

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

Ш. А. АЛИМОВ

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ЗАДАЧИ
С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Введение. Рассмотрим в n -мерной области Ω ($n \geq 3$) с гладкой границей $\partial\Omega$ равномерно эллиптический оператор

$$L(x, D)u = \sum_{j, k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u$$

с коэффициентами, достаточно гладкими в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть l — гладкое векторное поле, заданное на $\partial\Omega$, и пусть $S = \{x \in \partial\Omega : l(x) \cdot \nu(x) = 0\}$, где $\nu(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x .

В данной работе изучается следующая краевая задача:

$$L(x, D)u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (0.2)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in S. \quad (0.3)$$

Решением задачи (0.1)–(0.3) назовем функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (0.2), (0.3) в классическом смысле. Отметим, что изучение многомерной вырождающейся краевой задачи с косою производной было начато в работе А. В. Бицадзе [1]. Дальнейшие исследования этой задачи проводились в работах [2–9] (см. также [10]).

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in S$ и введем в некоторой ее окрестности локальную систему координат с началом в точке x_0 таким образом, чтобы направление векторного поля l совпало с направлением оси Ox_1 , а уравнение поверхности $\partial\Omega$ приняло вид $x_n = f(x')$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, где $f(x') \geq 0$ для всех x из рассматриваемой окрестности.

Относительно функции f предположим, что

$$f(0, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad \nabla f(0, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0. \quad (0.4)$$

Это означает, что многообразие S в новой локальной системе координат переходит в $(n-2)$ -мерное подпространство $\{x \in R^n : x_1 = x_n = 0\}$.

Введем функцию σ , характеризующую порядок касания векторным полем l границы $\partial\Omega$ в точках S . Пусть $\sigma(t)$ — положительная четная функция, строго возрастающая при $t \geq 0$, $\sigma(0) = 0$. Предположим, что в рассматриваемой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x') \right| \geq \sigma(x_1). \quad (0.5)$$

Пусть μ — функция, обратная интегралу от σ , т. е.

$$\mu^{-1}(t) = \int_0^t \sigma(s) ds. \quad (0.6)$$

Известно (см. [7—9]), что если ψ принадлежит классу Гёльдера $C^\lambda(\partial\Omega)$, то решение задачи (0.1)—(0.3) принадлежит классу $C^\lambda(\bar{\Omega})$, и этот результат является точным в классе всех векторных полей, касающихся $\partial\Omega$. Тем не менее указанный результат может быть улучшен для каждого конкретного векторного поля, если известен порядок касания этим полем границы.

В рассматриваемом случае порядок касания определяется функцией σ . Из приводимой ниже теоремы 1 следует, что повышение гладкости решения характеризуется функцией μ , обратной интегралу от σ .

О п р е д е л е н и е. Пусть $\lambda > 0$ и $\tau = \lambda - [\lambda]$. Будем говорить, что $f \in C_\mu^\lambda(\bar{\Omega})$, если $f \in C^{[\lambda]}(\bar{\Omega})$ и для всех $x \in \Omega$ и $h \in R^n$ таких, что $x \pm h \in \Omega$, и любого мультииндекса α с $|\alpha| = [\lambda]$ выполняется неравенство

$$|D^\alpha f(x+h) - 2D^\alpha f(x) + D^\alpha f(x-h)| \leq \text{const } |h|^\tau \mu(|h|). \quad (0.7)$$

Наименьшую постоянную в этом неравенстве обозначим $p_\mu^\lambda(f)$ и положим

$$\|f\|_{C_\mu^\lambda(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^{[\lambda]}(\bar{\Omega})} + p_\mu^\lambda(f). \quad (0.8)$$

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Пусть $\lambda > 1$, λ — нецелое, $\psi \in C^\lambda(\partial\Omega)$. Если u — решение задачи (0.1)—(0.3), то для него выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{C_\mu^\lambda(\bar{\Omega})} \leq \text{const} [\|\psi\|_{C^\lambda(\partial\Omega)} + \|u\|_{C(\bar{\Omega})}]. \quad (0.9)$$

Отметим, что оценка (0.9) не может быть улучшена даже для оператора Лапласа. Именно рассмотрим в области

$$\Omega_0 = \{x \in R^n : \mu^{-1}(x_1) + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \quad (0.10)$$

следующую краевую задачу:

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\partial\Omega_0} = \psi, \quad u|_{\partial\Omega_0, x_1=0} = 0. \quad (0.11)$$

Т е о р е м а 2. Пусть $\lambda > 1$, λ — нецелое, и пусть $v(t)$ — монотонно возрастающая при $t > 0$ функция, такая, что $v(t)/t$ убывает и $v(t) = o(\mu(t))$. Тогда существует функция $\psi \in C^\lambda(\partial\Omega_0)$ такая, что решение задачи (0.11) не принадлежит классу $C_\nu^\lambda(\bar{\Omega}_0)$.

Отметим, что случай $\sigma(t) = t^m$ был ранее рассмотрен в работе [9] (см. также [7]).

1. Свойства функций из обобщенных гёльдеровых классов. Пусть $\omega(t)$ — непрерывная функция, возрастающая при $t > 0$ и такая, что функция $\omega(t)/t^2$ является убывающей. Пусть, кроме того, выполняется следующее условие:

$$\int_0^t \omega(s) \frac{ds}{s} \leq \text{const } \omega(t). \quad (1.1)$$

Для любой точки $x \in \Omega$ обозначим

$$d(x) = \text{dis}(x, \partial\Omega). \quad (1.2)$$

Если точка x расположена достаточно близко к границе $\partial\Omega$, то вследствие гладкости границы существует единственная точка $\bar{x} \in \partial\Omega$ такая, что $|x - \bar{x}| = d(x)$.

В дальнейшем черта над символом точки из Ω будет использоваться для обозначения ближайшей к ней точки из $\partial\Omega$. Заметим, что для всех $x \in \Omega$ и всех $y \in \partial\Omega$ выполняется неравенство $|x - \bar{x}| \leq |x - y|$.

Лемма 1. Пусть $f \in C^2(\Omega)$ и пусть для любого мультииндекса α с $|\alpha| = 2$ выполняется условие

$$|D^\alpha f(x)| \leq \text{const } d^{-2}(x) \omega(d(x)). \quad (1.3)$$

Тогда для любой точки $x \in \Omega$ и любого $h \in R^n$ такого, что $x \pm h \in \Omega$, выполняется неравенство

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq \text{const } \omega(|h|). \quad (1.4)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $d(x) > |h|$. Положим $\theta = h/|h|$. Тогда

$$\Delta_h^2 f(x) \equiv f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \int_{-|h|}^{|h|} (|h| - |t|) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x+t\theta) dt.$$

Из этого равенства и условия (1.3) получим

$$|\Delta_h^2 f(x)| \leq \text{const} \int_{-|h|}^{|h|} (|h| - |t|) d^{-2}(x+t\theta) \omega(d(x+t\theta)) dt. \quad (1.5)$$

Если $d(x) \geq |h|$, то $d(x+t\theta) \geq |h| - |t|$, и поэтому вследствие монотонности $t^{-2}\omega(t)$ выполняется неравенство

$$d^{-2}(x+t\theta) \omega(d(x+t\theta)) \leq (|h| - |t|)^{-2} \omega(|h| - |t|).$$

Оценив с помощью этого неравенства интеграл в (1.5) и приняв во внимание условие (1.1), получим

$$\begin{aligned} |\Delta_h^2 f(x)| &\leq \text{const} \int_{-|h|}^{|h|} (|h| - |t|)^{-1} \omega(|h| - |t|) dt = \\ &= \text{const} \int_0^{|h|} \frac{\omega(t)}{t} dt \leq \text{const } \omega(|h|). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем нам понадобится еще одна лемма о поведении вблизи границы производных решений однородного эллиптического уравнения, принадлежащих обычным классам Гёльдера.

Пусть $L^*(x, D)$ — оператор, формально сопряженный с эллиптическим оператором $L(x, D)$, и пусть $E(x, y)$ — отвечающее ему фундаментальное решение, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению $L^*(x, D)E(x, y) = \delta(x-y)$. Для функции $E(x, y)$ известны (см., например, [11]) следующие оценки:

$$|D_x^\alpha D_y^\beta E(x, y)| \leq \text{const } |x-y|^{2-n-|\alpha|-|\beta|}. \quad (1.6)$$

Фиксируем произвольную функцию $\eta \in C_0^\infty(R^n)$ такую, что $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1/2$, $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq 1$.

Для любого $\delta > 0$ положим $\Phi(x, y) = \eta((x-y)/\delta) E(y, x)$. Тогда

$$L^*(y, D)\Phi(x, y) = \delta(x-y) - H(x, y), \quad (1.7)$$

где $H(x, y) = 0$ при $|x-y| \geq \delta$ и, как это следует из (1.6),

$$|D_x^\alpha D_y^\beta H(x, y)| \leq \text{const } \delta^{-n-|\alpha|-|\beta|}. \quad (1.8)$$

Применим к произвольной функции $v \in C^2(\Omega)$ и к функции $\Phi(x, y)$ формулу Грина

$$\int_{\Omega} v(y) L^*(y, D) \Phi(x, y) dy = \int_{\Omega} \Phi(x, y) L(y, D) v(y) dy.$$

Воспользовавшись равенством (1.7), получим

$$v(x) = \int_{\Omega} H(x, y) v(y) dy + \int_{\Omega} \Phi(x, y) L(y, D) v(y) dy. \quad (1.9)$$

Интегральное представление (1.9) позволяет оценить как функцию v , так и ее производные.

Пусть функция f достаточно гладка внутри Ω и пусть функция $v \in C^2(\Omega)$ является решением уравнения

$$L(x, D) v(x) = f(x). \quad (1.10)$$

Тогда из представления (1.9) следует, что функция $v(x)$ также является гладкой в Ω .

Л е м м а 2. Пусть $0 < \lambda < m$, λ — нецелое, и пусть для любого мультииндекса α с $|\alpha| = m$ выполняется оценка

$$|D^\alpha f(x)| \leq \text{const } d^{\lambda - |\alpha| - 2}(x) M(f). \quad (1.11)$$

Пусть функция $v \in C^\lambda(\bar{\Omega}) \cap C^m(\Omega)$ является решением уравнения (1.10) и для любого α с $|\alpha| = m$ удовлетворяет условию

$$|\nabla D^\alpha v(x)| \leq \text{const } d^{\lambda - |\alpha| - 2}(x) N(v). \quad (1.12)$$

Тогда для любого α с $|\alpha| = m$ выполняется неравенство

$$|D^\alpha v(x)| \leq \text{const } d^{\lambda - |\alpha|}(x) [M(f) + N(v) + \|v\|_{C^\lambda(\bar{\Omega})}]. \quad (1.13)$$

Доказательство. Для $\delta > 0$ и $d(x) \geq 2\delta$ воспользуемся представлением (1.9). Зафиксируем произвольный мультииндекс α с $|\alpha| = m$ и заменим в равенстве (1.9) функцию v на $D^\alpha v$. В результате получим

$$D^\alpha v(x) = \int_{\Omega} H(x, y) D^\alpha v(y) dy + \int_{\Omega} \Phi(x, y) L(y, D) D^\alpha v(y) dy. \quad (1.14)$$

Положим $K_\alpha(x, D) = L(x, D) D^\alpha - D^\alpha L(x, D)$. Очевидно $K_\alpha(x, D)$ — дифференциальный оператор порядка не выше $|\alpha| + 1$. С помощью этого оператора равенство (1.14) можно записать так:

$$\begin{aligned} D^\alpha v(x) &= \int_{\Omega} H(x, y) D^\alpha v(y) dy + \int_{\Omega} \Phi(x, y) D^\alpha f(y) dy + \\ &+ \int_{\Omega} \Phi(x, y) K_\alpha(y, D) v(y) dy = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Оценим каждый из интегралов в правой части (1.15). Для оценки I_1 фиксируем мультииндекс β такой, что $\beta < \alpha$ и $|\beta| = [\lambda]$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} H(x, y) D_y^{\alpha - \beta} [D^\beta v(y) - D^\beta v(x)] dy = \\ &= (-1)^{|\alpha - \beta|} \int_{\Omega} D_y^{\alpha - \beta} H(x, y) [D^\beta v(y) - D^\beta v(x)] dy. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Положим $\tau = \lambda - [\lambda]$. По условию функция $D^\beta v \in C^\tau(\bar{\Omega})$, т. е.

$$|D^\beta v(x) - D^\beta v(y)| \leq \text{const } |x - y|^\tau \|v\|_{C^\lambda}. \quad (1.17)$$

Так как $H(x, y) = 0$ при $|x - y| \geq \delta$, то из (1.8), (1.16) и (1.17) получаем

$$|I_1| \leq \text{const} \int_{|x-y| \leq \delta} \delta^{-n-|\alpha-\beta|} |x-y|^\tau dy \|v\|_{C^\lambda} = \text{const} \delta^{\lambda-|\alpha|} \|v\|_{C^\lambda}. \quad (1.18)$$

Перейдем к оценке I_2 . Воспользуемся для этого условием (1.11) и неравенством (1.6):

$$|I_2| \leq \text{const} \int_{|x-y| \leq \delta} \delta^{\lambda-|\alpha|-2} |x-y|^{2-n} dy M(f) = \text{const} \delta^{\lambda-|\alpha|} M(f). \quad (1.19)$$

Третий интеграл в правой части (1.15) оценим с помощью условия (1.12). Из этого условия и того, что порядок $K_\alpha(x, D)$ не превосходит $|\alpha| + 1$, следует неравенство

$$|K_\alpha(x, D)v(x)| \leq \text{const} d^{\lambda-|\alpha|-2}(x) N(v).$$

Поэтому

$$|I_3| \leq \text{const} \int_{|x-y| \leq \delta} \delta^{\lambda-|\alpha|-2} |x-y|^{2-n} dy N(v) = \text{const} \delta^{\lambda-|\alpha|} N(v). \quad (1.20)$$

Утверждение леммы следует из равенства (1.15) и оценок (1.18) — (1.20). Лемма 2 доказана.

2. Вспомогательные оценки. Всюду в этом пункте символом σ будет обозначаться функция, строго возрастающая при $t \geq 0$, $\sigma(0) = 0$, а символ μ — функция, обратная которой μ^{-1} определена равенством (0.6).

Лемма 3. Пусть $f \in C^1[0, \infty)$, $f(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и пусть

$$f'(t) \geq \sigma(t). \quad (2.1)$$

Тогда при $\nu > 1$ и любых $\delta > 0$ и $x > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^x |\delta + f(x) - f(t)|^{-\nu} dt \leq \frac{\nu}{\nu-1} \delta^{-\nu} \mu(\delta). \quad (2.2)$$

Доказательство. Положим $\varepsilon = \mu(\delta)$ и рассмотрим два случая:

1) $0 < x \leq \varepsilon$. В этом случае в силу возрастания f

$$\int_0^x |\delta + f(x) - f(t)|^{-\nu} dt \leq \delta^{-\nu} x \leq \delta^{-\nu} \varepsilon = \delta^{-\nu} \mu(\delta).$$

2) $x > \varepsilon$. Разобьем интеграл в левой части (2.2) на сумму двух: от 0 до ε и от ε до x . Тогда

$$\int_0^\varepsilon |\delta + f(x) - f(t)|^{-\nu} dt \leq \delta^{-\nu} \varepsilon = \delta^{-\nu} \mu(\delta). \quad (2.3)$$

Для оценки второго интеграла заметим, что

$$\mu^{-1}(t) = \int_0^t \sigma(s) ds \leq t\sigma(t),$$

и в силу возрастания $\sigma(t)$ при $t \geq \varepsilon$ выполняется неравенство

$$\delta = \mu^{-1}(\varepsilon) \leq \varepsilon\sigma(\varepsilon) \leq \varepsilon\sigma(t).$$

Применив это неравенство и условие (2.1), получим

$$\int_\varepsilon^x |\delta + f(x) - f(t)|^{-\nu} dt \leq \varepsilon \delta^{-1} \int_\varepsilon^x |\delta + f(x) - f(t)|^{-\nu} \sigma(t) dt \leq$$

$$\leq \varepsilon \delta^{-1} \int_{\varepsilon}^x |\delta + f(x) - f(t)|^{-\nu} f'(t) dt \leq \frac{1}{\nu-1} \varepsilon \delta^{-1} \delta^{-\nu+1} = \frac{\mu(\delta) \delta^{-\nu}}{\nu-1}. \quad (2.4)$$

Из оценок (2.3) и (2.4) следует требуемое неравенство (2.2). Лемма 3 доказана.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \partial\Omega$ и введем в некоторой окрестности $V(x_0)$ точки x_0 локальную систему координат так, чтобы уравнение $\partial\Omega$ имело вид $x_n = f(x')$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Предположим, что в рассматриваемой окрестности $V(x_0)$ функция f неотрицательна и удовлетворяет условиям $f(0, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$, $\nabla f(0, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$, а также неравенству

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x') \right| \geq \text{const } \sigma(x_1). \quad (2.5)$$

Для любого x из $V(x_0) \cap \Omega$ обозначим символом x_t точку с координатами $x_t = (t, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Лемма 4. Пусть выполнено условие (2.5) и пусть функция μ определена соотношением (0.6). Тогда для любого $\nu > 1$ и любой точки $x \in V(x_0) \cap \Omega$ имеет место оценка

$$\int_0^{x_1} d^{-\nu}(x_t) dt \leq \text{const } d^{-\nu}(x) \mu(d(x)). \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть $x \in V(x_0) \cap \Omega$, $y \in V(x_0) \cap \partial\Omega$. Положим $q(x) = x_n - f(x')$. Тогда, очевидно, $q(y) = 0$. Следовательно,

$$q(x) = q(x) - q(y) = \nabla q(\xi) (x - y) \leq |\nabla q(\xi)| |x - y| \leq C_0 |x - y|.$$

Отсюда

$$q(x) \leq C_0 d(x). \quad (2.7)$$

Выберем теперь для заданного $x \in V(x_0) \cap \Omega$ точку $y \in \partial\Omega$ следующим образом: $y' = x'$, $y_n = f(x')$. Тогда $q(x) = q(x) - q(y) = x_n - y_n = |x - y| \geq d(x)$. Из этого неравенства и оценки (2.7) следует соотношение

$$d(x) \leq x_n - f(x') \leq C_0 d(x), \quad (2.8)$$

справедливое для $x \in V(x_0) \cap \Omega$.

Докажем теперь оценку (2.6). Обозначим $\delta = x_n - f(x') > 0$. Тогда в силу (2.8)

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^{x_1} d^{-\nu}(x_t) dt \leq \text{const} \int_0^{x_1} |x_n - f(x'_t)|^{-\nu} dt = \\ &= \text{const} \int_0^{x_1} |\delta + f(x') - f(x'_t)|^{-\nu} dt. \end{aligned}$$

Оценив последний интеграл с помощью леммы 3, получим

$$I \leq \text{const } \delta^{-\nu} \mu(\delta),$$

откуда с учетом (2.8) следует требуемая оценка (2.6). Лемма 4 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть векторное поле l , фигурирующее в задаче (0.1) — (0.3), имеет компоненты $l_j(x)$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{j=1}^n l_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

и пусть $l_j(x)$ — функции, гладкие на $\partial\Omega$. Продолжим $l_j(x)$ внутрь Ω с сохранением гладкости и положим

$$K(x, D) = L(x, D) \frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial l} L(x, D). \quad (3.1)$$

Тогда если u — решение задачи (0.1) — (0.3), то

$$L(x, D) \frac{\partial u}{\partial l} = K(x, D) u(x), \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\partial\Omega} = \psi(x). \quad (3.3)$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Дирихле:

$$L(x, D) w(x) = 0, \quad (3.4)$$

$$w|_{\partial\Omega} = \psi(x). \quad (3.5)$$

Введем функцию $v = \partial u / \partial l - w$. Тогда из (3.2) — (3.5) следует, что функция v является решением краевой задачи

$$L(x, D) v(x) = K(x, D) u(x), \quad (3.6)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.7)$$

Таким образом, если u — решение задачи (0.1) — (0.3), то производная $\partial u / \partial l$ представима в виде

$$\partial u / \partial l = v(x) + w(x), \quad (3.8)$$

где v и w — решения краевых задач (3.6), (3.7) и (3.4), (3.5) соответственно.

Для доказательства теоремы 1 достаточно получить оценку гладкости функции u вблизи многообразия S . Фиксируем произвольную точку $x_0 \in S$ и выбираем в некоторой окрестности V точки x_0 систему координат так, чтобы в этой окрестности $\partial / \partial l = \partial / \partial x_1$, а уравнение границы $\partial\Omega$ задавалось равенством $x_n = f(x')$, причем если $x \in V \cap \Omega$, то $x_n > f(x')$ (мы сохраняем за преобразованной областью Ω прежнее обозначение). Тогда если $x \in V \cap \Omega$, то равенство (3.8) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = v(x) + w(x). \quad (3.9)$$

Введем следующее обозначение: если $x = (x_1, \dots, x_n)$, то $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$, т. е. $x = (x_1, \bar{x})$. Положим для $x \in V \cap \Omega$

$$Tv(x) = \int_0^{x_1} v(t, \bar{x}) dt. \quad (3.10)$$

Из определения оператора T следует равенство

$$u(x) = u(0, \bar{x}) + T \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

Из этого равенства и из (3.9) окончательно получаем

$$u(x) = u(0, \bar{x}) + Tv(x) + Tw(x). \quad (3.11)$$

Для доказательства теоремы 1 оценим каждое слагаемое в правой части (3.11). В следующих ниже леммах $\lambda > 1$, $\tau = \lambda - [\lambda]$, $0 < \tau < 1$.

Лемма 5. Пусть $u \in C^{[\lambda]+2}(\Omega)$ и для любого мультииндекса α с $|\alpha| = [\lambda] + 2$ выполняется неравенство

$$|D^\alpha u(x)| \leq \text{const } d^{\tau-2}(x) M(u). \quad (3.12)$$

Тогда $Tu \in C_\mu^\lambda(\overline{V \cap \Omega})$ и справедлива оценка

$$\|Tu\|_{C_\mu^\lambda} \leq \text{const } M(u). \quad (3.13)$$

Доказательство. Требуется доказать, что для любого мультииндекса β с $|\beta| = [\lambda]$ функция $D^\beta Tu$ принадлежит $C_\mu^\tau(\overline{V \cap \Omega})$. Для этого в силу леммы 1 достаточно доказать, что для любого α с $|\alpha| = [\lambda] + 2$ выполняется неравенство

$$|D^\alpha Tu| \leq \text{const } d^{\tau-2}(x) \mu(d(x)) M(u). \quad (3.14)$$

Рассмотрим два случая: 1) $\alpha_1 > 0$. Тогда $D^\alpha Tu(x) = D^\nu u(x)$, где $|\nu| = |\alpha| - 1 = \lambda + 1 - \tau$. Из условия (3.12) следует, что $|D^\nu u(x)| \leq \text{const } d^{\tau-1} M(u)$. Применяв очевидное неравенство $\mu(d)/d \geq \text{const} > 0$, получим $|D^\alpha Tu(x)| \leq \text{const } d^{\tau-1} M(u) \leq \text{const } d^{\tau-2} \mu(d) M(u)$. Тем самым в случае $\alpha_1 > 0$ неравенство (3.14) доказано.

2) $\alpha_1 = 0$. В этом случае

$$D^\alpha Tu(x) = \int_0^{x_1} D^\alpha u(t, \vec{x}) dt.$$

Из условия (3.12) получаем

$$|D^\alpha Tu(x)| \leq \text{const} \int_0^{x_1} d^{\tau-2}(x_t) dt M(u),$$

где $x_t = (t, \vec{x})$. Из последнего неравенства и леммы 4 следует требуемая оценка (3.14). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $\psi \in C^\lambda(\partial\Omega)$, ω — решение задачи (3.4), (3.5). Тогда $\omega \in C^\lambda(\overline{\Omega})$ и для любого мультииндекса α с $|\alpha| > \lambda$ выполняется оценка

$$|D^\alpha \omega(x)| \leq \text{const } d^{\lambda-|\alpha|} \|\psi\|_{C^\lambda(\partial\Omega)}. \quad (3.15)$$

Доказательство приведено в работе [9] (лемма 2.2).

Лемма 7. Пусть u — решение задачи (0.1) — (0.3) из класса $C^\lambda(\overline{\Omega})$. Тогда решение v задачи (3.6), (3.7) также принадлежит $C^\lambda(\overline{\Omega})$ и выполняется оценка

$$\|v\|_{C^\lambda(\overline{\Omega})} \leq \text{const} \|u\|_{C^\lambda(\overline{\Omega})}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Если $\lambda > 2$, то оценка (3.16) следует непосредственно из оценок Шаудера (см. [12]). Пусть $1 < \lambda < 2$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$Lz(x) = u(x), \quad (3.17)$$

$$z|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.18)$$

Так как $u \in C^\lambda(\overline{\Omega})$, то в силу оценок Шаудера $z \in C^{\lambda+2}(\overline{\Omega})$ и

$$\|z\|_{C^{\lambda+2}} \leq \text{const} \|u\|_{C^\lambda}. \quad (3.19)$$

Положим $Q(x, D) = K(x, D)L(x, D) - L(x, D)K(x, D)$. Из определения $Q(x, D)$ и уравнения (3.17) следует $L(x, D)Kz + Qz = K(x, D)u(x)$, откуда с учетом (3.6) получаем

$$L(x, D)[v - Kz] = Qz. \quad (3.20)$$

Очевидно порядок оператора $Q(x, D)$ не превосходит 3 и поэтому $Qz \in C^{\lambda-1}(\overline{\Omega})$. Кроме того, если $x \in \partial\Omega$, то, согласно (3.7), $v(x) -$

$-K(x, D)z(x) = -K(x, D)z(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$. Поэтому в силу леммы 2.7 из работы [9] $v - Kz \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ и выполняется неравенство

$$\|v\|_{C^\lambda} \leq \text{const} (\|Kz\|_{C^\lambda} + \|Qz\|_{C^{\lambda-1}}) \leq \text{const} \|z\|_{C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})}.$$

Это неравенство в сочетании с (3.19) дает требуемую оценку (3.16). Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть $\psi \in C^\lambda(\partial\Omega)$ и пусть u — решение задачи (0.1) — (0.3), принадлежащее $C^\lambda(\bar{\Omega})$. Тогда для любого мультииндекса α с $|\alpha| = [\lambda] + 2$ решение v задачи (3.6), (3.7) удовлетворяет неравенству

$$|D^\alpha v(x)| \leq \text{const} d^{\lambda-|\alpha|} [\|u\|_{C^\lambda(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{C^\lambda(\partial\Omega)}]. \quad (3.21)$$

Доказательство. В силу леммы 7 $v \in C^\lambda(\bar{\Omega})$. Следовательно, выполнены все условия леммы 2, в которой следует положить $m = [\lambda] + 2$, $f(x) = K(x, D)u(x)$.

Действительно, по предположению $u \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, и так как u является решением однородного эллиптического уравнения (0.1), то по лемме 2.2 работы [9]

$$|D^\alpha u(x)| \leq \text{const} d^{\lambda-|\alpha|} \|u\|_{C^\lambda}, \quad |\alpha| > \lambda. \quad (3.22)$$

Поэтому при $|\alpha| = [\lambda] + 2$

$$|D^\alpha K(x, D)u(x)| \leq \text{const} d^{\lambda-|\alpha|-2} \|u\|_{C^\lambda},$$

т. е. условие (1.11) выполнено.

Остается проверить выполнение условия (1.12). Для этого заметим, что $v = \frac{\partial u}{\partial x_1} - w$, и поэтому

$$|\nabla D^\alpha v| \leq \left| \nabla D^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| + |\nabla D^\alpha w|. \quad (3.23)$$

Первое слагаемое в правой части (3.23) оценивается по формуле (3.22), а второе — по формуле (3.15). Отсюда следует неравенство (1.12). Тем самым все условия леммы 2 выполнены и поэтому верна оценка (3.21). Лемма 8 доказана.

Положим $W = \{x \in V \cap \Omega : x_1 = 0\}$.

Лемма 9. Пусть $\psi \in C^\lambda(\partial\Omega)$ и пусть $u \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ является решением краевой задачи (0.1) — (0.3). Тогда $u(0, \bar{x}) \in C^\lambda(\bar{W})$ и

$$\|u(0, \bar{x})\|_{C^{\lambda+1}(\bar{W})} \leq \text{const} [\|u\|_{C^\lambda(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{C^\lambda(\partial\Omega)}]. \quad (3.24)$$

Доказательство. Положим

$$\tilde{L}(x, D) = \sum_{j, k=2}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=2}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \quad (3.25)$$

и введем следующий дифференциальный оператор первого порядка:

$$P(x, D) = a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + b_1(x). \quad (3.26)$$

Тогда

$$L(x, D) = \tilde{L}(x, D) + P(x, D) \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (3.27)$$

Так как функция u по условию является решением уравнения (0.1), то, согласно (3.27), справедливо равенство

$$\tilde{L}(x, D)u(x) = -P(x, D) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad x \in V \cap \Omega.$$

В частности, это равенство справедливо для $x \in W$, т. е. при $x_1 = 0$. Обозначив

$$f(\bar{x}) = -P(x, D) \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}, \quad (3.28)$$

получим

$$\tilde{L}(0, \bar{x}, D)u(0, \bar{x}) = f(\bar{x}). \quad (3.29)$$

Оператор \tilde{L} , определенный равенством (3.25), очевидно является эллиптическим оператором в переменных $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$, поэтому (3.29) — эллиптическое уравнение в W . Из равенства (3.9) в силу лемм 6 и 7 следует, что $du/\partial x_1 \in C^\lambda(\overline{V \cap \Omega})$, и справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{C^\lambda} \leq \text{const} (\|u\|_{C^\lambda} + \|\psi\|_{C^\lambda}). \quad (3.30)$$

Так как оператор P , введенный формулой (3.26), является оператором первого порядка, то $P du/\partial x_1 \in C^{\lambda-1}$ и в соответствии с определением (3.28) $f \in C^{\lambda-1}(W)$, причем, согласно (3.30),

$$\|f\|_{C^{\lambda-1}(\overline{W})} \leq \text{const} (\|u\|_{C^\lambda} + \|\psi\|_{C^\lambda}).$$

По условию $u = 0$ при $x \in S$, а тогда из последнего неравенства и эллиптического уравнения (3.29) получаем

$$\|u(0, \bar{x})\|_{C^{\lambda+1}(\overline{W})} \leq \text{const} [\|f\|_{C^{\lambda-1}} + \|u\|_{C(\overline{\Omega})}] \leq \text{const} [\|u\|_{C^\lambda} + \|\psi\|_{C^\lambda}].$$

Лемма 9 доказана.

Пусть $\lambda > 1$, $\psi \in C^\lambda(\partial\Omega)$ и пусть u — решение задачи (0.1) — (0.3). Известно (см. [7]), что в этом случае $u \in C^\lambda(\overline{\Omega})$. Докажем, что для любой точки $x_0 \in \partial\Omega$ найдется окрестность $V = V(x_0)$ такая, что $u \in C^\lambda_\mu(\overline{V \cap \Omega})$. Производная решения u представима в виде (3.8). Из лемм 6 и 8 следует, что для любого мультииндекса α с $|\alpha| = [\lambda] + 2$ и любого $x \in \Omega$ выполняется оценка

$$\left| D^\alpha \frac{\partial u}{\partial l}(x) \right| \leq \text{const} d^{\lambda-|\alpha|} [\|u\|_{C^\lambda(\overline{\Omega})} + \|\psi\|_{C^\lambda(\partial\Omega)}]. \quad (3.31)$$

Пусть $S \subset \partial\Omega$ есть множество тех точек, в которых l касается $\partial\Omega$. Если $x_0 \in \partial\Omega \setminus S$, то, интегрируя $du/\partial l$ вдоль векторного поля l и применяя (3.31), получаем

$$|D^\alpha u(x)| \leq \text{const} d^{\lambda+1-|\alpha|} [\|u\|_{C^\lambda(\overline{\Omega})} + \|\psi\|_{C^\lambda(\partial\Omega)}], \quad (3.32)$$

откуда следует, что на каждом компакте $K \subset \partial\Omega \setminus S$ функция $u \in C^{\lambda+1}(K)$.

Если $x_0 \in S$, то, переходя к локальным координатам и интегрируя вдоль l , представим решение u в виде (3.11). Первое слагаемое в правой части этого равенства оценено в лемме 9, второе и третье — в леммах 8, 6 и 5. Из этих лемм и из (3.32) получаем

$$\|u\|_{C^\lambda_\mu} \leq \text{const} [\|u\|_{C^\lambda} + \|\psi\|_{C^\lambda}]. \quad (3.33)$$

Заметим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $C(\varepsilon) > 0$ такая, что при $\delta > 0$ $\mu(\delta) \leq \varepsilon + C(\varepsilon)\delta^\lambda \mu(\delta)$. Отсюда следует неравенство

$$\|u\|_{C^\lambda} \leq \varepsilon \|u\|_{C^\lambda} + C(\varepsilon) \|u\|_C. \quad (3.34)$$

Выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым и применив (3.34) для оценки первого слагаемого в правой части (3.33), получим требуемое неравенство (0.9). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $\sigma(t)$ — положительная четная функция, строго возрастающая при $t \geq 0$, $\sigma(0) = 0$. Положим

$$g(t) = \int_0^t \sigma(s) ds \quad (4.1)$$

и рассмотрим в области

$$\Omega = \{x \in R^n : g(x_1) + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \quad (4.2)$$

краевую задачу (0.11). Как и выше, обозначим $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ и положим $S = \{x \in \partial\Omega : |\bar{x}| = 1\}$, $B_{n-1} = \{x \in \Omega : x_1 = 0\}$.

Рассмотрим произвольную функцию $v(\bar{x})$, гармоническую при $|\bar{x}| < 1$ и непрерывную при $|\bar{x}| \leq 1$. Для любой такой функции v функция

$$u(x) = x_1 v(\bar{x}) \quad (4.3)$$

является гармонической в Ω .

Определим функцию ψ , заданную на $\partial\Omega$, следующим равенством:

$$\psi(x) = v(\bar{x})|_{\partial\Omega}. \quad (4.4)$$

Тогда $u(x)$ есть решение задачи (0.11) с граничной функцией (4.4). Убедимся в том, что функцию v можно подобрать так, чтобы выполнялись все условия теоремы 2. Предварительно докажем следующую лемму. Напомним, что $\mu = g^{-1}$.

Лемма 10. Пусть функция u является решением задачи (0.11) из класса $C^\lambda_v(\bar{\Omega})$. Тогда для любого мультииндекса α с $|\alpha| = [\lambda] + 2$ выполняется неравенство

$$|D^\alpha u(x)| \leq \text{const } d^{\lambda - |\alpha|}(x) v(d(x)). \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в Ω . Положим

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega. \quad (4.6)$$

Тогда гармоническая функция u представляется в виде

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y) u(y) ds(y). \quad (4.7)$$

Отсюда для любых мультииндексов α с $|\alpha| = [\lambda]$ и β с $|\beta| = 2$ получаем

$$D^{\alpha+\beta} u(x) = \int_{\partial\Omega} D_x^\beta P(x, y) D^\alpha u(y) ds(y). \quad (4.8)$$

Заметим, что в силу формулы Грина

$$\int_{\partial\Omega} D_x^\beta P(x, y) ds(y) = 0,$$

и поэтому из (4.8) получаем

$$D^{\alpha+\beta}u(x) = \int_{\partial\Omega} D^{\beta}P(x, y) [D^{\alpha}u(y) - D^{\alpha}u(x)] ds(y). \quad (4.9)$$

Далее воспользуемся следующей оценкой производных функции $P(x, y)$ (см. [13]): $|D^{\beta}P(x, y)| \leq \text{const } |x-y|^{1-n-|\beta|}$. Из этой оценки и (4.9) следует

$$|D^{\alpha+\beta}u(x)| \leq \text{const} \int_{\partial\Omega} |x-y|^{1-n-|\beta|} |D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)| ds(y). \quad (4.10)$$

По условию при $|\alpha| = [\lambda]$

$$|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)| \leq \text{const } |x-y|^{\lambda-|\alpha|} \nu(|x-y|).$$

Подставляя это неравенство в правую часть (4.10), получаем

$$|D^{\alpha+\beta}u(x)| \leq \text{const} \int_{\partial\Omega} |x-y|^{1-n-|\beta|+\lambda-|\alpha|} \nu(|x-y|) ds(y).$$

Положим $d = \text{dis}(x, \partial\Omega)$ и перейдем в последнем интеграле к локальным координатам. В результате получим

$$|D^{\alpha+\beta}u(x)| \leq \text{const} \int_0^1 (d+t)^{\lambda-1-n-|\alpha|} \nu(d+t) t^{n-2} dt. \quad (4.11)$$

По условию $\nu(t)/t$ убывает при $t > 0$, и поэтому из (4.11) следует

$$|D^{\alpha+\beta}u(x)| \leq \text{const} \frac{\nu(d)}{d} \int_0^1 (d+t)^{\lambda-n-|\alpha|} t^{n-2} dt \leq \text{const } d^{\lambda-|\alpha|-2} \nu(d).$$

Лемма 10 доказана.

Пусть функция $u(x)$, определенная равенством (4.3), принадлежит $C_{\nu}^{\lambda}(\bar{\Omega})$, где $\nu = o(\mu)$. Для любого мультииндекса α с $|\alpha| = [\lambda] + 2$, согласно лемме 10, выполняется оценка $|D^{\alpha}u(x)| \leq \text{const } d^{\lambda-|\alpha|} \nu(d)$. Если $\alpha_1 = 0$, то $D^{\alpha}u = x_1 D^{\alpha}v$, поэтому

$$|D^{\alpha}v(x)| \leq \text{const } |x_1|^{-1} d^{\lambda-|\alpha|} \nu(d). \quad (4.12)$$

Фиксируем произвольную точку $\bar{x} \in B_{n-1}$ и выбираем координату x_1 так, чтобы выполнялось равенство

$$g(x_1) = (1 - |\bar{x}|^2)/2. \quad (4.13)$$

Тогда в силу неравенств (см. лемму 3.1 в [9]) $C_1 d(x) \leq 1 - |\bar{x}|^2 - g(x_1) \leq C_2 d(x)$ справедливы оценки

$$C_3 d(x) \leq 1 - |\bar{x}|^2 \leq C_4 d(x). \quad (4.14)$$

Так как $\mu = g^{-1}$, то из (4.13), (4.14) получаем $|x_1| \geq C_5 \mu(d(x))$. Из последней оценки, из (4.12) и (4.14) следует неравенство

$$|D^{\alpha}v(x)| \leq \text{const } d^{\lambda-|\alpha|} \nu(d)/\mu(d) = o(1) d^{\lambda-|\alpha|}. \quad (4.15)$$

Это неравенство означает, что $v \in C^{\lambda}(\bar{B}_{n-1})$. Более того, из (4.15) аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 2.5 в работе [9], можно получить, что при $|\beta| = [\lambda]$

$$|D^{\beta}v(x) - D^{\beta}v(y)| = o(1) |x-y|^{\lambda-|\beta|}. \quad (4.16)$$

Выберем теперь гармоническую функцию $v \in C^{\lambda}(\bar{B}_{n-1})$ так, чтобы условие (4.16) не выполнялось. Тогда $u = x_1 v$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и не принадлежит классу $C_{\nu}^{\lambda}(\bar{\Omega})$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 4. С. 749—752.
2. Borggelli R. // J. Math. and Mech. 1966. Vol. 1. P. 51—81.
3. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. // Мат. сб. 1969. Т. 78. С. 148—176.
4. Хёрмандер Л. // Псевдодифференциальные операторы. М., 1967. С. 297—367.
5. Мазья В. Г. // Мат. сб. 1972. Т. 87. С. 417—454.
6. Melin A., Sjostrand J. // Comm. in Partial Diff. Equat. 1976. Vol. 1. P. 313—400.
7. Winzell B. // Math. Scand. 1978. Vol. 43. P. 169—176.
8. Панеях Б. П. // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 2. С. 226—268.
9. Алимов Ш. А. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1738—1751.
10. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М., 1984.
11. Хёрмандер Л. // Математика (сб. пер.). 1969. Т. 13, № 6. С. 114—137.
12. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
13. Соболевский П. Е. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 804—807.

Самаркандский государственный университет
им. Алишера Навои

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

УДК 517.956.4

Е. А. БАДЕРКО

О «ПОЧТИ» МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рассматривается параболический оператор порядка $2m$ (m — произвольное натуральное число) с вещественными постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L} \equiv D_t + (-1)^m \sum_{|k|=2m} a_k D^k,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$, причем $\mathcal{A}(\sigma) \equiv \sum_{|k|=2m} a_k \sigma^k \geq \delta_0 |\sigma|^{2m}$, $\sigma \in R^n$, для некоторого $\delta_0 > 0$.

В слое $\Omega_T = R^n \times (0, T)$ ($T > 0$ фиксировано) выделяется полуограниченная область $\Omega_T^+ = \{(x, t) \in \Omega_T | x_n > X(t)\}$ с негладкой боковой границей $\Sigma_T = \{(x, t) \in \Omega_T | x_n = X(t)\}$, где X — непрерывная на $[0, T]$ функция, удовлетворяющая условию Гёльдера:

$$[X]_{r, \alpha} \equiv \sup_{t, t+\Delta t \in (0, T)} \frac{|X(t+\Delta t) - X(t)|}{|\Delta t|^{1-(r+1-\alpha)/2m}} < +\infty, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (0.1)$$

число r указано ниже в (0.6).

Пусть $\Omega_T' = R^{n-1} \times (0, T)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $k' = (k_1, \dots, k_{n-1})$, $\alpha \in (0, 1)$. Следуя [1, с. 705], через $H^{s+\alpha, (s+\alpha)/2m}(\bar{\Omega}_T')$ при $0 \leq s \leq 2m-1$ обозначаем класс функций ψ , непрерывных в $\bar{\Omega}_T'$ вместе со всеми производными $D^{k'}\psi$ при $|k'| \leq s$, и с конечной нормой

$$\begin{aligned} |\psi|_{\Omega_T'}^{(s+\alpha)} \equiv & \sum_{0 \leq |k'| \leq s} \left\{ \sup_{\Omega_T'} |D^{k'}\psi(x', t)| + \right. \\ & \left. + \sup_{(x', t), (x', t+\Delta t) \in \Omega_T'} \frac{|D^{k'}\psi(x', t+\Delta t) - D^{k'}\psi(x', t)|}{|\Delta t|^{(s-|k'|+\alpha)/2m}} \right\} + \end{aligned}$$