:

(1) $\Theta_1 \equiv B\Upsilon$;

(2) $\Delta' \equiv \Upsilon\Theta_2 \dots \Theta_r$;

(3) $B\Upsilon \to E_1$;

(4) $\Theta_j \to E_j$ для любого $j \neq 1$;

(5) $\Gamma E_1 \dots E_r \Delta'' \to C$;

(6) $\#_p^+(E_1 \ldots E_r) \leqslant \min(\#_p^+(B\Delta'), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Gamma\Delta''))$ для любого $p \in \mathrm{Var}$;

(7) $\#_p^-(E_1 \ldots E_r) \leqslant \min(\#_p^-(B\Delta'), \#_p^-(C) + \#_p^+(\Gamma\Delta''))$ для любого $p \in \mathrm{Var}$;

(8) $\Pi' \equiv \Xi_1 \ldots \Xi_m$;

(9) $\Xi_j \to F_j$ для любого $j \leqslant m$;

(10) $F_1 \ldots F_m \Pi'' \to A$;

(11) $\#_p^+(F_1 \ldots F_m) \leqslant \min(\#_p^+(\Pi'), \#_p^+(A) + \#_p^-(\Pi''))$ для любого $p \in \mathrm{Var}$;

(12) $\#_p^-(F_1 \ldots F_m) \leqslant \min(\#_p^-(\Pi'), \#_p^-(A) + \#_p^+(\Pi''))$ для любого $p \in \mathrm{Var}$.

Докажем, что последовательность

$$(F_m \backslash (\ldots \backslash (F_1 \backslash E_1) \ldots))\, E_2 \ldots E_r$$

является интерполянтом заключения, соответствующим разбиению

$$\Pi''(A\backslash B)\Delta' \equiv \tilde{\Theta}_1 \ldots \tilde{\Theta}_r,$$

где $\tilde{\Theta}_1 = \Pi''(A\backslash B)\Upsilon$ и $\tilde{\Theta}_j = \Theta_j$ для любого $j \neq 1$.

Докажем утверждение (iv):

$$\begin{aligned}
&\#_p^+((F_m \backslash (\ldots \backslash (F_1 \backslash E_1) \ldots))\, E_2 \ldots E_r) = \\
&\quad = \#_p^+(E_1 \ldots E_r) + \#_p^-(F_1 \ldots F_m) \leqslant \\
&\quad \leqslant \min(\#_p^+(B\Delta'), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Gamma\Delta'')) + \\
&\quad + \min(\#_p^-(A) + \#_p^+(\Pi''), \#_p^-(\Pi')) \leqslant \\
&\quad \leqslant \min(\#_p^+(B\Delta') + \#_p^-(A) + \#_p^+(\Pi''), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Gamma\Delta'') + \#_p^-(\Pi')) = \\
&\quad = \min(\#_p^+(\Pi''(A\backslash B)\Delta'), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Gamma\Pi'\Delta'')).
\end{aligned}$$

Поскольку $\Pi''(A\backslash B)\Delta' \equiv \tilde{\Theta}_1 \ldots \tilde{\Theta}_r$, имеет место (i).

Теперь докажем (ii). Достаточно проверить, что

$$L \vdash \tilde{\Theta}_1 \to (F_m \backslash (\ldots \backslash (F_1 \backslash E_1) \ldots)).$$

Действительно, имеем

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F_1 \ldots F_m \Pi'' \to A \quad B\Upsilon \to E_1}{F_1 \ldots F_m \Pi''(A\backslash B)\Upsilon \to E_1}\,(\backslash \to)}{F_2 \ldots F_m \Pi''(A\backslash B)\Upsilon \to F_1 \backslash E_1}\,(\to \backslash)}{\vdots}\,(\to \backslash)}{\Pi''(A\backslash B)\Upsilon \to (F_m \backslash (\ldots \backslash (F_1 \backslash E_1) \ldots))}\,(\to \backslash).$$

Наконец, докажем (iii):

$$\dfrac{\Xi_m \to F_m \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\dfrac{\dfrac{\Xi_1 \to F_1 \quad \Gamma E_1 E_2 \ldots E_r \Delta'' \to C}{\Gamma \Xi_1 (F_1 \backslash E_1) E_2 \ldots E_r \Delta'' \to C}\,(\backslash \to)}{}\,(\backslash \to)}}{\Gamma \Xi_1 \ldots \Xi_{m-1} (F_{m-1} \backslash (\ldots \backslash (F_1 \backslash E_1) \ldots)) E_2 \ldots E_r \Delta'' \to C}\,(\backslash \to)}{\Gamma \Xi_1 \ldots \Xi_{m-1} \Xi_m (F_m \backslash (F_{m-1} \backslash (\ldots \backslash (F_1 \backslash E_1) \ldots))) E_2 \ldots E_r \Delta'' \to C}\,(\backslash \to).$$

Случай 5. Правило $(/ \to)$ рассматривается аналогично случаю 4. ■

Замечание. Аналогичная лемма верна и для исчисления $L(\backslash)$.

Лемма 16. *Фрагменты $L(\backslash)$ и $L^*(\backslash)$ обладают как обыкновенным, так и обобщенным интерполяционным свойством.*

Лемма 17. *Фрагменты $L(\backslash, /)$ и $L^*(\backslash, /)$ обладают обыкновенным интерполяционным свойством, но не обладают обобщенным интерполяционным свойством.*

7 Построение контекстно-свободной грамматики для грамматики Ламбека без умножения

В этой главе мы рассмотрим категориальные грамматики, основанные на исчислении Ламбека без умножения. Результаты, аналогичные нашим, получены В. Бушковским [7].

Определение. *Грамматика Ламбека без умножения* есть тройка $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$, где $\mathcal{T}$ — некоторое конечное множество (алфавит), $H \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $\triangleright$ — некоторое конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Tp}(\backslash, /) \times \mathcal{T}$.

Язык, порожденный грамматикой Ламбека без умножения $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех слов $t_1 \ldots t_n$ в алфавите $\mathcal{T}$, для которых существуют типы $B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$, такие, что $L(\backslash, /) \vdash B_1 \ldots B_n \to H$ и для любого $i \leqslant n$ выполняется $B_i \triangleright t_i$.

Из устранимости сечения в исчислении Ламбека легко следует, что исчисление Ламбека консервативно над своими элементарными фрагментами. Поэтому из теоремы 13 следует, что языки, порожденные грамматиками Ламбека без умножения, контекстно-свободны. Однако конструкция, примененная в доказательстве теоремы 13, существенно использует типы, содержащие умножение.

Возникает вопрос, можно ли по произвольной грамматике Ламбека без умножения построить соответствующую “естественную” контекстно-свободную грамматику, использующую в качестве алфавита вспомогательных символов некоторое конечное подмножество множества $\mathrm{Tp}(\backslash, /)$. Положительный ответ на этот вопрос дает теорема 19.

Лемма 18. *Пусть тонкая секвенция $\Phi\Theta\Psi \to C$ выводима в $L(\backslash,/)$ и последовательность $E_1 \dots E_r \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ является интерполянтом, соответствующим разбиению $\Theta \equiv \Theta_1 \dots \Theta_r$ для последовательности Θ в секвенции $\Phi[\Theta]\Psi \to C$. Тогда*

(i) *для любого $i \leqslant r$ секвенция $\Theta_i \to E_i$ тонкая;*

(ii) *секвенция $\Phi E_1 \dots E_r \Psi \to C$ тонкая;*

(iii) $||E_1 \dots E_r|| = |[\![\Theta]\!]|$.

Доказательство. Лемма доказывается аналогично лемме 7. ■

Теорема 19. *Пусть $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$ — некоторая грамматика Ламбека без умножения. Положим*

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{U} & \rightleftharpoons & \{H\} \cup \{||B|| \mid \textit{найдется } t \in \mathcal{T}, \textit{ такой, что } B \triangleright t\}; \\
m & \rightleftharpoons & \max\{||A|| \mid A \in \mathcal{U}\}; \\
q & \rightleftharpoons & \max\{i \in \mathbb{N} \mid \textit{найдется } A \in \mathcal{U}, \textit{ такой, что } p_i \in \mathrm{Var}(A)\}; \\
\mathcal{W} & \rightleftharpoons & \{A \in \mathrm{Tp}(\backslash,/) \mid \mathrm{Var}(A) \subseteq \{p_1, \dots, p_q\} \textit{ и } ||A|| \leqslant m\}; \\
\sigma & \rightleftharpoons & H; \\
\mathcal{R} & \rightleftharpoons & \{B \Rightarrow t \ \mid \ t \in \mathcal{T} \textit{ и } B \triangleright t\} \cup \\
& & \quad \cup \{A \Rightarrow \Gamma \mid L \vdash \Gamma \to A, \ A \in \mathcal{W}, \Gamma \in \mathcal{W}^+ \textit{ и } ||\Gamma|| \leqslant 2m\}.
\end{array}$$

Тогда контекстно-свободная грамматика $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$ и исходная грамматика Ламбека $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$ порождают один и тот же язык.

Доказательство. Повторяем все рассуждения из главы 5. Единственную трудность представляет доказательство леммы 11. Мы используем лемму 18 вместо леммы 7 и получаем в качестве интерполянта последовательность типов $E_1 \dots E_r$. При этом сечение надо применить r раз. ■

8 Мультипликативная циклическая линейная логика

8.1 Определение исчисления CLL

Рассмотрим *мультипликативный фрагмент циклической линейной логики*, введенной в [15]. Этот фрагмент будем обозначать через CLL.

Предполагаем, что задано счетное множество

$$\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}.$$

В контексте линейной логики элементы этого множества будем называть *атомарными формулами.* Они играют в точности ту же роль, что примитивные типы в исчислении Ламбека.

Определим множество формул $\mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$ исчисления CLL как наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\mathbf{1} \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$ и $\bot \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$;
- если $p_i \in \mathrm{Var}$, то $p_i \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$ и $p_i^\bot \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$;
- если $A \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$ и $B \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$, то $(A\bullet B) \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$ и $(A\wp B) \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$.

Секвенции исчисления CLL имеют вид $\to \Gamma$, где $\Gamma \in \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)^*$.

На множестве $\mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot)$ определена операция

$$(\ \cdot\ )^\bot\colon \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot) \to \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot),$$

сопоставляющая каждой формуле ее отрицание:

$$\begin{array}{rcl}
(\mathbf{1})^\bot & \rightleftharpoons & \bot, \\
(\bot)^\bot & \rightleftharpoons & \mathbf{1}, \\
(p_i)^\bot & \rightleftharpoons & p_i^\bot, \\
(p_i^\bot)^\bot & \rightleftharpoons & p_i, \\
(A\bullet B)^\bot & \rightleftharpoons & ((B)^\bot \wp (A)^\bot), \\
(A\wp B)^\bot & \rightleftharpoons & ((B)^\bot \bullet (A)^\bot).
\end{array}$$

Будем писать $CLL \vdash \Gamma$, если секвенция $\to \Gamma$ выводима в исчислении CLL. Иногда будем также писать $CLL \vdash A_1 \ldots A_n \to B$, если секвенция $\to (A_n^\bot) \ldots (A_1^\bot) B$ выводима в исчислении CLL.

Аксиомами исчисления CLL служат все секвенции вида $\to (p_i^\bot) p_i$, где $p_i \in \mathrm{Var}$, а также секвенция $\to \mathbf{1}$.

Исчисление CLL имеет следующие правила:

$$\frac{\to \Gamma A B \Delta}{\to \Gamma (A\wp B) \Delta}\ (\to \wp), \qquad \frac{\to \Gamma A \quad \to B \Delta}{\to \Gamma (A\bullet B) \Delta}\ (\to \bullet),$$

$$\frac{\to \Gamma \Delta}{\to \Delta \Gamma}\ (\mathit{rotate}), \qquad \frac{\to \Gamma A \quad \to (A^\bot) \Delta}{\to \Gamma \Delta}\ (\mathit{cut}).$$

Замечание. Исчисление CLL консервативно над исчислением L^* при переводе $A\backslash B$ как $(A^\bot)\wp B$ и B/A как $\wp B(A^\bot)$. Если наложить на правило $(\to \wp)$ требование $\Gamma\Delta \neq \Lambda$, то получим вариант циклической линейной логики, консервативный над исчислением Ламбека.

8.2 Грамматики, основанные на исчислении CLL

Определение. *Категориальная грамматика, основанная на исчислении CLL* есть тройка $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$, где $\mathcal{T}$ — некоторое конечное множество (алфавит), H — формула и $\triangleright$ — некоторое конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Fm}(\bullet, \wp, \mathbf{1}, \bot) \times \mathcal{T}$.

Язык, порожденный грамматикой $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех непустых слов $t_1 \ldots t_n$ в алфавите $\mathcal{T}$, для которых существует такая выводимая в CLL секвенция $B_1 \ldots B_n \to H$, что для любого $i \leqslant n$ выполняется $B_i \triangleright t_i$. Обозначим этот язык через $\mathcal{L}_{CLL}(\mathcal{T}, H, \triangleright)$.

Теорема 20. *Пусть $\langle \mathcal{T}, H, \triangleright \rangle$ — некоторая CLL-грамматика. Тогда язык $\mathcal{L}_{CLL}(\mathcal{T}, H, \triangleright)$ является контекстно-свободным.*

Замечание. Обратное верно в силу консервативности CLL над L^*. Следовательно, класс языков, порожденных категориальными грамматиками, основанными на мультипликативной циклической линейной логике, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

Литература

[1] Ж. Лаллеман. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985.

[2] Y. Bar-Hillel, C. Gaifman, and E. Shamir. On categorial and phrase-structure grammars // Bull. Res. Council Israel Sect. F. — 1960. — 9F. — P. 1–16.

[3] J. van Benthem. Language in Action. Categories, Lambdas and Dynamic Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1991.

[4] W. Buszkowski. The equivalence of unidirectional Lambek categorial grammars and context-free grammars // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1985. — V. 31. — P. 369–384.

[5] W. Buszkowski. Generative power of categorial grammars // R.T. Oehrle, E. Bach, and D. Wheeler, editors. Categorial Grammars and Natural Language Structures. — Dordrecht: Reidel, 1988. — P. 69–94.

[6] W. Buszkowski. On generative capacity of the Lambek calculus // J. van Eijck, editor. Logics in AI. — Berlin: Springer, 1991. — P. 139–152.

[7] W. Buszkowski. On the equivalence of Lambek categorial grammars and basic categorial grammars. — ILLC Prepublication Series, LP–93–07 Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1993.

[8] J. Lambek. The mathematics of sentence structure // American Mathematical Monthly. — 1958. — V. 65 (3). — P. 154–170.

[9] M. Pentus. Equivalent Types in Lambek Calculus and Linear Logic. — Preprint № 2 of the Department of Math. Logic, Steklov Math. Institute, Series Logic and Computer Science, Moscow, 1992.

[10] M. Pentus. Lambek Grammars Are Context Free. — Preprint № 8 of the Department of Math. Logic, Steklov Math. Institute, Series Logic and Computer Science, Moscow, 1993.

[11] M. Pentus. Lambek grammars are context free // Proceedings of the annual conference on Logic in Computer Science, LICS'93, 1993.

[12] D. Roorda. Resource Logics: Proof-theoretical Investigations. — PhD thesis, Fac. Math. and Comp. Sc., University of Amsterdam, 1991.

[13] D. Roorda. Interpolation in fragments of classical linear logic // The Journal of Symbolic Logic. — 1994. — V. 59 (2). — P. 419–444.

[14] K. Schütte. Der interpolationssatz der intuitionistischen prädikatenlogik // Mathematische Annalen. — 1962. — B. 148. — S. 192–200.

[15] D. N. Yetter. Quantales and noncommutative linear logic // Journal of Symbolic Logic. — 1990. — V. 55. — P. 41–64.

Статья поступила в редакцию в июне 1995 г.