Д. В. Якубович, Линейно-подобная модель Секефальви-Надя–Фояша в области,
Алгебра и анализ, 2003, том 15, выпуск 2, 190–237

Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 2

ЛИНЕЙНО-ПОДОБНАЯ МОДЕЛЬ СЕКЕФАЛЬВИ-НАДЯ–ФОЯША В ОБЛАСТИ

© Д. В. Якубович

§0. Введение

Целью работы является введение новой линейно-подобной функциональной модели линейных операторов и изучение ее простейших свойств. Она обобщает модель С.-Надя–Фояша как для $C_{0\cdot}$-сжатий, так и для $C_{0\cdot}$-диссипативных операторов. Наша модель строится не только в круге или полуплоскости, но и в достаточно произвольной области. Приведение оператора к модельному „почти диагональному“ виду выписывается напрямую через резольвенту оператора. Основное внимание уделяется C_{00}-случаю. Главные результаты работы были аннонсированы в [76].

Пусть Γ — конечное объединение кусочно-гладких кривых в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, множества Ω_{int}, Ω_{ext} открыты и не пересекаются, $\mathbb{C} = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}$, $\Gamma = \partial\Omega_{\text{int}} = \partial\Omega_{\text{ext}}$ (здесь мы опускаем одно техническое условие на Γ). Основой изучения являются модельные пространства $\mathcal{H}(\delta)$, сопоставляемые операторнозначным ограниченным аналитическим функциям δ в Ω_{int} с определенными свойствами.

Рассмотрим частный случай, когда $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$, причем δ^{-1} — мероморфная функция на Ω_{int}, и $\|\delta^{-1}(\lambda)\| \leqslant C$ п.в. на Γ. Здесь R, R_* — гильбертовы пространства, а $\mathcal{L}(R, R_*)$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов из R в R_*. Всюду в статье рассматриваются только сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ обозначает векторный класс Смирнова R–значных функций в Ω_{ext} (см. ниже §2). Предположим, что Ω_{int} и Ω_{ext} неограничены. В этом частном случае модельное пространство $\mathcal{H}(\delta)$ состоит из функций f, мероморфных в Ω_{int} и голоморфных в Ω_{ext} таких, что

$$f|\Omega_{\text{ext}} \in E^2(\Omega_{\text{ext}}, R), \quad \delta \cdot f|\Omega_{\text{int}} \in E^2(\Omega_{\text{int}}, R_*), \quad f_{\text{int}} = f_{\text{ext}} \text{ п.в. на } \Gamma.$$

Это гильбертово пространство. Общее определение $\mathcal{H}(\delta)$ дано в §2.

Пару линейных операторов (A, J) (возможно, неограниченных) будем называть 2-*системой*, если выполнены следующие условия:

1) A — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с непустым полем регулярности $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ и областью определения $\mathcal{D}(A)$ (здесь $\sigma(A)$ — спектр оператора A);

2) $J : \mathcal{D}(J) \to R$, причем $\mathcal{D}(J) = \mathcal{D}(A) \subset H$ и J ограничен в смысле нормы графика $\|x\|_G \stackrel{\text{def}}{=} \left(\|x\|^2 + \|Ax\|^2\right)^{1/2}$ в $\mathcal{D}(A)$. Здесь R — гильбертово пространство.

С каждой 2-системой (A, J) связывается преобразование $U_{A,J}$ из H в пространство аналитических на $\rho(A)$ функций, действующее по формуле

$$U_{A,J}\, x(\lambda) = J(\lambda I - A)^{-1} x, \quad x \in H,\ \lambda \in \rho(A).$$

В §1 даны общие свойства этого преобразования и показано, что оно в определенном смысле диагонализует оператор A.

Основным предметом статьи является нахождение критериев того, что оператор $U_{A,J}$ осуществляет изоморфизм пространства H на пространство $\mathcal{H}(\delta)$ для некоторой функции δ (этот изоморфизм не предполагается изометрическим). В этом случае будем называть δ *обобщенной характеристической функцией* оператора A. Эффективный критерий такого рода дан в §3. Если $U_{A,J} : H \to \mathcal{H}(\delta)$ — изоморфизм и $*$-внутренняя часть функции δ — двусторонне внутренняя функция, то оператор A подобен оператору умножения на z в фактор-пространстве $E^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)/\delta \cdot E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, который, в свою очередь, подобен оператору усеченного сдвига в ортогональном дополнении $E^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \ominus \delta E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$. Тесная связь нашей модели с моделью С.-Надя–Фояша объясняется в §4 и 5. Смысл работы состоит в некотором видоизменении техники С.-Надя–Фояша с тем, чтобы расширить область ее применения.

К операторам A, укладывающимся в нашу схему, применим весь хорошо разработанный аппарат модели С.-Надя–Фояша, как-то: описание коммутанта, инвариантных подпространств, функциональное исчисление, критерии базисности собственных векторов и т.д. [13, 20, 60, 61].

В §6 дан ряд примеров операторов A и их моделей, полученных этим способом. Для сжатий и диссипативных операторов показано, что при подходящем выборе J мы приходим к их модели С.-Надя–Фояша. Рассмотрены также генераторы полугрупп, связанных с динамикой роста популяций и с нейтральными линейными системами с запаздыванием (для последних модель была ранее построена С. Люнелом и автором в [56]). Вычисление обобщенных характеристических функций δ отложено до §10.

В §7 установлена связь рассматриваемой схемы с точной управляемостью линейных систем.

В §8 показано, что генератор любой c_0-группы допускает линейно-подобную модель данного вида, в которой в качестве области Ω_{int} берется подходящая вертикальная полоса. (В отличие от символов C_{00} и C_0. мы используем символ c_0 в смысле теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов, см. [23].) Таким образом, в частности, эта схема охватывает произвольные ограниченные возмущения самосопряженных операторов.

Наша схема применима к неограниченным возмущениям самосопряженных операторов с дискретным спектром, при этом в качестве Ω_{int} берется подходящая область параболического типа. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Обобщенная характеристическая функция δ системы (A, J) часто может быть угадана как матричный „знаменатель“ выражения для $U_{A,J}$; в таких случаях легко получается включение $U_{A,J}\, H \subset \mathcal{H}(\delta)$. В §9 дана абстрактная схема, позволяющая установить равенство $U_{A,J}\, H = \mathcal{H}(\delta)$.

Важную роль играет двойственность моделей. Именно пусть $\overline{\Omega}_{\text{int}} = \{\bar{z} \colon z \in \Omega_{\text{int}}\}$ и $\delta^{\mathrm{T}}(z) = \delta^*(\bar{z})$, $z \in \overline{\Omega}_{\text{int}}$. Пространства $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, построенные по областям Ω_{int} и $\overline{\Omega}_{\text{int}}$, оказываются двойственными друг другу относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle_\delta$, определяемой в §4. Систему (A^*, J_*) назовем *двойственной системе* (A, J) *относительно функции* δ, если $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$, U_{A^*,J_*} — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, и выполнена формула двойственности

$$\langle U_{A,J}\, x, U_{A^*,J_*}\, y\rangle_\delta = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in H. \tag{0.1}$$

Если даны J и δ и $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$, то указанные условия определяют оператор $J_* \colon \mathcal{D}(A^*) \to R_*$ однозначно.

Тройку операторов (A, J, J_*) назовем *3-системой*, если оператор A замкнут и плотно определен (откуда следует существование A^*) и (A, J), (A^*, J_*) — 2-системы. Определим *передаточную функцию* Φ 3-системы (A, J, J_*) формулой

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\mu) = J[(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}]J_*^*. \tag{0.2}$$

Эта формула корректно задает функцию Φ с точностью до аддитивной постоянной (см. §9). Связь между обобщенной характеристической и передаточной функцией дана в теоремах 9.5 и 9.6. По системе (A, J) и предполагаемой обобщенной характеристической функции δ можно построить функцию Φ и двойственную систему (A^*, J_*). В предположении, что эти объекты известны, эти теоремы дают критерии того, что δ в самом деле является обобщенной характеристической функцией, и тем самым позволяют полностью вычислить модель оператора A.

Функциональные модели недиссипативных операторов исследовались достаточно глубоко, в частности, в работах Набоко и его учеников [10, 17], Васюнина–Макарова [68] и Капустина [6]. Наш подход отличается от подхода этих статей; отличны и рассматриваемые классы операторов.

Важным отличием нашей схемы от теории С.-Надя–Фояша является неоднозначность в выборе обобщенной характеристической функции δ даже при фиксированной области Ω_{int}. При наших предположениях характеристическая функция в смысле С.-Надя–Фояша была бы $*$-внутренней. Если система обладает обобщенной характеристической функцией, то она обладает и $*$-внутренней характеристической функцией (в случае односвязности компонент множества Ω_{int}). Однако именно допущение невнутренних обобщенных характеристических функций δ позволяет во многих случаях их явно вычислять. Двойственность модельных пространств, которую мы вводим, приспособлена именно для такого вычисления.

Отметим, что линейно-подобные модели операторов часто определяются неоднозначным образом. Уже для конечномерных операторов нет никакого канонического однозначного выбора преобразования, приводящего их к форме Жордана. Неоднозначность рассматриваемых нами моделей обсуждается в §11.

Использование двойственности Коши между моделью оператора и его сопряженного весьма естественно при изучении оператора, не „привязанного“ к окружности или прямой, см. работы Ся [72], Кларка [33], а также предыдущие работы автора [73–77] и др. В иной форме двойственность и модельные пространства использовались также в работах Фурмана [39,40]. Несмотря на то что модельные функциональные пространства гильбертовы, мы часто реализуем сопряженные к ним пространства как другие пространства. За счет этого достигаются простота формул и симметрия в рассмотрении оператора и его сопряженного. Под сопряженным пространством в отличие от [75] мы понимаем пространство антилинейных непрерывных функционалов.

Если A — оператор, заданный некоторой формулой, и $\mathcal{H}$ — функциональное пространство, то символом $A\lceil\mathcal{H}$ мы обозначаем оператор A, рассматриваемый на $\mathcal{H}$. В случаях, когда $A\lceil\mathcal{H}$ неограничен, область определения $\mathcal{D}(A\lceil\mathcal{H})$ — собственное подмножество пространства $\mathcal{H}$ и будет указываться явно.

Автор выражает благодарность В. И. Васюнину, В. В. Капустину, К. ле Мерди, М. М. Маламуду и Н. К. Никольскому за обсуждение работы и критические замечания.

Добавление при корректуре.

Отметим, что совсем недавно была опубликована работа А. С. Тихонова [79], которая несомненно имеет отношение к теме настоящей работы.

В ней построена модель произвольного ядерного возмущения нормального оператора со спектром на гладкой замкнутой кривой, близкая к моделям С.-Надя–Фояша и С. Н. Набоко, и исследованы абсолютно непрерывные и сингулярные спектральные компоненты операторов этого класса.

§1. Построение резольвентной модели линейного оператора

1.1. Модельный оператор. Пусть Ω_0 — непустое открытое множество в $\mathbb{C}$, R — банахово пространство и $\mathcal{H}$ — банахово пространство аналитических функций $f(z)$ на Ω_0 со значениями в R. Символом $\mathrm{Hol}(\Omega_0, R)$ обозначим топологическое векторное пространство всех R-значных голоморфных функций на Ω_0 со стандартной топологией равномерной сходимости на компактах.

Определение. Функциональное банахово пространство $\mathcal{H}$ будем называть *допустимым*, если

(1) $\mathcal{H}$ непрерывно вложено в $\mathrm{Hol}(\Omega_0, R)$;

(2) $\mathcal{H}$ не содержит ненулевых констант;

(3) $\lambda \in \Omega_0$, $f \in \mathcal{H} \implies \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda} \in \mathcal{H}$.

Будем предполагать $\mathcal{H}$ допустимым. Определим (возможно, неограниченные) операторы M_z^{T}, j следующим образом. Положим

$$\mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}) = \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}} \lceil \mathcal{H}) = \{f \in \mathcal{H} : \exists c \in R \colon zf - c \in \mathcal{H}\}. \tag{1.1}$$

Для f из $\mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}})$ константа c единственна. Поэтому операторы

$$\begin{gathered} j \colon \mathcal{D}(j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}) \to R, \quad M_z^{\mathrm{T}} \colon \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}) \to \mathcal{H}, \\ jf \stackrel{\mathrm{def}}{=} c, \quad (M_z^{\mathrm{T}} f)(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} zf(z) - c, \quad f \in \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}) \end{gathered} \tag{1.2}$$

корректно определены. Оператор M_z^{T} будем называть *модельным*.

Сопоставим допустимому пространству $\mathcal{H}$ множество

$$\Omega(\mathcal{H}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \forall g \in \mathcal{H}\, \exists! c \in R \colon \frac{g(z) - c}{z - \lambda} \in \mathcal{H}\right\}. \tag{1.3}$$

Очевидно, $\Omega(\mathcal{H}) \supset \Omega_0$. Распространим функции из $\mathcal{H}$ с Ω_0 на $\Omega(\mathcal{H})$ следующим образом: если $\lambda \in \Omega(\mathcal{H})$, то $g(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} c$, где c определяется из (1.3).

Предложение 1.1. 1) *Оператор* $(M_z^{\mathrm{T}} - \lambda I)^{-1}$ *существует и ограничен тогда и только тогда, когда* $\lambda \in \Omega(\mathcal{H})$. *При этом*

$$(M_z^{\mathrm{T}} - \lambda I)^{-1} g(z) = \frac{g(z) - g(\lambda)}{z - \lambda}. \tag{1.4}$$

2) $\mathbb{C} \setminus \Omega(\mathcal{H}) = \sigma(M_z^{\mathrm{T}})$. *В частности, множество* $\Omega(\mathcal{H})$ *открыто.*

3) $g(\lambda) = j(\lambda I - M_z^{\mathrm{T}})^{-1} g$ *при* $g \in \mathcal{H}, \lambda \in \Omega(\mathcal{H})$.

4) *Для каждого* $g \in \mathcal{H}$ *функция* $g(\lambda)$ *аналитична на* $\Omega(\mathcal{H})$.

Доказательство. Легко видеть, что (1.4) выполнено при $\lambda \in \Omega_0$. Следовательно, оператор $(M_z^{\mathrm{T}} - \lambda I)^{-1}$ ограничен при $\lambda \in \Omega_0$, откуда вытекает замкнутость оператора M_z^{T}.

Пусть $g \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение $(M_z^{\mathrm{T}} - \lambda I) f = g$ равносильно равенствам $f(z) = (z - \lambda)^{-1}\big(g(z) - c\big)$, $c = -jf$. При этом третье равенство следует из второго и условия $f \in \mathcal{H}$. Отсюда вытекает утверждение 3). Применяя теорему о замкнутом графике, получаем 1), откуда сразу следует 2). При $\mu \in \Omega(\mathcal{H})$ и λ, близких к μ, из 3) получаем, что

$$g(\lambda) = j(\mu I - M_z^{\mathrm{T}})^{-1}\big(I - (\mu - \lambda)(\mu I - M_z^{\mathrm{T}})^{-1}\big)^{-1} g.$$

Так как оператор $j(\mu I - M_z^{\mathrm{T}})^{-1}$ ограничен, функция g аналитична в точке μ. Это доказывает 4). •

Так как $(M_z^{\mathrm{T}} - \lambda I)^{-1}$ — ограниченный оператор при некоторых λ, оператор M_z^{T} замкнут.

1.2. Моделирование 2-систем. Пусть H, R — банаховы пространства, (A, J) — 2-система, $\mathcal{D}(A) \subset H$, $A\colon \mathcal{D}(A) \to H$, $J : \mathcal{D}(A) \to R$. Назовем систему (A, J) *наблюдаемой*, если из $U_{A,J}\, x \equiv 0$ вытекает, что $x = 0$.

Предложение 1.2. *Пусть система* (A, J) *наблюдаема. Рассмотрим функциональное пространство* $\mathcal{H} = U_{A,J}\, H$ *функций на* $\rho(A)$ *с нормой, индуцированной из* H. *Тогда* $U_{A,J}$ *— линейный изоморфизм* H *на* $\mathcal{H}$. *При этом*

1)

$$\big(U_{A,J}\,(A - \lambda I)^{-1}\, U_{A,J}^{-1} f\big)(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}, \quad f \in \mathcal{H},\ \lambda \in \rho(A); \tag{1.5}$$

2) *пространство* $\mathcal{H}$ *допустимо*;

3) $U_{A,J}\,\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}} \lceil \mathcal{H})$, *и* $U_{A,J}$ *сплетает* 2*-систему* (A, J) *с* 2*-системой* (M_z^{T}, j):

$$U_{A,J}\, A U_{A,J}^{-1} = M_z^{\mathrm{T}} \lceil \mathcal{H}, \quad J U_{A,J}^{-1} = j; \tag{1.6}$$

4) $\Omega(\mathcal{H}) = \rho(A)$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из тождества Гильберта; из него прямо вытекает 2). Ввиду (1.4) и (1.5)

$$U_{A,J}\,(A-\lambda I)^{-1}U_{A,J}^{-1} = (M_z^{\mathrm{T}}-\lambda I)^{-1}, \tag{1.7}$$
$$U_{A,J}\,\mathcal{D}(A) = U_{A,J}\,(A-\lambda I)^{-1}H = (M_z^{\mathrm{T}}-\lambda I)^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}).$$

Из (1.7) и утверждений 1), 2) предложения 1.1 получаются утверждения 3), 4). •

Определение. Пусть A и A_1 — операторы в H и H_1 соответственно и (A,J), (A_1,J_1) — две 2-системы с одним и тем же пространством R. Будем говорить, что изоморфизм $U\colon H\to H_1$ сплетает операторы A и A_1 и что операторы A и A_1 подобны, если $U\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A_1)$ и $UAU^{-1}=A_1$. Если, кроме того, $Jx=J_1Ux$ для всех $x\in\mathcal{D}(A)$, то будем говорить, что U сплетает 2-систему (A,J) с 2-системой (A_1,J_1) и что 2-системы (A,J) и (A_1,J_1) подобны.

Легко видеть, что 2-системы (A,J) и (A_1,J_1) подобны тогда и только тогда, когда $\rho(A)=\rho(A_1)$ и пространства $U_{A,J}H$ и $U_{A_1,J_1}H$ совпадают как множества. Отметим статью [1], где, в частности, обсуждается слабое подобие систем и его связь с передаточной функцией, а также статью [2], где обсуждается подобие всех минимальных пассивных реализаций заданной передаточной функции.

В дальнейшем мы будем использовать следующий очевидный факт (по существу уже проверенный выше). Пусть A и A_1 — замкнутые операторы и λ — фиксированная точка из $\rho(A)$. Оператор U сплетает A и A_1 тогда и только тогда, когда $\lambda\in\rho(A_1)$, и $U(A-\lambda I)^{-1}U^{-1}=(A_1-\lambda I)^{-1}$.

§2. Пространства $\mathcal{H}(\delta)$

Пусть Ω_{int}, Ω_{ext} — два непересекающихся непустых открытых множества в $\mathbb{C}$ таких, что $\Gamma=\partial\Omega_{\mathrm{int}}=\partial\Omega_{\mathrm{ext}}$ — конечное объединение кусочно-гладких кривых и $\mathbb{C}=\Omega_{\mathrm{int}}\cup\Gamma\cup\Omega_{\mathrm{ext}}$. Мы предполагаем, что каждая из компонент связности кривой Γ гомеоморфна окружности или прямой и что в последнем случае оба конца этой компоненты уходят на бесконечность. Тогда Ω_{int}, Ω_{ext} имеют конечное число компонент связности. Мы всегда будем предполагать, что

$$(|z|+1)^{-1}\in L^2(\Gamma,|dz|). \tag{2.1}$$

Если область Ω_{int} связна, то класс Смирнова $E^2(\Omega_{\mathrm{int}})$ состоит из аналитических в Ω_{int} функций f таких, что $\sup_n\int_{\partial\Omega_n}|f|^2\,|dz|<\infty$ для некоторой последовательности областей $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots$ со спрямляемой границей таких, что $\bigcup_n \Omega_n = \Omega_{\text{int}}$. Свойства классов Смирнова E^p и связанных с ними понятий изложены в [36, 16]. В общем случае мы определяем $E^2(\Omega_{\text{int}})$ как прямую сумму классов E^2 в компонентах связности Ω_{int}. Функции из $E^2(\Omega_{\text{int}})$ имеют некасательные граничные значения почти всюду на Г. Пространство $E^2(\Omega_{\text{int}})$ — гильбертово с нормой

$$\|f\|^2_{E^2(\Omega_{\text{int}})} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |f(z)|^2 \, |dz|.$$

В ряде случаев будем предполагать для простоты, что все компоненты множества Ω_{int} односвязны, хотя обычно от этого условия можно избавиться.

Скалярные или операторнозначные функции в Ω_{int} будем называть внешними или внутренними, если они обладают соответствующими свойствами в каждой компоненте множества Ω_{int}.

Пусть R — вспомогательное гильбертово пространство. Нам потребуются гильбертовы пространства $L^2(\Gamma, R) = L^2(\Gamma, |dz|) \otimes R$, $E^2(\Omega_{\text{int}}, R) = E^2(\Omega_{\text{int}}) \otimes R$, $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R) = E^2(\Omega_{\text{ext}}) \otimes R$. Элементы двух последних пространств — аналитические в Ω_{int} (Ω_{ext}) R-значные функции, имеющие некасательные граничные значения п.в. [20]. Норма в $L^2(\Gamma, R)$, $E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ задается формулой

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \|f(z)\|^2 \, |dz|.$$

Функции из $E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ отождествляются с их граничными значениями на Г. Тем самым эти два пространства рассматриваются как замкнутые подпространства $L^2(\Gamma, R)$.

Пусть Ω — одна из областей Ω_{int}, Ω_{ext}. Положим $\widehat{E}^2(\Omega, R) = E^2(\Omega, R)$, если $\mathbb{C} \setminus \Omega$ — неограниченное множество, и

$$\widehat{E}^2(\Omega, R) = \{ v \in E^2(\Omega, R) \colon v(\infty) = 0 \},$$

если $\mathbb{C} \setminus \Omega$ — ограниченное множество. Ориентируем кривые, входящие в Г, так, чтобы при движении вдоль них область Ω_{int} оставалась слева. Граничные значения на Г функций f на Ω_{int} (Ω_{ext}) будут обозначаться f_i (f_e). Если Ω_{int} — круг или полуплоскость, то классы $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ совпадают с классическими скалярным или векторным классом Харди H^2 в области Ω_{int} [36].

Имеет место следующее легко проверяемое утверждение.

Предложение 2.1. *Пространство $L^2(\Gamma, R)$ раскладывается в прямую сумму:*

$$L^2(\Gamma, R) = \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \dotplus \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R). \tag{2.2}$$

Параллельные проекторы на прямые слагаемые задаются соответственно интегралами Коши

$$P_{\text{int}} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}, \quad \zeta \in \Omega_{\text{int}},$$
$$P_{\text{ext}} f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}, \quad \zeta \in \Omega_{\text{ext}}$$

(*так что* $P_{\text{int}}^2 = P_{\text{int}}$, $P_{\text{ext}}^2 = P_{\text{ext}}$, $P_{\text{int}} + P_{\text{ext}} = I$).

Заметим, что условие (2.1) обеспечивает сходимость этих интегралов.

Рассмотрим также области $\overline{\Omega}_{\text{int}} = \{\bar{z} \colon z \in \Omega_{\text{int}}\}$, $\overline{\Omega}_{\text{ext}} = \{\bar{z} \colon z \in \Omega_{\text{ext}}\}$ и положим $\overline{\Gamma} = \partial\overline{\Omega}_{\text{int}} = \partial\overline{\Omega}_{\text{ext}}$. Мы вводим двойственность Коши между гильбертовыми пространствами $L^2(\Gamma, R)$ и $L^2(\overline{\Gamma}, R)$ по правилу

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \langle f(z), g(\bar{z}) \rangle\, dz, \qquad f \in L^2(\Gamma, R),\ g \in L^2(\overline{\Gamma}, R). \tag{2.3}$$

Предложение 2.2. *Разложение*

$$L^2(\overline{\Gamma}, R) = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R) \dotplus \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$$

двойственно разложению (2.2) *относительно скобки* (2.3). *Другими словами, для аннигиляторов пространств из* (2.2) *имеют место соотношения*

$$\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)^\perp = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R), \quad \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)^\perp = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R). \tag{2.4}$$

Согласно этому утверждению, можно отождествить

$$\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)^* = L^2(\overline{\Gamma}, R) \big/ \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)^\perp = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R), \tag{2.5}$$
$$\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)^* = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R), \tag{2.6}$$

т. е. пары $\big(\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R), \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\rm ext}, R)\big)$ и $\big(\widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, R), \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\rm int}, R)\big)$ являются парами двойственных гильбертовых пространств относительно двойственности (2.3).

Мы определяем оператор $M_z = M_{z,\rm int}$ умножения на независимую переменную на $\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)$ формулами

$$\begin{gathered}(M_z f)(z) = zf(z), \quad f \in \mathcal{D}(M_z) \subset \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R),\\ \mathcal{D}(M_z) \stackrel{\rm def}{=} \big\{f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R) \colon zf \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)\big\}.\end{gathered}$$

Аналогично определяется оператор $M_{z,\overline{\rm int}}$ на $\widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\rm int}, R)$. Эти операторы ограничены тогда и только тогда, когда ограничена область $\Omega_{\rm int}$.

Пространства $E^2(\Omega_{\rm ext}, R)$, $E^2(\overline{\Omega}_{\rm ext}, R)$, очевидно, допустимы, соответствующие им операторы $M_z^{\mathbf{T}}$ будем обозначать $M_{z,\rm out}^{\mathbf{T}}$, $M_{z,\overline{\rm ext}}^{\mathbf{T}}$. Операторы $M_{z,\rm int}$, $M_{z,\overline{\rm int}}$, $M_{z,\rm out}^{\mathbf{T}}$, $M_{z,\overline{\rm ext}}^{\mathbf{T}}$ имеют плотную область определения и замкнуты.

Из легко проверяемых формул

$$\big((M_{z,\overline{\rm int}} - \lambda I)^{-1}\big)^* = M^*_{(z-\lambda)^{-1},\overline{\rm int}} = \big(M_{z,\rm out}^{\mathbf{T}} - \lambda I\big)^{-1} \tag{2.7}$$

(см. (1.4)) следует, что

$$M^*_{z,\overline{\rm int}} = M_{z,\rm out}^{\mathbf{T}}.$$

Замечание. Предположим, что геометрия области $\Omega_{\rm ext}$ такова, что

$$\|(z-\lambda)^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \to 0, \qquad \text{при } \lambda \in \Omega_{\rm ext},\ \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma) \to \infty. \tag{2.8}$$

Из формулы Коши следует, что $|f(\lambda)| \leqslant \|f\|_{E^2(\Omega_{\rm ext},R)} \|(z-\lambda)^{-1}\|_{L^2(\Gamma)}$ для любой $f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, R)$. Следовательно,

$$\lim_{\substack{z\in\Omega_{\rm ext}\\ \operatorname{dist}(z,\Gamma)\to\infty}} |f(z)| = 0, \quad f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, R).$$

Из равенства (1.1), примененного к $\mathcal{H} = \widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, R)$, вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(M_{z,\rm out}^{\mathbf{T}}) = \big\{&f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, R) :\\ &\exists \lim_{\substack{z\in\Omega_{\rm ext}\\ \operatorname{dist}(z,\Gamma)\to\infty}} zf =: jf \text{ и } M_{z,\rm out}^{\mathbf{T}} f = zf - jf \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, R)\big\}.\end{aligned}$$

Отметим, что условие (2.8) вытекает, к примеру, из условия Карлесона

$$\operatorname{length}(\Gamma \cap B(\lambda, r)) \leqslant Cr,$$

где C — абсолютная постоянная. Поэтому (2.8), как правило, выполнено в приложениях.

Определения. Пусть δ — функция класса $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_1, R_2))$.

1) Будем называть δ *допустимой,* если существует константа $\epsilon > 0$ такая, что $\|\delta(\lambda)r\| \geqslant \epsilon\|r\|$ для всех $r \in R_1$ и п.в. $\lambda \in \Gamma$.

2) Введем функцию $\delta^{\mathrm{T}} \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_2, R_1))$,

$$\delta^{\mathrm{T}}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^*(\bar{z}), \quad z \in \overline{\Omega}_{\text{int}}.$$

Будем δ называть *$*$-допустимой,* если функция $\delta^{\mathrm{T}} \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_2, R_1))$ допустима, что равносильно тому, что для некоторого $\epsilon > 0$ $\delta(\lambda)\delta^*(\lambda) \geqslant \epsilon I$ при п.в. $\lambda \in \Gamma$.

3) Будем называть δ *двусторонне допустимой,* если она допустима и $*$-допустима, что означает, что δ^{-1} существует п.в. на Γ, причем $\|\delta^{-1}\| \leqslant C$ п.в. на Γ.

4) Будем говорить, что δ сжимающая, если $\|\delta(z)\| \leqslant 1$ для всех $z \in \Omega_{\text{int}}$.

Отметим, что функции из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_1, R_2))$ имеют некасательные пределы п.в. на Γ в смысле сильной сходимости операторов [20, §V.2].

Будем говорить, что имеет место односвязный случай, если все компоненты связности множества Ω_{int} односвязны, и многосвязный случай, если некоторые из этих компонент многосвязны. Нам потребуется следующий результат, который вытекает из теоремы Бёрлинга–Лакса–Халмоша для односвязного случая и из теоремы Войчика–Хасуми [69, 41] для многосвязного случая.

Теорема А. *Подпространство G пространства $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ — инвариантное подпространство операторов $M_{(z-\lambda)^{-1}}$, $\lambda \in \Omega_{\text{ext}}$ тогда и только тогда, когда существуют гильбертово пространство R_* и допустимая функция $\varphi \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ такие, что*

$$G = \varphi \cdot \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*). \tag{2.9}$$

В представлении (2.9) в односвязном случае достаточно ограничиться внутренними функциями φ (см. определение в §5). Однако (2.9) определяет замкнутое инвариантное подпространство для любой φ, удовлетворяющей условиям теоремы.

Пусть δ — $*$-допустимая функция класса $H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$. Положим

$$\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta, \Omega_{\mathrm{int}}) = \{f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)\colon \delta \cdot f|\Gamma \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)\}.$$

Пространство $\mathcal{H}(\delta)$ — замкнутое подпространство $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$. Оно допустимо как пространство функций на Ω_{ext}. Согласно §1, определен оператор $M_z^{\mathbf{T}}$ на $\mathcal{H}(\delta)$. Он будет играть роль основного модельного оператора. Он аналогичен модельному оператору С.-Надя–Фояша (см. §3 и 5). В случае неограниченной области Ω_{int} оператор $M_z^{\mathbf{T}}$ может быть неограничен.

Определение [13]. Множество тех λ из $\operatorname{clos}\Omega_{\mathrm{int}}$, для которых $\delta^{-1} \notin H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}} \cap \mathcal{W}, \mathcal{L}(R_*, R))$ для любой окрестности $\mathcal{W}$ точки λ, называется *спектром функции* δ. Обозначим его символом $\operatorname{spec}\delta$.

Спектр δ содержится в $\operatorname{clos}\Omega_{\mathrm{int}}$ и замкнут. Он может заполнять все множество $\operatorname{clos}\Omega_{\mathrm{int}}$. Его пересечение с Ω_{int} совпадает с множеством тех $\lambda \in \Omega_{\mathrm{int}}$, для которых оператор $\delta(\lambda)$ необратим.

П. 2) следующего утверждения полностью аналогичен теореме [20, VI.4.1] и в односвязном случае может быть из нее выведен.

Предложение 2.3. 1) $\Omega(\mathcal{H}(\delta)) = \mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}\delta$;

2) $\sigma(M_z^{\mathbf{T}}[\mathcal{H}(\delta)) = \operatorname{spec}\delta$;

3) $\sigma_p(M_z^{\mathbf{T}}[\mathcal{H}(\delta)) = \{\lambda \in \Omega_{\mathrm{int}}\colon \operatorname{Ker}\delta(\lambda) \neq 0\}$. *Здесь $\sigma_p(A)$ — точечный спектр оператора A.*

Для удобства изложения мы откладываем доказательство этого предложения до §4. Здесь мы ограничимся доказательством следующего утверждения.

Лемма 2.4. $\Omega(\mathcal{H}(\delta)) \supset \mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}\delta$.

Доказательство. Пусть $g_{\mathrm{ext}} \in \mathcal{H}(\delta)$; тогда $\delta \cdot g_{\mathrm{ext}}|\Gamma = g_{\mathrm{int}}$ для некоторой функции $g_{\mathrm{int}} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)$. Отождествим элемент g_{ext} с функцией

$$g(z) = \begin{cases} g_{\mathrm{ext}}(z), & z \in \Omega_{\mathrm{ext}}, \\ \delta^{-1}(z) g_{\mathrm{int}}(z), & z \in \Omega_{\mathrm{int}} \setminus \operatorname{spec}\delta. \end{cases} \tag{2.10}$$

При таком соглашении функции из $\mathcal{H}(\delta)$ аналитичны на Ω_{ext} и на $\Omega_{\mathrm{int}} \setminus \operatorname{spec}\delta$ и удовлетворяют условию $g_i = g_e$ на $\Gamma \setminus \operatorname{spec}\delta$. Если $\lambda \in \Gamma \setminus \operatorname{spec}\delta$ и $\mathcal{W}$ — малый круг с центром в λ, то сужение g на $\mathcal{W} \setminus \Gamma$ лежит в $E^2(\Omega_{\mathrm{ext}} \cap \mathcal{W}, R)$ и в $E^2(\Omega_{\mathrm{int}} \cap \mathcal{W}, R)$, причем значения этих сужений Γ совпадают п.в.

Из интегральной формулы Коши легко вывести, что $g|\mathcal{W}\setminus\Gamma$ — сужение аналитической функции, заданной на $\mathcal{W}$, что позволяет определить $g(\lambda)$ и при $\lambda\in\Gamma\setminus\operatorname{spec}\delta$. Мы „продолжили" функцию g_{ext} до аналитической функции g на $\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}\delta$.

При таком доопределении очевидно, что $\frac{g(z)-g(\lambda)}{z-\lambda}\in\mathcal{H}(\delta)$, если $g\in\mathcal{H}(\delta)$ и $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}\delta$. Отсюда вытекает наше утверждение. •

В дальнейшем всегда, когда это удобно, будем использовать продолжение (2.10) и считать функции из $\mathcal{H}(\delta)$ аналитическими на $\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}\delta$. Будем называть это продолжение *псевдопродолжением* (обычно этот термин используется в более узком смысле). Если множество $\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}\delta$ связно, то речь идет об обычном аналитическом продолжении.

Предложение 2.5. $\mathcal{H}(\delta)=\left(\delta^{\mathrm{T}}\widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}},R_*)\right)^{\perp}$ *относительно двойственности* (2.3).

Доказательство. Утверждение прямо следует из (2.3) и (2.4). •

§3. Теорема о модели

Определения. 1. Пусть (A,J) — 2-система, причем пространства H, R гильбертовы. Предположим, что $\sigma(A)\subset\operatorname{clos}\Omega_{\text{int}}$. Оператор J будем называть *допустимым* для A, если

$$\|U_{A,J}\,x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}},R)}\leqslant C\|x\|,\ x\in H.$$

2. Оператор J будем называть *точным* относительно A, если имеет место двусторонняя оценка $\|U_{A,J}\,x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}},R)}\asymp C\|x\|$, $x\in H$.

Отметим, что если A — генератор C_0-полугруппы $\{T(t)\}$ и $\Omega_{\text{int}}=\{z\colon\ \operatorname{Re}z<0\}$, то в силу равенства Парсеваля

$$\|U_{A,J}x_0\|^2_{E^2(\Omega_{\text{ext}},R)}=\int\limits_0^\infty\|JT(t)x_0\|^2\,dt$$

для всех $x_0\in\mathcal{D}(A)$. Таким образом, $\|y\|_{L^2((0,\infty)),R)}=\|U_{A,J}x_0\|$, где y — выход системы $\dot{x}(t)=Ax(t)$, $y(t)=Jx(t)$ $(t\geqslant0)$, $x(0)=x_0$.

Аналогично, равенство

$$\|U_{A,J}x\|^2_{E^2(\Omega_{\text{ext}},R)}=\sum_{n=0}^{\infty}\|JA^nx\|^2$$

в случае $\Omega_{\mathrm{int}} = \mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ связывает введенные понятия с теорией дискретных систем. Допустимость и точность для случая единичного круга или полуплоскости введены и исследованы в работах [70, 71, 42, 43, 67, 51] и др. с точки зрения теории систем, в частности в связи с так называемой гипотезой Вейса.

Очевидно, из точности J следует как допустимость, так и наблюдаемость.

Теорема 3.1. *Пусть* Ω_{int}, Ω_{ext}, Γ *удовлетворяют условиям* §2.

1) *Пусть* (A, J) — *2-система,* $\sigma(A) \subset \operatorname{clos}\Omega_{\mathrm{int}}$. *Если оператор* J *точен относительно* A, *то найдутся гильбертово пространство* R_* *и* $*$*-допустимая функция* $\delta \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ *такие, что*

$$U_{A,J}\colon H \to \mathcal{H}(\delta)$$

— *линейный изоморфизм, причем* $U_{A,J}\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}\big(M_z^{\mathbf{T}} [\mathcal{H}(\delta)\big)$,

$$U_{A,J}\, A U_{A,J}^{-1} f = M_z^{\mathbf{T}} f, \quad f \in \mathcal{D}\big(M_z^{\mathbf{T}} [\mathcal{H}(\delta)\big).$$

2) *Обратно, пусть* $A\colon \mathcal{D}(A) \to H$, *где* $\mathcal{D}(A) \subset H$ — *линейный, возможно, неограниченный оператор в* H, $\delta \in H^\infty\big(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R)\big)$ — $*$*-допустимая функция и* $W\colon H \to \mathcal{H}(\delta)$ — *линейный изоморфизм, сплетающий* A *с* $M_z^{\mathbf{T}}$ *на* $\mathcal{H}(\delta)$. *Тогда найдется оператор* $J\colon \mathcal{D}(A) \to R$, *точный относительно* A *и такой, что* $W = U_{A,J}$.

Таким образом, в условиях п. 1) теоремы оператор $M_z^{\mathbf{T}}$ на $\mathcal{H}(\delta)$ служит моделью оператора A, а 2-система (A, J) подобна 2-системе $(M_z^{\mathbf{T}}, j)$ на $\mathcal{H}(\delta)$.

Доказательство теоремы 3.1. Будем использовать предложение 2.3. 1) Так как система (A, J) точна, образ $U_{A,J}\, H$ — замкнутое подпространство пространства $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$. Фиксируем $\lambda \in \Omega_{\mathrm{ext}}$. Согласно предложению 1.2, $U_{A,J}\, H$ инвариантно относительно оператора $(M_z^{\mathbf{T}} - \lambda I)^{-1} f(z) = \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$. Будем считать $\widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\mathrm{int}}, R)$ двойственным к $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$ (см. (2.3), (2.6)). Из (2.7) следует, что аннигилятор $\big(U_{A,J}\, H\big)^\perp$, являющийся подпространством $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)$, инвариантен относительно $M_{(z-\lambda)^{-1}}$, $\lambda \in \Omega_{\mathrm{ext}}$. Значит, найдутся гильбертово пространство R_* и функция $\varphi \in H^\infty\big(\overline{\Omega}_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R_*, R)\big)$, удовлетворяющие условиям теоремы А и такие, что

$$\big(U_{A,J}\, H\big)^\perp = \varphi \cdot \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*).$$

Поэтому $U_{A,J} H = \big(\varphi \cdot \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)^\perp\big) = \mathcal{H}(\delta)$, где мы ввели обозначение $\delta = \varphi^{\mathbf{T}} \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$.

Покажем, что значения функций $U_{A,J}\,x$, $x \in H$ на $\Omega_{\mathrm{int}} \setminus \sigma(A)$ совпадают с псевдоаналитическим продолжением их значений на Ω_{ext} (см. §2). Согласно предложению 1.2, $U_{A,J}$ сплетает A с оператором M_z^{T}. В частности, $\sigma(A) = \operatorname{spec}\delta$. Пусть $x \in H$ и $g = U_{A,J}x$. Ввиду (1.5), (1.6)

$$g(\lambda) = j(\lambda - M_z^{\mathrm{T}})^{-1}g = JU_{A,J}^{-1}U_{A,J}(\lambda - A)^{-1}U_{A,J}^{-1}g = J(\lambda - A)^{-1}x = (U_{A,J}x)(\lambda)$$

при $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, функция $U_{A,J}\,x$ совпадает с g и на $\Omega_{\mathrm{int}} \setminus \sigma(A)$.

2) Достаточно положить $J = jW$ и воспользоваться предложением 2.3 и утверждением 3) предложения 1.2. •

Для случая сжатия или диссипативного оператора при специальном выборе оператора J модель теоремы 3.1 становится оригинальной моделью С.-Надя–Фояша (см. §5 и 6 ниже). Различные изложения этой модели содержатся в работах [20, 14, 32, 18, 60, 19, 30] и др. Отметим также связь теоремы 3.1 с работами А. В. Штрауса (см. [22]) и с работой З. Аровой [27].

Определения. 1) Пусть оператор A подобен оператору M_z^{T} в пространстве $\mathcal{H}(\delta)$, построенному по области Ω_{int}. Тогда будем называть функцию δ *обобщенной характеристической функцией оператора A в области Ω_{int}*.

2) Пусть (A, J) — 2-система и $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$. Тогда будем называть функцию δ *обобщенной характеристической функцией системы (A, J) в области Ω_{int}*.

В условиях определения 2) будем называть пару (A, J) $C_{0\cdot}$-системой в области Ω_{int}, а оператор A — $C_{0\cdot}$-оператором. Если же δ — двусторонне допустимая функция, то будем называть (A, J) C_{00}-системой.

Наша модель позволяет определить $H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}})$-исчисление для любого $C_{0\cdot}$-оператора в Ω_{int}. Легко видеть, что это исчисление непрерывно в смысле слабой топологии в $H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}})$ и слабой операторной топологии в $\mathcal{L}(H)$. Поэтому оно не зависит от конкретного выбора модели. Отметим работы Макинтоша [57] и др., где исследуется связь между существованием H^∞-исчисления и специальными квадратичными оценками для генераторов аналитических полугрупп.

Замечания. 1) Если (A, J) — C_{00}-система, то в некоторых случаях область Ω_{int} можно менять, не меняя обобщенную характеристическую функцию δ (см. ниже примеры в §6, 8). Это свойство оказывается важным.

2) Рассмотрим условия: (a) R конечномерно и $\sigma(A) \neq \operatorname{clos}\Omega_{\mathrm{int}}$; (b) $\sigma(A) \cap \Gamma$ имеет нулевую длину; (c) δ обладает скалярным кратным, т.е. существуют функция $\delta_1 \in H^\infty\big(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R_*, R)\big)$ и скалярная функция $\psi \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}})$, $\psi \not\equiv 0$

такие, что $\delta\delta_1 \equiv \psi I$, $\delta_1\delta \equiv \psi I$. В каждом из этих случаев обобщенная характеристическая функция δ автоматически оказывается двусторонне допустимой.

3) Отметим, что в нашей конструкции можно заменить пространства $L^2(\Gamma, R)$ аналогичными взвешенными пространствами такими, что выполнены утверждения предложений 2.1 и 2.2. Теорема 3.1 для случая полуплоскости связана с работами Г.М. Губреева, посвященными квазиэкспонентам [5].

Неоднозначность выбора обобщенной характеристической функции обсуждается в §11. Задача вычисления обобщенной характеристической функции будет рассмотрена в §9. Подчеркнем, что по теореме 3.1 включение оператора в любую точную систему (A, J) дает модель оператора A. Отметим в связи с этим следующие очевидные свойства.

(1) Пусть оператор J допустим для A и $K\colon R \to L$ ограничен. Тогда KJ допустим для A.

(2) Если $J_k\colon \mathcal{D}(A) \to R_k$, $k = 1, 2$, и J_1, J_2 допустимы для A, то $J_1 \oplus J_2$ тоже допустим для A. Если J_2 допустим и J_1 точен (относительно A), то $J_1 \oplus J_2$ точен относительно A.

§4. Доказательство предложения 2.3. Двойственность модельных пространств

Пусть $\delta \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — $*$-допустимая функция. Рассмотрим фактор-оператор $M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}$ оператора M_z, действующий в фактор-пространстве $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)/\delta^{\mathrm{T}} E^2(\overline{\Omega}_{\mathrm{int}}, R_*)$

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigl\{\hat f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)/\delta^{\mathrm{T}} \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)\colon \quad \exists f \in \hat f\colon zf \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)\bigr\}, \\ &M_{z,\delta^{\mathrm{T}}} \hat f = \widehat{zf}, \quad \hat f \in \mathcal{D}(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}); \end{aligned} \tag{4.1}$$

здесь $\hat f = f + \delta^{\mathrm{T}} E^2(\overline{\Omega}_{\mathrm{int}}, R_*)$ — смежный класс функции f. Легко видеть, что $\bigl(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}} - \lambda\bigr)^{-1} \hat f = \bigl((z-\lambda)^{-1} f\bigr)\widehat{}$, например, для всех $\lambda \in \overline{\Omega}_{\mathrm{ext}}$.

Из предложения 2.5 следует, что двойственность Коши (2.3) задает двойственность между $\mathcal{H}(\delta)$ и фактор-пространством $E^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)/\delta^{\mathrm{T}} E^2(\overline{\Omega}_{\mathrm{int}}, R_*)$. Из (2.7) следует, что относительно этой двойственности

$$\bigl(M_z \restriction \mathcal{H}(\delta)\bigr)^* = M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}. \tag{4.2}$$

Мы получаем, что в случае, когда Ω_{int} имеет несколько компонент связности $\Omega_{\mathrm{int}}^1, \dots, \Omega_{\mathrm{int}}^s$, основной модельный оператор M_z^{T} на пространстве $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta, \Omega_{\mathrm{int}})$ подобен прямой сумме операторов M_z^{T} на пространствах $\mathcal{H}(\delta, \Omega_{\mathrm{int}}^j)$.

Из (4.2) следует, что любой C_0-оператор A в Ω_{int} удовлетворяет неравенству фон Неймана

$$\|r(A)\| \leqslant C \sup_{\Omega_{\text{int}}} |r|$$

для любой рациональной функции r с полюсами вне $\operatorname{clos}\Omega_{\text{int}}$. Как известно, вопрос о том, следует ли из неравенства фон Неймана для случая $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{D}$ подобие сжатию, был недавно решен отрицательно в работе Пизье [64]. В недавней работе [45] получен отрицательный ответ на один вопрос В. Пеллера об операторах с ограниченными степенями. Положительные результаты о подобии сжатию имеются в книге [20], работах Паулсена о вполне сжимающих операторах [62] и др. Отметим также работы [18, 4, 6, 8, 9, 11, 12], где получены разнообразные критерии подобия унитарным и самосопряженным операторам.

Доказательство предложения 2.3. Для проверки 2) достаточно показать, что $\operatorname{spec}\delta^{\mathrm{T}} \subset \sigma(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}})$. Непосредственно проверяется, что $\operatorname{spec}\delta^{\mathrm{T}} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}} \subset \sigma(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}) \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$. Докажем, что $\operatorname{spec}\delta^{\mathrm{T}} \cap \overline{\Gamma} \subset \sigma(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}) \cap \overline{\Gamma}$. Пусть $\lambda_0 \in \overline{\Gamma}$ и $\lambda_0 \notin \sigma(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}})$. Пусть $\mathcal{W}$ — окрестность точки λ_0 такая, что $\operatorname{clos}\mathcal{W} \cap \sigma(M_{z,\delta^{\mathrm{T}}}) = \varnothing$. Выберем произвольную функцию $y \in E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$. Тогда уравнение

$$(z-\lambda)x_\lambda = y + \delta^{\mathrm{T}} s_\lambda \tag{4.3}$$

имеет аналитическое семейство решений $\{x_\lambda\} \subset E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$, $\{s_\lambda\} \subset E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*)$, определенных при $\lambda \in \mathcal{W}$. Легко видеть, что $\|s_\lambda\| \leqslant C\|y\|$. Обозначим символом α_λ норму функционала $\varphi \to \varphi(\lambda)$, $\varphi \in E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}})$. Подставляя $z = \lambda$ в (4.3), получаем, что $s_\lambda(\lambda) = -\delta^{\mathrm{T}-1}(\lambda)y(\lambda), \lambda \in \mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$ (отметим, что функция δ^{T} обратима в $\mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$). Положим теперь в (4.3) $y = y_{r,\mu}$, где $y_{r,\mu}$ удовлетворяет соотношениям $y_{r,\mu}(\lambda) = r$, $\|r\| = \alpha_\mu\|y_{r,\mu}\|$, и пусть $\{x_{r,\mu,\lambda}\}$, $\{s_{r,\mu,\lambda}\}$ — соответствующие семейства решений (4.3). Полагая $\lambda = \mu$, получаем, что

$$\|\delta^{\mathrm{T}-1}(\lambda)r\| = \|s_{r,\lambda,\lambda}(\lambda)\| \leqslant \alpha_\lambda\|s_{r,\lambda,\lambda}\| \leqslant C\alpha_\lambda\|y_{r,\lambda}\| = C\|r\|, \quad \lambda \in \mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}},$$

что означает, что $\|\delta^{\mathrm{T}-1}(\lambda)\| \leqslant C$ при $\lambda \in \mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$. В частности, $\lambda_0 \notin \operatorname{spec}\delta^{\mathrm{T}}$. Таким образом, проверено утверждение 2). Утверждение 1) — его следствие. Утверждение 3) вытекает из того, что собственные векторы оператора $M_z^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}(\delta)$ — это в точности векторы вида $(z-\lambda)^{-1}c$, где $\lambda \in \Omega_{\text{int}}$, $\delta(\lambda)c = 0$. •

Рассмотрим случай двусторонне допустимой функции δ. Определим линейный оператор

$$V : \mathcal{H}(\delta) \to \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)/\delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R),$$

действующий по правилу

$$Vg = \delta g|\Gamma + \delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \quad g \in \mathcal{H}(\delta).$$

Предложение 4.1. *Пусть функция δ двусторонне допустима. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *отображение V есть изоморфизм;*
2) *V сплетает оператор $M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta)$ с оператором $M_{z,\delta}$.*

Доказательство. Пусть $y \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$. Уравнение $Vx = y + \delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ относительно $x \in \mathcal{H}(\delta)$ имеет единственное решение $x = P_{\text{ext}}(\delta^{-1}y|\Gamma)$, откуда прямо следует 1).

Согласно предложению 2.3, $\mathcal{H}(\delta)$ — допустимое пространство как пространство функций на $\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}\delta$. Следовательно, $(M_z^{\mathrm{T}} - \lambda)^{-1}g$ вычисляется по формуле (1.4). Отсюда сразу вытекает утверждение 2). •

Предложение 4.2. *Пусть функция δ двусторонне допустима. Тогда пространства $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$ двойственны друг другу относительно двойственности*

$$\langle f, g\rangle_\delta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \langle \delta(z) f_e(z), g_e(\bar z)\rangle\, dz, \quad f \in \mathcal{H}(\delta),\ g \in \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}}).$$

Доказательство. Ввиду (2.6) имеет место отождествление

$$\big(\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)/\delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)\big)^* = \big(\delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)\big)^\perp = \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$$

относительно двойственности Коши. Если $f \in \mathcal{H}(\delta)$ и $g \in \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, то

$$\langle f, g\rangle_\delta = \langle Vf, g\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \langle \widetilde{f}(z), g(\bar z)\rangle\, dz,$$

где $\widetilde{f}$ — любой представитель смежного класса Vf. Утверждение следует из предложения 2.5, 2). •

Если δ — двусторонне допустимая функция, то $\dim R = \dim R_*$, и во многих случаях удобно считать, что $R = R_*$.

Вообще говоря, невозможно найти двусторонне внутреннюю функцию δ_1 такую, что $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$ и $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}}) = \mathcal{H}(\delta_1^{\mathrm{T}})$. Таким образом, рассмотрение двойственных модельных пространств $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$ нельзя свести к случаю двусторонне внутренних функций.

Отметим, что отображение $f + \delta\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R) \mapsto P_K f$ — изоморфизм фактор-пространства $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)/\delta\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)$ на стандартное модельное пространство $K = \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*) \ominus \delta\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)$ (здесь P_K — ортогональная проекция на K). Этот изоморфизм превращает фактор-оператор $M_{z,\delta}$ в оператор усеченного сдвига $\varphi \mapsto P_K(z\varphi)$ в пространстве K (для неограниченной области Ω_{int} проще говорить о резольвентах этих операторов). Это дает простую связь между нашей моделью в случае двусторонне допустимой δ и оператором усеченного сдвига. В случае круга или полуплоскости оператор усеченного сдвига — частный случай модельного оператора С.-Надя–Фояша. Исследованию операторов усеченного сдвига посвящено большое количество работ. Укажем, в частности, работы [14, 18, 30, 31, 47, 48, 60] и др. Книга Н. К. Никольского [13] специально посвящена изучению спектральных свойств этих операторов и приложениям. Операторы усеченного сдвига для многосвязных областей и других подобных ситуаций также активно изучались. Укажем, в частности, [15, 29, 58], а также теорию операторных сосудов (см. [25] и книгу [55]).

§5. Связь с моделью Секефальви-Надя–Фояша

Здесь мы обсуждаем общий случай $*$-допустимой функции δ.

Определения [20, §V.2]. Пусть все компоненты области Ω_{int} односвязны. Функция δ называется

1) внутренней, если операторы $\delta(\lambda)$ изометричны при п.в. $\lambda \in \Gamma$;
2) $*$-внутренней, если операторы $\delta^*(\lambda)$ изометричны при п.в. $\lambda \in \Gamma$;
3) двусторонне внутренней, если $\delta(\lambda)$ — унитарный оператор при п.в. $\lambda \in \Gamma$.

Очевидно, любая внутренняя функция допустима, любая $*$-внутренняя функция $*$-допустима и любая двусторонне внутренняя функция двусторонне допустима. Кроме того, функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ $*$-допустима тогда и только тогда, когда она обладает факторизацией вида

$$\delta(z) = \delta^{(e)}(z)\delta^{(i)}(z), \quad z \in \Omega_{\mathrm{int}},$$

где $\delta^{(i)} \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — $*$-внутренняя и $\delta^{(e)}, \delta^{(e)-1} \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R_*))$ (это следует из результатов [20, §V.4]; данная факторизация — частный случай $*$-канонической. Она единственна с точностью до замены $\delta^{(e)} \mapsto \delta^{(e)}u^{-1}$, $\delta^{(i)} \mapsto u\delta^{(i)}$, где u — унитарная константа). Аналогичные факты имеют место для факторизаций внутренних и двусторонне внутренних функций.

Напомним также, что сжимающая функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R, R_*))$ называется *чистой*, если $\|\delta(0)r\| < \|r\|$ для всех $r \in R$, $r \neq 0$. Любая сжимающая функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R, R_*))$ единственным образом раскладывается в прямую сумму $\delta = \delta^{(0)} \oplus w$ (относительно некоторых ортогональных разложений пространств R и R_*), где $\delta^{(0)}$ — чистая сжимающая функция и w — унитарная константа; при этом функция $\delta^{(0)}$ называется *чистой частью* функции δ ; см. [20, §V.2].

Предложение 5.1. 1) *Пусть $\delta_j \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R, R_j))$ — $*$-допустимые функции, $j = 1, 2$. Тогда $\mathcal{H}(\delta_1) = \mathcal{H}(\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $\delta_2 = \psi \cdot \delta_1$, где функция ψ лежит в $H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R_1, R_2))$, причем $\|\psi^{-1}(z)\| \leqslant C$, $z \in \Omega_{\rm int}$.*

2) *Пусть, кроме того, все компоненты связности области $\Omega_{\rm int}$ односвязны. Пусть $\delta_1 = \delta_1^{(e)}\delta_1^{(i)}$, $\delta_2 = \delta_2^{(e)}\delta_2^{(i)}$ — $*$-канонические факторизации функций δ_1, δ_2. Тогда $\mathcal{H}(\delta_1) = \mathcal{H}(\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $\delta_2^{(i)}(z) \equiv u\delta_1^{(i)}(z)$, $z \in \Omega_{\rm int}$, где u — унитарная константа.*

Доказательство. Утверждение 1) легко вытекает из предложения 2.5, а утверждение 2) из утверждения 1) и единственности $*$-канонической факторизации. •

Предположим, что компоненты связности области $\Omega_{\rm int}$ односвязны и являются областями Смирнова [36, 16]. Пусть $\delta \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — произвольная $*$-допустимая функция. Покажем, как можно определить аналог оператора V.

Будем считать (не умаляя общности), что δ — $*$-внутренняя функция. Положим $\Delta = (I - \delta^*\delta)^{1/2} = I - \delta^*\delta$, тогда Δ — проекторнозначная функция на Γ класса $L^\infty(\Gamma, \mathcal{L}(R))$.

Пусть

$$\mathcal{H}_{SNF}(\delta, \Omega_{\rm int}) = \mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\rm int}) = \begin{pmatrix} \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R_*) \\ \Delta L^2(\Gamma, R) \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \delta \\ \Delta \end{pmatrix} \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)$$

— модельное пространство С.-Надя–Фояша. Символом $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}^\wedge$ будем обозначать смежный класс функции $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R_*) \oplus \Delta L^2(\Gamma, R)$. Класс Смирнова $\mathcal{N}(\Omega_{\rm int})$ определяется как множество аналитических в $\Omega_{\rm int}$ функций вида f/g, где $f, g \in H^\infty(\Omega_{\rm int})$ и g — внешняя.

Если $\psi \in \mathcal{N}(\Omega_{\text{int}})$, то зададим фактор-оператор умножения $M_\psi \lceil \mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$ и его область определения формулами, аналогичными (4.1), так что

$$M_\psi \left(\widehat{\binom{f}{g}} \right) = \left(\widehat{\binom{\psi f}{\psi g}} \right), \quad \text{где } \binom{f}{g}, \binom{\psi f}{\psi g} \in \binom{\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)}{\Delta L^2(\Gamma, R)}.$$

Это плотно определенный оператор.

Определим оператор

$$\widetilde{V} : \mathcal{H}(\delta) \to \mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$$

по правилу

$$\widetilde{V} f \stackrel{\text{def}}{=} \binom{\delta}{\Delta} f|\Gamma + \binom{\delta}{\Delta} \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \quad f \in \mathcal{H}(\delta) \subset \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R).$$

Легко проверить, что $\widetilde{V}$ — изоморфизм, причем для $\widetilde{V}^{-1}$ справедлива формула

$$\widetilde{V}^{-1} \left(\binom{g}{u} + \binom{\delta}{\Delta} \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \right) = P_{\text{ext}}(\delta^* g + u).$$

Оператор $\widetilde{V}$ сплетает оператор $M_z^{\mathbf{T}}$ на $\mathcal{H}(\delta)$ с фактор-оператором M_z на $\mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$.

Конструкция модельного пространства С.-Надя–Фояша в области Ω_{int} легко обобщается на случай многосвязной области; при этом надо считать, что $*$ -внутренняя функция δ многозначна и характер-автоморфна. Такие обобщения рассматривались в работах Болла [29], Мак-Каллоу [58], Павлова [15], Федорова [21] и др. Изоморфизм $\widetilde{V}$ легко определяется для этого случая.

Легко видеть, что фактор-оператор M_z на $\mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$ плотно определен. Поэтому в условиях теоремы 3.1 операторы A и $M_z^{\mathbf{T}} \lceil \mathcal{H}(\delta)$ плотно определены.

Напомним, что оператор T в гильбертовом пространстве H называется сжатием, если $\|T\| \leqslant 1$, и C_0.-сжатием, если, кроме того, $\lim_n \|T^n x\| = 0$ для всех $x \in H$.

Связь между моделью §2,3 и моделью С.-Надя–Фояша состоит в следующем.

Предложение 5.2. *Оператор A является C_0.-оператором в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ в смысле §3 тогда и только тогда, когда он подобен C_0.-сжатию.*

Предложение 5.3. *Предположим, что область Ω_{int} связна и односвязна.*

1) *Пусть $\varphi\colon \mathbb{D} \to \Omega_{\mathrm{int}}$ — конформное отображение. Оператор A — $C_{0\cdot}$ — оператор в области Ω_{int} тогда и только тогда, когда он подобен оператору $\varphi(T)$ для некоторого $C_{0\cdot}$-сжатия T (оператор $\varphi(T)$, вообще говоря, неограниченный, определяется в теории С.-Надя–Фояша).*

2) *Пусть A — $C_{0\cdot}$-оператор в области Ω_{int}, $\delta \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — его обобщенная характеристическая функция, и $\delta^{(i0)}$ — чистая часть ее $*$-внутренней части. Тогда сжатие T можно выбрать таким образом, что $\delta^{(i0)} \circ \varphi$ — характеристическая функция оператора T в смысле С.-Надя–Фояша.*

Доказательство предложений 5.2 и 5.3. В случае $\Omega_{\mathrm{int}} = \mathbb{D}$ фактор-оператор M_z на $\mathcal{H}_{SNF}(\mathbb{D})$ по существу совпадает с модельным оператором С.-Надя–Фояша. Так как, по предположению, функция δ $*$-внутренняя, $M_z[\mathcal{H}_{SNF}(\mathbb{D})$ — $C_{0\cdot}$-сжатие, и его характеристическая функция является чистой частью функции δ [20, гл.VI).

Пусть теперь Ω_{int} — произвольная односвязная область, пусть δ — $*$-допустимая функция в Ω_{int} и $\delta^{(i)}$ — ее $*$-внутренняя часть. Тогда оператор

$$W\binom{f}{g}^{\wedge} = \left(\binom{f\circ\varphi}{g\circ\varphi}\cdot\varphi'^{\frac{1}{2}}\right)^{\wedge}$$

— изоморфизм пространства $\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)}, \Omega_{\mathrm{int}})$ на пространство $\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)}\circ\varphi, \mathbb{D})$. Положим $T = M_z[\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)}\circ\varphi, \mathbb{D})$. Тогда T — $C_{0\cdot}$ - сжатие, и W сплетает $M_z[\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)}, \Omega_{\mathrm{int}})$ с оператором $\varphi(T)$. Отсюда вытекают утверждения предложения 5.3. •

Легко сформулировать утверждение, аналогичное предложению 5.3 для случая, когда Ω_{int} состоит из нескольких односвязных компонент.

Теперь очевидна связь теоремы 3.1 с теорией дилатаций С.-Надя–Фояша: в условиях теоремы оператор A обладает нормальной дилатацией с точностью до подобия, спектр которой содержится в Г.

Подобие модельному оператору С.-Надя–Фояша, устанавливаемое теоремой 3.1, позволяет получить подавляющее большинство известных следствий модели: описание коммутанта, инвариантных и гиперинвариантных подпространств, критерии подобия нормальному оператору. Отметим в связи с этим, что как положительные, так и отрицательные результаты о подобии C_{00}-оператора в области нормальному оператору сразу получаются из результатов Бенамара–Никольского, Васюнина, Купина и Трейля [3, 31, 47, 48].

Если оператор A обладает двусторонне допустимой обобщенной характеристической функцией в Ω_{int}, то любая его обобщенная характеристическая функция двусторонне допустима. Для односвязного случая это вытекает из предложения 5.3, а в общем случае необходимо небольшое дополнительное рассуждение.

§6. Примеры

6.1. Сжатия. Пусть T — $C_{0\cdot}$-сжатие в гильбертовом пространстве H. Дефектным оператором сжатия T называется оператор $D_T = (I - T^*T)^{1/2} \geqslant 0$. Положим $\Omega_{\rm int} = \mathbb{D} = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, $J = D_T$, $R = \mathcal{D}_T \overset{\rm def}{=} \operatorname{clos} D_T H$. Хорошо известно следующее

Предложение 6.1. *Система (T, J) точна относительно круга $\mathbb{D}$; более того, $\|U_{T,J}x\| = \|x\|$ для любого x из H.*

Доказательство содержится, к примеру, в вводной лекции к книге [13] (Теорема о модели). При данном выборе $\Omega_{\rm int}$ и J модель, получаемая из теоремы 3.1 с применением изоморфизма $\widetilde{V}$, совпадает с моделью С.-Надя–Фояша.

Из теоремы 3.1 и предложения 5.2 легко вытекает следующее

Предложение 6.2. 1) *2-система (A, J) является $C_{0\cdot}$-системой в круге $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда она подобна системе (T, D_T) для некоторого $C_{0\cdot}$-сжатия T.*

2) *Пусть (A, J) — $C_{0\cdot}$-система в круге $\mathbb{D}$, δ — ее обобщенная характеристическая функция и $\delta_{(i0)}$ — чистая часть $*$-внутренней части функции δ. Тогда 2-система (A, J) подобна 2-системе (T, D_T), где T — $C_{0\cdot}$-сжатие с характеристической функцией $\delta_{(i0)}$ (в смысле С.-Надя–Фояша).* •

6.2. Диссипативные операторы. Пусть A — максимальный диссипативный оператор. Согласно [20], ему соответствует его преобразование Кэли $T = (A - iI)(A + iI)^{-1}$, являющееся сжатием, и c_0 — полугруппа сжатий $\{T(s)\}_{s\geqslant 0}$, генератором которой является оператор iA. Будем предполагать, что $T \in C_{0\cdot}$; это условие равносильно условию $\text{s-lim}_{t\to\infty} T(t) = 0$ [20, гл. 3, предложение 9.1]. Предположим для простоты, что $A = A_r + iA_i$, где операторы A_r и A_i самосопряжены, $A_i \geqslant 0$ и $\mathcal{D}(A_r) \subset \mathcal{D}(A_i)$. Положим $J = (2\operatorname{Im} A)^{1/2} = (2A_i)^{1/2}$. Положим $R = \operatorname{clos} \operatorname{Range} J$, $\Omega_{\rm int} = \mathbb{C}_+ = \{\lambda\colon \operatorname{Im}\lambda > 0\}$.

Предложение 6.3. *Система (A, J) точна относительно полуплоскости $\mathbb{C}_+$; более того, $\|U_{A,J}x\| = \|x\|$ для всех x из H.*

Доказательство. Воспользуемся результатами §10 главы 1 книги [20, гл. 1, §10], а также тем, что преобразованием Лапласа полугруппы $\{T(t)\}$ служит резольвента $(\lambda - iA)^{-1}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Мы получаем, что

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \int_0^\infty \|JT(t)x\|^2\,dt + \lim_{t\to+\infty}\|T(t)x\|^2\\ &= \int_0^\infty \|JT(t)x\|^2\,dt = \|J(\cdot - iA)^{-1}x\|^2_{E^2(\{\operatorname{Re}\lambda>0\},R)} = \|U_{A,J}x\|^2_{E^2(\mathbb{C}_+,R)}\end{aligned}$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ (заметим, что $E^2(\mathbb{C}_+, R) = H^2(\mathbb{C}_+, R)$). Тем самым $U_{A,J}$ продолжим до изометрии из H в $H^2(\mathbb{C}_+, R)$, которая действует по той же формуле. •

По-видимому, имеются связи между нашими результатами, примененными к непрерывным линейным системам (см. комментарий в начале §3, а также §8, 9, 10.2) и результатами статьи [67].

6.3. Дифференцирование на интервале с недиссипативными краевыми условиями. Пусть $H = L^2([0,w] \to \mathbb{C}^n) \stackrel{\text{def}}{=} L^2$, ρ — $n\times n$ комплексная матрица, β — $n \times n$ матричнозначная комплексная мера на $[0,w]$ такая, что $\beta(\{0\}) = \beta(\{w\}) = 0$. Рассмотрим оператор

$$A\varphi = -\varphi', \tag{6.1}$$

$$\mathcal{D}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in W_2^1([0,w] \to \mathbb{C}^n) : L\varphi = 0\}, \tag{6.2}$$

где

$$L\varphi = \varphi(0) - \int d\beta(x)\varphi(x) - \rho\cdot\varphi(w).$$

Покажем, что теорема 3.1 позволяет построить C_{00} — модель оператора A^*. Это означает (см. §9), что существует и C_{00} — модель оператора A; в §10 она будет вычислена явно.

Отметим, что в скалярном случае $n = 1$ исследование оператора вида $B\psi = \alpha\psi' + \gamma\psi$ в $L^2([0,l])$, где α, γ непрерывны, $\alpha < 0$, с граничным условием, как в (6.2), сводится к исследованию оператора A с помощью изоморфизма $L^2([0,l])$ на $L^2([0,w])$, заданного правилом $\psi \mapsto f\cdot(\psi\circ\tau)$, где f и τ — подходящие функции.

Положим $B(x) = \beta([0,x])$, тогда функция B непрерывна в точках 0 и w и $B(0) = 0$. Оператор A^* задан равенствами

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(A^*) = \bigl\{\psi \in L^2 \colon \exists c \in \mathbb{C}^n \colon\\ &\qquad\qquad \psi(x) + B^{\mathrm{T}}(x)c \in W_2^1([0,w],\mathbb{C}^n),\ c = \psi(0), \psi(w) = \rho^{\mathrm{T}} \cdot \psi(0)\bigr\},\\ &\bigl(A^*\psi\bigr)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigl(\psi(x) + B^{\mathrm{T}}(x)\psi(0)\bigr)'.\end{aligned}$$

Положим $\Delta(\lambda)c = Le^{-\lambda x}c$, $c \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\Delta(\lambda) = I - \int\limits_{[0,w]} e^{-\lambda x}\, d\beta(x) - e^{-\lambda w}\rho. \tag{6.3}$$

Введем оператор

$$(Fr)(\lambda) = \int\limits_{[0,w]} d\beta(x) \int\limits_0^x e^{\lambda(t-x)} r(t)dt + \rho \int\limits_0^w e^{\lambda(t-w)} r(t)\, dt, \quad r \in L^2.$$

Тогда $\sigma(A) = \bigl\{\lambda\colon \det\Delta(\lambda) = 0\bigr\}$,

$$\bigl((\lambda - A)^{-1}r\bigr)(x) = e^{-\lambda x}\Delta(\lambda)^{-1}(Fr)(\lambda) + \int\limits_0^x e^{\lambda(t-x)} r(t)dt, \quad \lambda \notin \sigma(A). \tag{6.4}$$

Из этой формулы получаем, что

$$\begin{aligned}&\bigl((\lambda - A^*)^{-1}\psi\bigr)(t)\\ &\quad= \int\limits_t^w e^{\lambda(t-x)}\psi(x)\, dx\\ &\qquad+ \Biggl(\int\limits_t^w e^{\lambda(t-y)}\, d\beta^*(y)\, dy + e^{\lambda(t-w)}\rho^*\Biggr)\Delta^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1} \int\limits_0^w e^{-\lambda x}\psi(x)\, dx.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Положим

$$J_*\psi = \psi(0), \quad \psi \in \mathcal{D}(A^*). \tag{6.6}$$

Введем функцию

$$\delta(\lambda) = e^{\lambda w}\Delta(\lambda) = e^{\lambda w}I - \int e^{\lambda(w-x)}\,d\beta(x) - \rho, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.7}$$

Ввиду (6.3), (6.5) оператор U_{A^*,J_*} имеет простой вид:

$$U_{A^*,J_*}\psi(\lambda) = \delta^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1}\int_0^w e^{\lambda(w-s)}\psi(s)\,ds. \tag{6.8}$$

Выберем произвольное число a такое, что $\det\Delta(z) \neq 0$ и $\|\Delta(z)^{-1}\| \leqslant C$ при $\operatorname{Re} z \geqslant a$. Положим

$$\Omega_{\mathrm{int}} = \overline{\Omega}_{\mathrm{int}} = \{\operatorname{Re} z < a\}, \quad \Omega_{\mathrm{ext}} = \overline{\Omega}_{\mathrm{ext}} = \{\operatorname{Re} z > a\}.$$

Легко видеть, что матрицы-функции δ и δ^{T} — (двусторонне) допустимые для области Ω_{int}. Отсюда получается следующее

Предложение 6.4. *(A^*, J^*) — C_{00} — система в области Ω_{int}.*

Доказательство. Из равенства Парсеваля вытекает, что $\|\widetilde{\psi}\|_{E^2(\Omega_{\mathrm{ext}},\mathbb{C}^n)} \asymp \|\psi\|_{L^2}$, где $\widetilde{\psi}(\lambda) = \int_0^w e^{-\lambda s}\psi(s)\,ds$. Так как $U_{A^*,J_*}\psi(\lambda) = \Delta^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1}\widetilde{\psi}(\lambda)$ и функции Δ^{T}, $\Delta^{\mathrm{T}-1}$ принадлежат $H^\infty(\Omega_{\mathrm{ext}}, \mathbb{C}^{n\times n})$, то

$$\|U_{A^*,J_*}\psi\|_{E^2(\Omega_{\mathrm{ext}},\mathbb{C}^n)} \asymp \|\psi\|_{L^2}. \quad \bullet$$

Так как A^* имеет дискретный спектр, то из теоремы 3.1 вытекает, что U_{A^*,J_*} — изоморфизм L^2 на пространство $\mathcal{H}(\delta_1)$ для некоторой функции δ_1 из $H^\infty(\Omega_{\mathrm{int}}, \mathbb{C}^{n\times n})$. В §10 будет показано, что можно взять $\delta_1 = \delta^{\mathrm{T}}$.

6.4. Генераторы систем с запаздыванием. Пусть $h > 0$, $H = \mathbb{C}^n \oplus L^2([-h,0] \to \mathbb{C}^n)$, и операторы $M\colon C([-h,0],\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$, $L\colon W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ допускают представление

$$M\varphi = \int_0^h d\mu(\theta)\varphi(-\theta); \quad L\varphi = \int_0^h \zeta(\theta)\varphi(-\theta)\,d\theta + \int_0^h \eta(\theta)\dot{\varphi}(-\theta)\,d\theta.$$

Рассмотрим неограниченный оператор A на H, заданный равенствами

$$\mathcal{D}(A) = \{(c,\varphi) \in H : \varphi \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n),\ c = M\varphi\}, \quad A(c,\varphi) = (L\varphi, \dot{\varphi}).$$

Мы предполагаем, что $\zeta, \eta \in L^2([0,h] \to \mathbb{C}^{n\times n})$ и $d\mu$ — $n \times n$-матричнозначная мера, причем $\mu(\{0\}) = I$. В этом случае A — генератор c_0-полугруппы, связанной с нейтральной линейной системой с запаздыванием

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\mu * x)(t) = (\zeta * x)(t) + (\eta * \dot{x})(t), \\ &(\mu * x)(0) = c, \quad x(\theta) = \varphi(\theta),\ -h \leqslant \theta \leqslant 0. \end{aligned}$$

В [56] построены функциональная модель оператора A и соответствующей полугруппы операторов. Покажем, что результат [56] легко выводится из конструкции настоящей статьи.

Как известно, функция

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= zMe^{z\cdot} - Le^{z\cdot} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} z\left(\int_0^h e^{-z\theta}\,d\mu(\theta) - \int_0^h e^{-z\theta}\eta(\theta)\,d\theta\right) - \int_0^h e^{-z\theta}\zeta(\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

играет основную роль в спектральном анализе оператора A. В частности, $\sigma(A) = \{z\colon \det\Delta(z) = 0\}$. Существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $\|\Delta(z)^{-1}\| \leqslant C(1+|z|)^{-1}$ при $\operatorname{Re} z > a$. Фиксируем это a и произвольное число b, $\operatorname{Re} b > a$. Положим $\Omega_{\text{int}} = \{\operatorname{Re} z < a\}$, $\Omega_{\text{ext}} = \{\operatorname{Re} z > a\}$. Функция

$$\delta(z) = (z-b)^{-1}e^{hz}\Delta(z)$$

— допустимая в Ω_{int}. Рассмотрим оператор

$$J_0\colon H \to \mathbb{C}^n, \quad J_0(d,\psi) = d$$

и положим

$$\widehat{V}_1 y(z) = J_0(z - A^*)^{-1}y, \quad y \in H.$$

Легко видеть, что

$$\widehat{V}_1(d,\psi)(z) = \Delta^{\mathrm{T}}(z)^{-1}\left[m^*(\bar{z})d + \int_{-h}^{0} e^{zs}\psi(s)\,ds\right], \tag{6.9}$$

где

$$m(z) = \int_{0}^{h} e^{-z\theta}\,d\mu(\theta)$$

[56]. Так как $\Delta^{\mathrm{T}}(z)^{-1} \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \partial\Omega_{\mathrm{int}}$, то соотношение $\|\widehat{V}_1 y\|_{E^2(\Omega_{\mathrm{ext}},\mathbb{C}^n)} \asymp \|y\|_H$ невозможно. Положим

$$J_* = J_0(A^* - \bar{b}), \quad J_*: \mathcal{D}(A^*) \to \mathbb{C}^n,$$

тогда

$$U_{A^*,J_*}y(z) = (z-\bar{b})\widehat{V}_1 y(z) - J_0 y. \tag{6.10}$$

Предложение 6.5. *Система* (A^*, J_*) *точна.*

Доказательство. Пусть $y = (d,\psi) \in H$. Предположим, что $U_{A^*,J_*}y(z) \equiv 0$ для всех $z \in \rho(A^*)$. Тогда, полагая $z = \bar{b}$ в (6.10), получаем, что $d = J_0 y = 0$. Ввиду (6.9), (6.10) преобразование Лапласа функции ψ тождественно равно нулю, следовательно $\psi \equiv 0$, $y = 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} U_{A^*,J_*} = 0$.

Из (6.9) и (6.10) вытекает, что

$$U_{A^*,J_*}(d,\psi)(z) = \delta^{\mathrm{T}}(z)^{-1}\left[\left(e^{hz}m^{\mathrm{T}}(z) - \delta^{\mathrm{T}}(z)\right)d + \int_{-h}^{0} e^{z(h+s)}\psi(s)\,ds\right]$$

(ср. с формулой (1.15) из [56]). Отсюда видно, что $U_{A^*,J_*}: H \to E^2(\Omega_{\mathrm{ext}},\mathbb{C}^n)$ — ограниченный оператор. Очевидно, $\|U_{A^*,J_*}(0,\psi)\|_{E^2(\Omega_{\mathrm{ext}},\mathbb{C}^n)} \asymp \|\psi\|$. Так как векторы вида $(0,\psi)$ образуют подпространство конечной коразмерности в H, то система (A^*, J_*) точна. •

В §10 будет показано, что δ^{T} — обобщенная характеристическая функция системы (A^*, J_*).

§7. Связь с системами управления и точной управляемостью

Связь функциональных моделей с теорией управления хорошо известна, см. [28, 30, 39, 61]. В этом разделе мы кратко поясним связь между C_0-операторами и точной управляемостью. Для более подробного ознакомления с точной управляемостью мы отсылаем к работам [59, 78], книгам [28, 34, 46, 54, 61] и др. В книгах [54, 46, 78], в частности, изложен метод доказательства точной управляемости конкретных систем, заданных уравнениями в частных производных (так называемый HUM — метод Лионса). В [59, 61] функциональная модель С.-Надя–Фояша систематически применяется для исследования возможного „размера" операторов управления при наличии свойств точной управляемости, нуль-управляемости и др. Отметим, что кажущееся противоречие некоторых результатов [34, 59, 61] с теоремой 7.1 связано с тем, что в этих книгах рассматриваются только ограниченные операторы управления и наблюдения (см. к примеру, [61, том 2, теор. 3.8.2]).

Пусть (A, J) — 2-система, причем оператор A плотно определен. Фиксируем точку $\lambda_0 \in \rho(A)$. Положим $A_0 = A - \lambda_0 I$. Введем формально векторы $A_0^n h$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $h \in H$ и векторные пространства $A_0^n H = \{A_0^n h \colon h \in H\}$. Мы считаем $A_0^n h_1 \neq A_0^n h_2$ при $h_1 \neq h_2$; тогда $A_0^n H$ — гильбертово пространство с нормой образа, изоморфное H. При $n < m$ считаем, что $A_0^n h_1 = A_0^m h_2$, если $A_0^{n-m} h_1 = h_2$. При этом соглашении мы получаем шкалу пространств

$$\cdots \subset A_0^{-2} H \subset A_0^{-1} H \subset H \subset A_0 H \subset A_0^2 H \subset \cdots;$$

очевидно, $A_0^{-k} H = \mathcal{D}(A_0^k)$, $k > 0$. Операторы A_0, A и A_0^{-1} корректно определены на линейном множестве $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_0^n H$, при этом A_0 и A_0^{-1} взаимно обратны. Аналогично определяется шкала пространств $A_0^{*n} H$, $n \in \mathbb{Z}$.

Будем использовать следующую реализацию двойственного пространства: $(A_0^n H)^* = A_0^{*\,-n} H$, полагая $\langle A_0^n h_1, A_0^{*\,-n} h_2 \rangle_n \overset{\mathrm{def}}{=} \langle h_1, h_2 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти определения согласованы между собой: $\langle h_1, h_2 \rangle_n = \langle h_1, h_2 \rangle_m$, если обе скобки определены. Мы будем писать $\langle h_1, h_2 \rangle$ вместо $\langle h_1, h_2 \rangle_n$.

Предположим, что $\sigma(A) \subset \{\operatorname{Re} z \leqslant \gamma\}$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ и что

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leqslant C(\operatorname{Re} z - \gamma)^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > \gamma$$

(мы не предполагаем априори, что A — генератор полугруппы). Положим

$$\Gamma = \{\operatorname{Re} z = \gamma\}, \quad \Omega_{\mathrm{int}} = \{\operatorname{Re} z < \gamma\}, \quad \Omega_{\mathrm{ext}} = \{\operatorname{Re} z > \gamma\}. \tag{7.1}$$

Сопоставим системе (A, J) (сопряженную) линейную систему

$$\dot{x}(t) = A^* x(t) + J^* u(t), \quad t \leqslant 0. \tag{7.2}$$

Здесь $x(t)$ — вектор состояния, u — управление, $u(t) \in R$, $J^* \colon R \to \mathcal{D}(A)^* = A_0^* H$. Равенство в (7.2) понимается в смысле равенства в гильбертовом пространстве $A_0^* H$. Мы ищем решения $x(t)$, в определенном смысле стремящиеся к нулю на $-\infty$.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R) = \{\varphi\colon \varphi(t) = e^{\gamma t}\psi(t),\ \psi \in L^2(\mathbb{R}_-, R)\}.$$

Отметим, что преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{L}u(p) = \int e^{-pt} u(t)\, dt$ — унитарный изоморфизм $L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R)$ на $L^2(\Gamma, R, \frac{|dz|}{2\pi})$. Определим отображение

$$W \colon u \in L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R) \mapsto Wu \stackrel{\mathrm{def}}{=} x(0)$$

следующим образом. Пусть сначала $u \in C^3(\mathbb{R}_-, R)$ и u имеет компактный носитель, содержащийся в $\mathbb{R}_-$: $u \equiv 0$ на $(-\infty, -S)$ и на $(-\epsilon, 0)$, $\epsilon, S > 0$. Используя преобразование Лапласа на $[-S, +\infty)$, получаем, что (7.2) имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{pt}(p - A^*)^{-1} J^* \tilde{u}(p)\, dp, \quad t \leqslant 0, \tag{7.3}$$

здесь $\tilde{u}(p) = \mathcal{L}u$ и $\alpha > \gamma$ произвольно. Легко видеть, что $\bigl(p - (\gamma + 1)\bigr)^3 \tilde{u} \in H^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R)$, $e^{-Sp}\bigl(p - (\gamma - 1)\bigr)^3 \tilde{u} \in H^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$, откуда вытекает, что $e^{-Sp}\bigl(p - (\gamma - 1)\bigr)^3 (p - A^*)^{-1} J^* \tilde{u}$ лежит в $H^2(\{\operatorname{Re} z > \alpha\}, R)$ для любого $\alpha > \gamma$. Поэтому $x(t) \equiv 0$ при $t < -S$. Очевидно, $x \in C^1(\mathbb{R}_-, R)$. Используя преобразование Лапласа на $(-\infty, 0)$, легко показать, что (7.3) — единственное решение (7.2) на $\mathbb{R}_-$ с компактным носителем. Для функций $u \in C^3(\mathbb{R}_-, R)$ указанного вида мы полагаем $Wu \stackrel{\mathrm{def}}{=} x(0)$, где x — решение (7.2), определенное формулой (7.3).

Определение. Будем называть систему (7.2) *точно γ-управляемой*, если оператор W непрерывно распространяется на все пространство $u \in L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R)$, и образ этого распространенного оператора совпадает со всем H.

Другими словами, система (7.2) точно γ-управляема, если с помощью управления $u \in L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R)$ можно достичь любого состояния $x(0)$.

Теорема 7.1. *Система* (7.2) *точно γ-управляема тогда и только тогда, когда система* (A, J) *точна относительно выбора областей* (7.1).

Доказательство. Заметим, что $\Omega_{\rm int} = \overline{\Omega}_{\rm int}$, $\Omega_{\rm ext} = \overline{\Omega}_{\rm ext}$. Выберем числа γ_0, γ_1 так, что $\gamma < \gamma_0 < \gamma_1$. Определим оператор $\widetilde{W}\colon \frac{1}{z-\gamma_1}E^2(\{\operatorname{Re} z < \gamma_0\}, R) \to H$ по формуле

$$\widetilde{W}v = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} (p - A^*)^{-1} J^* v(p)\,dp, \quad v \in \frac{1}{z-\gamma_1}E^2(\{\operatorname{Re} z < \gamma_0\}, R). \tag{7.4}$$

Согласно (7.3), $\widetilde{W}\mathcal{L}u = Wu$ для функций u из $C^3(\mathbb{R}_-, R)$ с компактным носителем. Так как $\mathcal{L}$ — унитарный изоморфизм $L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R)$ на $\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)$, то система (7.2) точно γ-управляема тогда и только тогда, когда $\widetilde{W}$ распространяется по непрерывности на $\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)$, и образ этого распространенного оператора совпадает с H. Легко видеть из (7.4) и (2.3), что $\langle U_{A,J}\, x, v\rangle = \langle x, \widetilde{W}v\rangle$ при $v \in \frac{1}{z-\gamma_1}E^2(\{\operatorname{Re} z < \gamma_0, R\}) \subset \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)$ и $x \in H$. Поэтому если один из операторов $\widetilde{W}\colon \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R) \to H$ и $U_{A,J}\colon H \to \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)$ ограничен, то ограничен и второй, и они сопряжены один другому. В этом случае, по теореме Банаха, соотношение $\widetilde{W}\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R) = H$ для распространенного оператора $\widetilde{W}$ равносильно условию $\exists \epsilon > 0\colon \|U_{A,J}x\| \geqslant \epsilon\|x\|$, $x \in H$. •

Из теоремы 3.1 следует, что в условиях теоремы 7.1 A — генератор c_0-полугруппы.

Система (7.2) называется точно управляемой на $[-\tau, 0]$, если можно достичь любого состояния $x(0)$, применяя управления $u \in L^2([-\tau, 0], R)$ (при этом полагаем $u \equiv 0$ на $(-\infty, -\tau)$; как и раньше, понимаем решения системы (7.2) в смысле распространения W по непрерывности). Очевидно, из точной управляемости на $[-\tau, 0]$ следует точная γ-управляемость для любого γ такого, что оператор $W\colon L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R) \to H$ непрерывен.

§8. Моделирование генераторов групп

Пусть $T = \{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — c_0-группа линейных операторов. Тогда существуют пределы

$$\alpha_0(T) = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ln\|T(t)\|}{t}, \quad \beta_0(T) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|T(t)\|}{t},$$

при этом $\alpha_0(T) \leqslant \beta_0(T)$.

Следующая теорема показывает, что для моделирования генератора группы можно положить $J = I$.

Теорема 8.1. 1) *Пусть A — генератор c_0-группы $T = \{T(t)\}$, $\beta > \beta_0(T)$. Тогда*

$$\|U_{A,I}\, x\|_{E^2(\{\mathrm{Re}\, z>\beta\},H)} \asymp \|x\|, \quad x \in H. \tag{8.1}$$

Аналогично если $\alpha < \alpha_0(T)$, то $\|U_{A,I}\, x\|_{E^2(\{\mathrm{Re}\, z<\alpha\},H)} \asymp \|x\|$.

В частности, A — C_{00}-оператор в любой полосе вида $\alpha < \mathrm{Re}\, z < \beta$, где $\alpha < \alpha_0(T) \leqslant \beta_0(T) < \beta$.

2) *Обратно, пусть A — замкнутый оператор, $\sigma(A) \subset \{\alpha \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \beta\}$. Если*

$$\|U_{A,I}\, x\|_{E^2(\{\mathrm{Re}\, z<\alpha,H\})} + \|U_{A,I}\, x\|_{E^2(\{\mathrm{Re}\, z>\beta,H\})} \asymp \|x\|, \quad x \in H,$$

то A — генератор c_0-группы.

Доказательство. 1) Как известно,

$$-(A - zI)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-zt} T(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\, z > \beta.$$

Следовательно, согласно теореме Пэли–Винера,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} \|(A - zI)^{-1} x\|^2\, |dz| = \int\limits_0^\infty e^{-2\beta' t} \|T(t)x\|^2\, dt \tag{8.2}$$

при $\beta' > \beta$. Пусть $\|T(t)x\| \geqslant \epsilon \|x\|$ при $t \in [0,1]$. Из (8.2) следует, что

$$\|U_{A,I} x\|^2_{E^2(\{\mathrm{Re}\, z>\beta,H\})} = \int\limits_0^\infty e^{-2\beta t} \|T(t)x\|^2\, dt \leqslant \left(\int\limits_0^\infty e^{-2\beta t} \|T(t)\|^2\, dt \right) \|x\|^2$$

при $x \in H$, причем последний интеграл сходится, так как $\beta > \beta_0(T)$. С другой стороны,

$$\|U_{A,I} x\|^2_{E^2(\{\mathrm{Re}\, z>\beta,H\})} \geqslant \int\limits_0^1 e^{-2\beta t} \|T(t)x\|^2\, dt \geqslant \left(\epsilon \int\limits_0^1 e^{-2\beta t}\, dt \right) \|x\|^2.$$

Второе утверждение из 1) доказывается аналогично.

2) Положим $\Omega_{\rm int} = \{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$, $\Omega_{\rm ext} = \{\alpha < \operatorname{Re} z\} \cup \{\operatorname{Re} z < \beta\}$. Согласно теореме 3.1, оператор A подобен оператору $M_z^{\rm T}$ на пространстве $\mathcal{H}(\delta, \Omega_{\rm int})$ для некоторой $*$-внутренней функции δ в $\Omega_{\rm int}$. Из представления С.-Надя–Фояша модельного оператора (см. §5) видно, что A — генератор c_0-группы линейных операторов $\{M_{e^{zt}}[\mathcal{H}_{SNF}(\delta, \Omega_{\rm int})\}_{t \in \mathbb{R}}$. •

Из теоремы 8.1, в частности, вытекает существование H^∞-исчисления для генераторов групп в полосах вида $\{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$, где $\alpha < \alpha_0(T) \leqslant \beta_0(T) < \beta$. Техника Макинтоша построения H^∞-исчисления с помощью квадратичных оценок [57] вместе с техникой вполне ограниченных сжатий [62] систематически применяется в работах Ле Мерди [49–53] в связи с моделированием полугрупп линейных операторов, коммутирующих семейств полугрупп и операторов со спектром в единичном круге. Пример работы [52] показывает, что существует компактная c_0-полугруппа такая, что ее генератор не является C_{00}-оператором ни в одной полуплоскости $\Omega_{\rm int} = \{\operatorname{Re} z < a\}$.

Отметим, что теорема 1.1 работы [53] весьма близка теореме 8.1, но доказывается в этой работе совершенно другими (менее явными) методами.

Интересно было бы разработать функциональную модель генераторов групп в полосе $\alpha_0(T) < \operatorname{Re} z < \beta_0(T)$.

Из теоремы Датко [35] вытекает, что если $\|U_{A,I}x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z > \beta, H\})} \geqslant C\|x\|$, $x \in H$, то выполнено строгое неравенство $\beta > \beta_0(T)$.

§9. Воспроизводящие ядра. Вычисление обобщенной характеристической функции с помощью двойственности

Пусть даны $\Omega_{\rm int}$, $\Omega_{\rm ext}$, Γ, R, R_*, имеющие тот же смысл, что и в §2. Введем пространство

$$\begin{aligned}\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R_*, R)) &\stackrel{\rm def}{=} \mathcal{L}(R_*, \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)) \\ &= \{f \in \operatorname{Hol}(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R_*, R)) : f(\cdot) r \in \widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R), \text{ при } r \in R_*\}.\end{aligned}$$

Это банахово пространство с нормой $\|f\| = \sup_{r \in R_*, \|r\|=1} \|f(\cdot)r\|_{\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, R)}$. Аналогично вводятся $\widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, \mathcal{L}(R_*, R))$ и $L^2(\Gamma, \mathcal{L}(R_*, R))$. Если f — функция из $\widehat{E}^2(\Omega_{\rm int}, \mathcal{L}(R_*, R))$ (или $\widehat{E}^2(\Omega_{\rm ext}, \mathcal{L}(R_*, R))$), то отображение $r \mapsto fr|\Gamma$ непрерывно из R_* в $L^2(\Gamma, R)$, что означает, что оно является элементом пространства $L^2(\Gamma, \mathcal{L}(R_*, R)) \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{L}(R_*, L^2(\Gamma, R))$. Будем называть это отображение граничными значениями функции f.

Введенные классы — прямые обобщения классов сильных H^2-функций в терминологии книги [13]. Отметим, что граничные значения сильных H^2-функций нельзя понимать в смысле некасательной сильной сходимости операторов.

Определение проекторов P_{int}, P_{ext} легко переносится на $\mathcal{L}(R)$-значные функции; в этом смысле эти проекторы также ограничены.

Определение. Пусть δ — двусторонне допустимая функция, принадлежащая классу $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$. Будем говорить, что $\mathcal{L}(R_*, R)$-значная функция $\Phi(z)$, голоморфная в Ω_{ext} *соответствует функции* $\delta(z)$, если для некоторых (а тогда и любых) $\lambda_{\text{int}} \in \Omega_{\text{int}}$, $\lambda_{\text{ext}} \in \Omega_{\text{ext}}$ и некоторой функции $\tau \in (z - \lambda_{\text{ext}})\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi|\Omega_{\text{ext}} \in (z - \lambda_{\text{int}})\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathcal{L}(R_*, R)); \\ &\Phi_e = (\delta^{-1} + \tau)_i \quad \text{п.в. на } \Gamma \end{aligned} \tag{9.1}$$

(последнее означает, что $(\Phi r)_e = \delta^{-1} r + (\tau r)_i$ п.в. на Γ для всех $r \in R_*$).

Предложение 9.1. *Условия* (9.1) *определяют* Φ *однозначно с точностью до замены* $\Phi \mapsto \Phi + \Phi_0$, $\Phi_0 = \text{const} \in \mathcal{L}(R_*, R)$. *Одну из функций* Φ *можно вычислить по правилу*

$$\Phi(z) = (z - \lambda_{\text{ext}})\left(P_{\text{ext}} \frac{\delta^{-1}}{z - \lambda_{\text{ext}}}\right)(z), \tag{9.2}$$

при этом

$$\tau(z) = -(z - \lambda_{\text{ext}})\left(P_{\text{int}} \frac{\delta^{-1}}{z - \lambda_{\text{ext}}}\right)(z), \quad z \in \Omega_{\text{int}}. \tag{9.3}$$

Здесь λ_{ext} *— произвольная фиксированная точка из* Ω_{ext}.

Доказательство. Пусть Φ_1, Φ_2 удовлетворяют (9.1), $\Phi_0(z) = \Phi_1(z) - \Phi_2(z)$, $\Phi_{00}(z) = (z - \lambda_{\text{ext}})^{-1}(\Phi_0(z) - \Phi_0(\lambda_{\text{ext}}))$. Тогда $(\Phi_{00})_i = (\Phi_{00})_e$ п.в. на Γ, $\Phi_{00}|\Omega_{\text{int}} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$, $\Phi_{00}|\Omega_{\text{ext}} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathcal{L}(R_*, R))$. Следовательно, $\Phi_{00} \equiv 0$, $\Phi_0 = \text{const}$. Возможность вычисления Φ и τ по формулам (9.2), (9.3) очевидна. •

Если Φ соответствует δ, условимся продолжать функцию Φ на $\Omega_{\text{int}} \setminus \operatorname{spec} \delta$ по формуле

$$\Phi(\lambda) = \delta^{-1}(\lambda) + \tau(\lambda), \quad \lambda \in \Omega_{\text{int}} \setminus \operatorname{spec} \delta; \tag{9.4}$$

очевидно, при этом $\Phi_e = \Phi_i$ п.в. на $\Gamma \setminus \operatorname{spec} \delta$. При этом определении Φ становится голоморфной функцией на $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spec} \delta$. Вскоре мы убедимся в естественности такого продолжения.

Сопоставим также функции δ семейство функций

$$\tilde{g}_{\mu,m}(z) = -\frac{\Phi(z)-\Phi(\mu)}{z-\mu}m, \quad \tilde{h}_{\nu,l}(z) = -\frac{\Phi^{\mathrm{T}}(z)-\Phi^{\mathrm{T}}(\nu)}{z-\nu}l; \tag{9.5}$$

здесь $\mu \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{spec}\delta$, $\nu \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{spec}\delta^{\mathrm{T}}$, $m \in R_*$, $l \in R$. Эти функции однозначно определяются по δ.

Предложение 9.2. *Функции $\tilde{g}_{\mu,m}$ лежат в $\mathcal{H}(\delta)$. Функции $\tilde{h}_{\nu,l}$ лежат в $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Имеют место формулы воспроизведения*

$$\langle \varphi, \tilde{h}_{\bar{\nu},l}\rangle_\delta = \langle \varphi(\nu), l\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{H}(\delta), \tag{9.6}$$

$$\langle \psi, \tilde{g}_{\bar{\mu},m}(z)\rangle_{\delta^T} = \langle \psi(\nu), m\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}}). \tag{9.7}$$

Доказательство. Из (9.1) легко вытекает, что $\tilde{g}_{\mu,m} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$, $\delta\tilde{g}_{\mu,m} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)$, откуда заключаем, что $\tilde{g}_{\mu,m}|\Gamma \in \mathcal{H}(\delta)$. Аналогично $\tilde{h}_{\nu,l} \in \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}(\delta)$, $\nu \in \mathbb{C}\setminus(\operatorname{spec}\delta \cup \Gamma)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi, \tilde{h}_{\bar{\nu},l}\rangle_\delta \\
&\quad = \int_\Gamma \left\langle \delta(z)\varphi_e(z), \frac{\Phi^*(\nu)l}{\bar{z}-\bar{\nu}}\right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\
&\quad - \int_\Gamma \left\langle \delta(z)\varphi_e(z), \frac{\Phi^*(z)l}{\bar{z}-\bar{\nu}}\right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\
&\quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Используя теорему Коши для Ω_{int}, Ω_{ext}, условия $\delta\cdot\varphi_e|\Gamma \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{int}}, R_*)$, $\varphi_e \in \widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$, и формулы (9.4), (2.10), получаем, что

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Gamma \left\langle \frac{\Phi(\nu)\delta(z)\varphi_e(z)}{z-\nu}, l\right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\
&= \begin{cases} \langle (\delta^{-1}(\nu)+\tau(\nu))\delta(\nu)\varphi(\nu), l\rangle, & \nu \in \Omega_{\mathrm{int}}\setminus\operatorname{spec}\delta, \\ 0, & \nu \in \Omega_{\mathrm{ext}}; \end{cases} \\
I_2 &= \int_\Gamma \left\langle \frac{1+\tau\delta}{z-\nu}\varphi_e, l\right\rangle \frac{dz}{2\pi i} = \int_\Gamma \left\langle \frac{\varphi_e}{z-\nu}, l\right\rangle \frac{dz}{2\pi i} + \int_\Gamma \left\langle \frac{\tau\delta\varphi_i}{z-\nu}, l\right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\
&= \begin{cases} \langle \tau(\nu)\delta(\nu)\varphi(\nu), l\rangle, & \nu \in \Omega_{\mathrm{int}}\setminus\operatorname{spec}\delta, \\ -\langle \varphi(\nu), l\rangle, & \nu \in \Omega_{\mathrm{ext}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Следовательно, формула (9.6) верна при $\nu \notin \Gamma$. При $\nu \in \Gamma \setminus \operatorname{spec}\delta$ (9.6) получается по непрерывности. Формула (9.7) доказывается так же. •

Будем называть функции $\tilde{h}_{\bar{\nu},l}$ *воспроизводящими ядрами пространства* $\mathcal{H}(\delta)$, а функции $\tilde{g}_{\bar{\mu},m}$ *воспроизводящими ядрами пространства* $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Из формул воспроизведения следует, что функции $\tilde{h}_{\bar{\nu},l}$ полны в $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, а функции $\tilde{g}_{\bar{\mu},m}$ полны в $\mathcal{H}(\delta)$.

Очевидно, что, к примеру, функции $\tilde{h}_{\bar{\nu},l}$ зависят не только от пространства $\mathcal{H}(\delta)$, но и от конкретного выбора функции δ. Пусть $j\colon \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta)) \to R$ — оператор, определенный формулой (1.2), и $j_*\colon \mathcal{D}(M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})) \to R_*$ — аналогичный оператор, отвечающий пространству $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Легко видеть, что

$$\tilde{h}_{\nu,l} = \left(\nu - M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})\right)^{-1} j^* l, \quad \tilde{g}_{\mu,m} = \left(\mu - M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta)\right)^{-1} j_*^* m \tag{9.8}$$

(здесь $j^*\colon R \to (M_z^{\mathrm{T}} - \bar{\lambda}_{\mathrm{ext}})\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, $j_*^*\colon R_* \to (M_z^{\mathrm{T}} - \lambda_{\mathrm{ext}})\mathcal{H}(\delta)$, где $\lambda_{\mathrm{ext}} \in \Omega_{\mathrm{ext}}$, см. §7). Действительно, для любой функции φ из $\mathcal{H}(\delta)$, согласно предложению 1.1,

$$\left\langle \varphi, \left(\nu - M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})\right)^{-1} j^* l\right\rangle = \left\langle j\left(\bar{\nu} - M_z^{\mathrm{T}}\lceil\mathcal{H}(\delta)\right)^{-1}\varphi, l\right\rangle = \langle\varphi(\bar{\nu}), l\rangle,$$

откуда вытекает первая из формул. Вторая формула получается аналогично.

Будем использовать понятие 3-системы, данное в предисловии. Отметим, что если (A, J, J_*) — 3-система, то оператор A^* плотно определен.

Определение. Пусть (A, J, J_*) — 3-система, тогда операторы $J\colon \mathcal{D}(A) \to R$, $J_*\colon \mathcal{D}(A^*) \to R_*$ ограничены в норме графика. Следовательно, $J_*^*\colon R_* \to A_0 H$ — ограниченный оператор. Ввиду тождества Гильберта равенство (0.2) корректно определяет $\mathcal{L}(R_*, R)$-значную аналитическую функцию Φ на $\rho(A)$, которая называется *передаточной функцией* системы (A, J, J_*).

Единственная неоднозначность в выборе Φ связана с заменой $\Phi \to \Phi + \Phi_0$, $\Phi_0 = \mathrm{const}$. В случае ограниченного оператора A от этой неоднозначности можно избавиться, налагая требование $\Phi(\infty) = 0$, другими словами, полагая $\Phi(\lambda) = J(A - \lambda)^{-1} J_*^*$.

Положим

$$h_{\nu,l} = (\nu I - A^*)^{-1} J^* l, \quad g_{\mu,m} = (\mu I - A)^{-1} J_*^* m,$$

$l \in R$, $m \in R_*$, $\mu, \bar{\nu} \in \rho(A)$. Так как $J^*\colon R \to A_0^* H$, $J_*^*\colon R_* \to A_0 H$ — ограниченные операторы, то $h_{\nu,l}$, $g_{\mu,m} \in H$ для всех l, m, μ, ν. Очевидно,

$$\begin{aligned} \left\langle (U_{A,J} x)(\lambda), l\right\rangle &= \langle x, h_{\bar{\lambda},l}\rangle, \quad \lambda \in \rho(A), \\ \left\langle (U_{A^*,J_*} x)(\lambda), m\right\rangle &= \langle x, g_{\bar{\lambda},m}\rangle, \quad \lambda \in \rho(A^*) \end{aligned} \tag{9.9}$$

для всех $x \in H$, $l \in R$, $m \in R_*$. Из формулы Гильберта вытекают равенства

$$U_{A,J} g_{\mu,m} = \tilde{g}_{\mu,m}, \quad U_{A^*,J_*} h_{\nu,l} = \tilde{h}_{\nu,l}. \tag{9.10}$$

Предположим теперь, что $\sigma(A) \subset \operatorname{clos}\Omega_{\text{int}}$, где Ω_{int}, Ω_{ext} удовлетворяют условиям §2. Будем использовать понятие двойственности 2-систем (A, J) и (A^*, J_*) относительно двусторонне допустимой функции, данное во Введении (см. (0.1)). Отметим, что если системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно функции δ, то δ — обобщенная характеристическая функция системы (A, J), а δ^{T} — обобщенная характеристическая функция системы (A^*, J_*).

Предложение 9.3. *Пусть (A, J) — C_{00} — система в области Ω_{int}. Фиксируем ее обобщенную характеристическую функцию δ. Тогда операторы A и A^* плотно определены и существует единственный оператор $J_*\colon \mathcal{D}(A^*) \to R$ такой, что система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ.*

Доказательство. Так как (A, J) — $C_{0\cdot}$ — система, то $\mathcal{D}(A)$ плотно в H. Следовательно, определен A^* и $\mathcal{D}(A^*)$ плотно в H. По условию, $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$. Рассмотрим изоморфизм $W = \left(U_{A,J}^*\right)^{-1}\colon H \to \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Он сплетает A^* с оператором M_z^T на $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Легко видеть, что система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ тогда и только тогда, когда $U_{A^*,J_*} = W$. Теперь существование и единственность оператора J_* следуют из теоремы 3.1. •

Теорема 9.4. *Пусть (A, J, J_*) — 3-система, Φ — ее передаточная функция. Пусть Ω_{int} — допустимая область, и $\sigma(A) \subset \operatorname{clos}\Omega_{\text{int}}$, $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Если системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ, то $\Phi|\Omega_{\text{ext}}$ соответствует δ, а $\Phi|\Omega_{\text{int}}$ — продолжение $\Phi|\Omega_{\text{ext}}$ по формуле* (9.4).

Доказательство. Построим по δ функцию $\widetilde{\Phi}$, голоморфную в Ω_{ext}, и продолжим ее в $\Omega_{\text{int}} \setminus \operatorname{spec}\delta$ по правилу (9.4). Согласно (9.5) и (9.6), имеет место тождество

$$\langle \tilde{g}_{\mu,m}, \tilde{h}_{\nu,l} \rangle_\delta = \langle \tilde{g}_{\mu,m}(\nu), l \rangle = -\left\langle \frac{\widetilde{\Phi}(\nu) - \widetilde{\Phi}(\mu)}{\nu - \mu} m, l \right\rangle.$$

Из определения передаточной функции следует, что

$$\langle g_{\mu,m}, h_{\nu,l} \rangle = -\left\langle \frac{\Phi(\nu) - \Phi(\mu)}{\nu - \mu} m, l \right\rangle.$$

Ввиду двойственности систем (A, J) и (A^*, J_*) относительно δ

$$\langle g_{\mu,m}, h_{\nu,l}\rangle = \langle U_{A,J} g_{\mu,m}, U_{A^*,J_*} h_{\nu,l}\rangle_\delta = \langle \tilde{g}_{\mu,m}, \tilde{h}_{\nu,l}\rangle_\delta$$

для всех $\mu, \bar{\nu} \in \rho(A)\setminus \operatorname{spec}\delta$, $m \in R_*$, $l \in R$. Мы заключаем, что $\Phi - \widetilde{\Phi} = \mathrm{const}$. •

Теорема 9.5. *Пусть (A, J, J_*) — 3-система и Φ — ее передаточная функция. Пусть Ω_{int} — допустимая область и $\sigma(A) \subset \operatorname{clos}\Omega_{\text{int}}$. Пусть δ — двусторонне допустимая функция из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1) *$U_{A,J} : H \to \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ и $U_{A^*,J_*} : H \to \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R)$ — ограниченные операторы;*

2) *$U_{A,J}$ и U_{A^*,J_*} инъективны;*

3) *Φ соответствует δ.*

Доказательство. Если системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ, то, согласно определению, выполнены 1) и 2). Из равенства $U_{A,J} g_{\mu,m} = \tilde{g}_{\mu,m}$ (см. (9.10)) вытекает, что Φ соответствует δ.

Обратно, пусть выполнены условия 1)–3). Так как оператор $U_{A,J}$ инъективен, то, согласно (9.9), векторы $h_{\nu,l}$ полны в H. Ввиду 3) выполнено (9.10). Так как $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$ — замкнутое подпространство пространства $E^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R)$ и векторы $U_{A^*,J_*} h_{\nu,l} = \tilde{h}_{\nu,l}$ порождают $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, то ввиду 1) $U_{A^*,J_*} H \subset \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Аналогично $U_{A,J} H \subset \mathcal{H}(\delta)$. Из тех же соображений $U_{A^*,J_*} H$ плотно в $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$ и $U_{A,J} H$ плотно в $\mathcal{H}(\delta)$. Будем считать, что $U_{A,J}$ действует из H в $\mathcal{H}(\delta)$, а U_{A^*,J_*} действует из H в $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Так как для любых $\nu \in \rho(A^*)$, $l \in R$ и $x \in H$,

$$\langle U_{A,J} x, U_{A^*,J_*} h_{\nu,l}\rangle_\delta = \langle U_{A,J} x, \tilde{h}_{\nu,l}\rangle_\delta = \langle (U_{A,J} x)(\bar{\nu}), l\rangle = \langle x, h_{\nu,l}\rangle, \tag{9.11}$$

то $U^*_{A^*,J_*} U_{A,J} = I$. Так как образ оператора $U_{A,J}$ плотен в $\mathcal{H}(\delta)$, то $U^*_{A^*,J_*}$ — обратный к нему оператор. Значит, система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ. •

В частности, в условиях теоремы оператор A подобен оператору M_z^{T} на $\mathcal{H}(\delta)$.

Полезен также следующий вариант теоремы 9.5.

Теорема 9.6. *Пусть (A, J, J_*) — 3-система, Φ — ее передаточная функция. Пусть Ω_{int} — допустимая область и $\sigma(A) \subset \operatorname{clos}\Omega_{\text{int}}$. Пусть δ — допустимая функция из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Если выполнены условия*

1′) $U_{A,J}$ — *ограниченный оператор из* H *в* $\mathcal{H}(\delta)$; U_{A^*,J_*} — *ограниченный оператор из* H *в* $E^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R_*)$;

2′) $U_{A,J}$ *инъективен*;

3′) Φ *соответствует* δ,

то системы (A, J) *и* (A^*, J_*) *находятся в двойственности относительно функции* δ.

Доказательство. Из 2′) и (9.9) получаем, что векторы $h_{\nu,l}$ полны в H. Ввиду (3′) выполнено (9.10). Так же, как и в доказательстве теоремы 9.5, получаем, что $U_{A^*,J_*}H \subset \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$ и $U_{A^*,J_*}H$ плотно в $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Из выкладки (9.11) получаем, что $U^*_{A,J}U_{A^*,J_*} = I$, и теперь из плотности образа U_{A^*,J_*} вытекает, что система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ. •

Было бы интересно объединить наш подход с построениями теории оптимального управления бесконечномерными системами (см. [24, 7, 65, 34, 66, 37] и др).

§10. Вычисление обобщенных характеристических функций в примерах

Мы рассмотрим примеры §6, а также генераторы c_0-групп.

10.1. Предположим, что T — C_{00}-сжатие в H, т.е. $\|T\| \leqslant 1$, $\lim_n T^n x = \lim_n T^{*n} x = 0$ для всех $x \in H$. Положим $D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$, $\mathcal{D}_{T^*} = \operatorname{clos} D_{T^*}H$. Положим, как и ранее, $J = D_T$, $R = \mathcal{D}_T$, и пусть далее $J_* = D_{T^*}$, $R_* = \mathcal{D}_{T^*}$. Тогда передаточная функция 3-системы (A, J, J_*) имеет вид

$$\Phi(\lambda) = D_T(\lambda - T)^{-1} D_{T^*}|\mathcal{D}_{T^*} \colon R_* \to R, \quad \lambda \in \rho(T).$$

Предложение 10.1. *Пусть* T — C_{00}-*сжатие. Тогда системы* (T, D_T) *и* (T^*, D_{T^*}) *двойственны относительно характеристической функции С.-Надя–Фояша*

$$\delta(\lambda) = -T + \lambda D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} D_T|\mathcal{D}_T, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Доказательство. Согласно [20], из условия $T \in C_{00}$ следует, что $\delta \in H^\infty\big(\mathbb{D}, \mathcal{L}(R, R_*)\big)$ и что δ унитарнозначна п.в. на $\mathbb{T}$. Положим $\tau(\lambda) \equiv T^*|R_*$; легко видеть, что $\tau \in E^2(\mathbb{D}, \mathcal{L}(R_*, R))$. Мы имеем

$$\delta(\lambda)^* + T^*|R_* = \Phi(\bar{\lambda}^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, $\Phi \in H^\infty(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}, \mathcal{L}(R_*, R))$ и, в частности, $\Phi \in zH^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}, \mathcal{L}(R_*, R))$; мы получаем также, что $\delta_i^{-1} + T^*|R_* = \Phi_e$ п.в. на $\partial\mathbb{D}$. Следовательно, $\Phi|\Omega_{\text{ext}}$ соответствует δ. Двойственность систем (T, D_T) и (T^*, D_{T^*}) относительно δ следует из теоремы 9.5. •

10.2. Аналогично пусть A — максимальный диссипативный оператор, удовлетворяющий условиям п. 6.2. Предположим, кроме того, что $A \in C_{00}$. Положим $\Omega_{\mathrm{int}} = \{\operatorname{Re} z > 0\}$, $J = (2 \operatorname{Im} A)^{1/2}$, $J_* = -iJ$, $R = R_* = \operatorname{clos} \operatorname{Range} J$. Характеристическая функция С.-Надя–Фояша

$$\delta_A(z) = I - J_*(A^* - zI)^{-1} J^* | R$$

(первоначально заданная на множестве $\{r \in R\colon Jr \in R\}$) унитарнозначна п.в. на $\mathbb{R}$. Так же, как и в п. 10.1, из равенства

$$\delta_A^*(z) = I + J(\bar{z}I - A)^{-1} J_*^* = I + \Phi(\bar{z}), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

мы заключаем, что передаточная функция $\Phi(z) = J(\bar{z}I - A)^{-1} J_*^*$ корректно определена в Ω_{ext} и что функция $\Phi | \Omega_{\mathrm{ext}}$ соответствует δ. Предложение 6.3 и теорема 9.5 позволяют заключить, что системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно характеристической функции δ.

Техника статей [19, 17, 26] позволяет избавиться от предположения, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

10.3. Пусть A — оператор из примера 6.3, и δ, J_* определяются из формул (6.7), (6.6). Покажем, что обобщенная характеристическая функция оператора A совпадает с δ. Необходимо доказать, что $U_{A^*, J_*} H = \mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$, и найти оператор $J\colon \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}^n$ такой, что система (A, J) двойственна системе (A^*, J_*) относительно δ.

Отметим, что $\delta^{-1}(\lambda) = e^{-\lambda w} \Delta^{-1}(\lambda) \in H^\infty(\Omega_{\mathrm{ext}}, \mathbb{C}^{n \times n})$; отсюда следует, что функция Φ, построенная по функции δ, совпадает с δ^{-1} (см. (9.1)). Найдем оператор J такой, что передаточная функция системы (A, J, J_*) совпадает с δ^{-1}.

Каждому $c \in \mathbb{C}^n$ соответствует δ-функция $\psi_w c$, заданная равенством $\langle \varphi, \psi_w c \rangle = \langle \varphi(w), c \rangle$. Считая, что $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, получаем, что $\psi_w c \in \mathcal{D}(A)^* \doteq A^* H$. Из (6.7) формально вытекает равенство

$$J_*(\lambda - A^*)^{-1} \psi_w c = \delta^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1} c = \Phi^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1} c, \quad \lambda \in \rho(A). \tag{10.1}$$

Отметим, что элементы $\big((\lambda - A^*)^{-1} \psi_w c\big)(x)$ непрерывны при $x = 0$, но не входят в $\mathcal{D}(A^*)$. Формулы (10.1) и (0.1) наводят на предположение, что искомый оператор J находится по формуле $J^* c = \psi_w c$, $c \in \mathbb{C}^n$, что равносильно равенству

$$J\varphi = \varphi(w), \quad \varphi \in \mathcal{D}(A). \tag{10.2}$$

Предложение 10.2. *Пусть оператор A определен формулами* (6.1) *и* (6.2). *Определим J, J^*, δ формулами* (10.2), (6.6), (6.7). *Тогда системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно функции δ, а функция δ^{-1} является передаточной функцией 3-системы (A, J, J_*).*

Доказательство. Обозначим символом Φ_1 передаточную функцию системы (A, J, J_*), тогда Φ_1^{T} — передаточная функция системы (A^*, J_*, J). Из (10.1) следует, что

$$J_*\left[(\lambda - A^*)^{-1} - (\mu - A^*)^{-1}\right] J^* = \delta^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1} - \delta^{\mathrm{T}}(\mu)^{-1}.$$

Следовательно, $\Phi_1^{\mathrm{T}}(\lambda) = \delta^{\mathrm{T}}(\lambda)^{-1} = \Phi^{\mathrm{T}}(\lambda)$. Применим теорему 9.6 к системе (A^*, J_*, J). Из (6.4) получаем формулу

$$U_{A,J}x(\lambda) = \delta(\lambda)^{-1}\left[\int d\beta(x) \int_0^x e^{\lambda(t-x)}x(t)\,dt + \rho\int_0^w e^{\lambda(t-w)}x(t)\,dt\right] + \int_0^w e^{\lambda(t-w)}x(t)\,dt.$$

Отсюда видно, что $U_{A,J}$ — ограниченный оператор из H в $\widehat{E}^2(\Omega_{\mathrm{ext}}, R)$. Из (6.8) и предложения 6.4 следует, что U_{A^*,J_*} — ограниченный и инъективный оператор из H в $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}})$. Таким образом, выполнены условия теоремы 9.6, и мы получаем все утверждения предложения. •

10.4. Пусть A — генератор нейтральной полугруппы с запаздыванием из примера 6.4. Положим

$$J(c, \varphi) = \varphi(-h), \quad (c, \varphi) \in \mathcal{D}(A). \tag{10.3}$$

Предложение 10.3. *В обозначениях §6.4 и (10.3) системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно функции δ, а функция δ^{-1} является передаточной функцией системы (A, J, J_*).*

Доказательство. Введем оператор D_- на $L^2([-h, 0] \to \mathbb{C}^n)$,

$$\mathcal{D}(D_-) = \{\varphi \in W_1^2([-h, 0] \to \mathbb{C}^n) \colon \varphi(-h) = 0\}, \quad D_-\varphi = \varphi'.$$

Тогда оператор $(z - D_-)^{-1}$ ограничен для всех $z \in \mathbb{C}$, и

$$((z - D_-)^{-1}\varphi)(x) = -\int_{-h}^x e^{z(x-t)}\varphi(t)\,dt.$$

Легко видеть, что

$$U_{A,J}(c,\varphi)(z) = J(z-A)^{-1}(c,\varphi) = e^{-hz}\Delta(z)^{-1}\bigl(c-(zM-L)(z-D_-)^{-1}\varphi\bigr).$$

Следовательно,

$$J(z-A)^{-1}J_0^* = e^{-hz}\Delta(z)^{-1} = (z-b)\delta(z)^{-1}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} J\bigl[(\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}\bigr]J_*^* &= J\bigl[(\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}\bigr](A-b)J_0^* \\ &= J\bigl[(\lambda-b)(\lambda-A)^{-1}-(\lambda-b)(\mu-A)^{-1}\bigr]J_0^* \\ &= \delta^{-1}(\lambda)-\delta^{-1}(\mu). \end{aligned}$$

Значит, передаточная функция Φ системы (A,J,J_*) совпадает с δ^{-1}.

Непосредственно проверяется, что выполнены все условия теоремы 9.6, откуда вытекает утверждение предложения. •

Отметим, что в [44] приводится общее „алгебраическое" определение характеристической функции, также приложимое к исследованию операторов типа рассматриваемых в примерах 6.3 и 6.4. Интересно было бы понять связь конструкции [44] с нашей в возможно более общей ситуации.

10.5. Пусть A — генератор c_0-группы и пусть $\alpha < \alpha_0(A) \leqslant \beta_0(A) < \beta$ (см. §8). Положим $J = I$, $\Pi = \{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$. Согласно теореме 3.1 и замечанию 2 к ней, $U_{A,J}$ — изоморфизм пространства H на пространство $\mathcal{H}(\delta)$ для некоторой двусторонне допустимой функции $\delta \in H^\infty(\Pi,\mathcal{L}(H))$. Следующее утверждение, в частности, дает формулу для функции δ.

Предложение 10.4. *Пусть A — генератор c_0-группы. Фиксируем комплексное число s, $|\operatorname{Re} s| > \beta-\alpha$. Положим $R = R_* = H$, $J_* = \bar{s}I$, $\delta(z) = (z-A)(z+s-A)^{-1}$. Тогда $\delta \in H^\infty(\Pi,\mathcal{L}(H))$, δ — двусторонне допустимая в полосе Π, и системы (A,J) и (A^*,J_*) находятся в двойственности относительно функции δ.*

Доказательство. Очевидно, δ — двусторонне допустимая функция в Π. Полагая $\tau(z) \equiv I$, мы видим, что функция $\Phi(z) = s(z-A)^{-1}$ соответствует δ; видно также, что Φ является передаточной функцией системы (A,J,J_*). Таким образом, выполнены условия 1)–3) теоремы 9.5. •

Отметим, что условие $\delta(z) - I \in S_p$ при $z \in \Pi$ равносильно условию $(z-A)^{-1} \in S_p$ при $z \in \rho(A)$; здесь S_p — класс Шаттена-фон Неймана. Заметим также, что при $\operatorname{Re} s > \beta-\alpha$ та же функция δ служит обобщенной характеристической функцией 3-системы в полуплоскости $\alpha < \operatorname{Re} z$, а при $\operatorname{Re} s < -(\beta-\alpha)$ это утверждение имеет место для полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$.

§11. Неоднозначность в выборе обобщенной характеристической функции

В примерах 3, 4, 5 предыдущего параграфа были даны явные формулы для вычисления обобщенных характеристических функций, в то время как внутренние части этих функций, по всей видимости, не вычисляются явно. Характер неоднозначности выбора обобщенной характеристической функции зависит от того, имеем ли мы дело с оператором A, с 2-системой (A, J), либо с 3-системой (A, J, J_*). Всюду в этом параграфе считаем, что A — C_{00}-оператор в области Ω_{int}. Для простоты обозначений будем считать (не умаляя общности), что $R = R_*$.

Теорема 11.1. *Пусть все компоненты области Ω_{int} односвязны. Пусть $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — обобщенная двусторонне допустимая характеристическая функция оператора A в области Ω_{int}, L — гильбертово пространство, ζ — двусторонне допустимая функция из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(L))$. Тогда ζ тоже является обобщенной характеристической функцией оператора A в том и только том случае, когда найдутся функции Σ_1, Σ_2 из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, L))$, Ψ_1, Ψ_2 из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(L, R))$, Π из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$, Λ из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(L))$ такие, что $\Sigma_1\delta = \zeta\Sigma_2$, $\Psi_1\zeta = \delta\Psi_2$, $\Psi_1\Sigma_1 = I + \delta\Pi$, $\Sigma_1\Psi_1 = I + \zeta\Lambda$.*

Доказательство. ζ — обобщенная характеристическая функция оператора A тогда и только тогда, когда найдется изоморфизм

$$\varphi\colon \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)/\delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \to \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, L)/\zeta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, L)$$

такой, что $\varphi M_z = M_z\varphi$ (здесь M_z имеет смысл фактор-операторов). По теореме о подъеме коммутанта [38, теорема VII.1.2], найдется функция $\Sigma_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, L))$ такая, что $\varphi(f + \delta\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)) = \Sigma_1 f + \zeta E^2(\Omega_{\text{int}}, L)$, $f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$. Из корректной определенности φ вытекает необходимость равенства $\Sigma_1 \cdot \delta = \zeta \cdot \Sigma_2$. Применяя то же соображение к изоморфизму $\psi = \varphi^{-1}$ и используя равенства $\varphi\psi = I$, $\psi\varphi = I$, получаем необходимость всех четырех соотношений. Их достаточность вытекает из прямой проверки. •

В случае конечномерности пространства R теорема о подъеме коммутанта обобщается на многосвязный случай ввиду результатов [29]; частичные обобщения для бесконечномерных R и многосвязных областей Ω_{int} имеются в [58].

Из предложения 5.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 11.2. *Пусть (A, J) — 2-система, $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — ее обобщенная двусторонне допустимая характеристическая функция. Пусть $\delta_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) δ_1 — *тоже обобщенная характеристическая функция системы* (A, J);

2) $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$;

3) *существует функция* ψ *такая, что* ψ, $\psi^{-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}} \to \mathcal{L}(R))$ *и* $\delta_1 = \psi\delta$. •

Предложение 11.3. *Пусть* (A, J, J_*) — *3-система, такая, что* (A^*, J_*) *двойственна системе* (A, J) *относительно функции* δ. *Пусть* $\delta_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — *двусторонне допустимая функция. Тогда равносильны утверждения*:

1) *система* (A^*, J_*) *двойственна системе* (A, J) *относительно функции* δ_1;

2) $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$, $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}}) = \mathcal{H}(\delta_1^{\mathrm{T}})$, *и формы* $\langle\cdot,\cdot\rangle_\delta$ *и* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\delta_1}$ *совпадают*;

3) *существует функция* $\tau \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ *такая, что* $\delta^{-1} - \delta_1^{-1} = \tau$;

4) *существует функция* τ *такая, что* τ, $(I - \delta\tau)^{-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ *и* $\delta_1 = (I - \delta\tau)^{-1}\delta$;

5) *существует функция* ρ *такая, что* ρ, $(I + \delta\rho)^{-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ *и* $\delta_1 = (I + \delta\rho)\delta$.

Доказательство. Равносильность 1) и 2) очевидна. Проверим равносильность 3), 4) и 5). Пусть выполнено 3), тогда $\delta = (I - \delta\tau)\delta_1$ и $\delta_1 = (I + \delta_1\tau)\delta$, откуда следует 4). Полагая $\rho = \tau(I - \delta\tau)^{-1}$, так что $(I + \delta\rho)^{-1} = I - \delta\tau$, мы видим, что из 4) следует 5). Наконец, полагая $\tau = \rho(I + \delta\rho)^{-1}$, получаем, что 5) $\Longrightarrow$ 3).

Проверим, что 2) $\Longrightarrow$ 3). Если выполнено 2), то воспроизводящие ядра пространств $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta_1)$ совпадают, откуда вытекает, что функция Φ, соответствующая функциям δ и δ_1, одна и та же. Поэтому существуют $\tau_0, \tau_1 \in (z - \lambda_{\text{ext}})\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ такие, что $\Phi = \delta^{-1} + \tau_0 = \delta_1^{-1} + \tau_1$. Полагая $\tau = \tau_1 - \tau_0 = \delta^{-1} - \delta_1^{-1}$, видим, что $\tau \in H^\infty(\Omega \to \mathcal{L}(R))$.

Проверим, что 5) $\Longrightarrow$ 2). Пусть выполнено условие 5). Тогда $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$. Далее, функция $\eta = I + \rho\delta$ также обратима в H^∞, и $(I + \rho\delta)^{-1} = I - \rho(I + \delta\rho)^{-1}\delta$. Так как $\delta_1 = \delta\eta$, $\delta_1^{\mathrm{T}} = \eta^{\mathrm{T}}\delta^{\mathrm{T}}$, то $\mathcal{H}(\delta^{\mathrm{T}}) = \mathcal{H}(\delta_1^{\mathrm{T}})$. Совпадение форм $\langle\cdot,\cdot\rangle_\delta$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\delta_1}$ следует из их определения и 5). •

Список литературы

[1] Аров Д. З., *Пассивные линейные стационарные динамические системы*, Сиб. мат. ж. **20** (1979), №2, 211–228.

[2] Аров Д. З., Нудельман М. А., *Признаки подобия всех минимальных пассивных реализаций заданной передаточной функции (матрица рассеяния и сопротивления)*, Мат. сб. **193** (2002), №6, 3–24.

[3] Васюнин В. И., Купин С., *Критерии подобия диссипативного интегрального оператора нормальному*, Алгебра и анализ **13** (2001), №3, 65–104.

[4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным*, Функц. анал. и прил. **1** (1967), №1, 38–60.

[5] Губреев Г. М., *Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B-представимых вектор-функций (метод проектирования: 20 лет спустя)*, Алгебра и анализ **12** (2000), №6, 1–97.

[6] Капустин В. В., *Спектральный анализ почти унитарных операторов*, Алгебра и анализ **13** (2001), №5, 44–68.

[7] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., *Частотная теорема для уравнений эволюционного типа*, Сиб. мат. ж. **17** (1976), №5, 1069–1085.

[8] Маламуд М. М., *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному*, Укр. мат. ж. **37** (1985), №1, 49–56.

[9] Маламуд М. М., *О подобии треугольного оператора диагональному*, Зап. науч. семин. ПОМИ **270** (2000), 201–241.

[10] Набоко С. Н., *Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **147** (1980), 86–114.

[11] Набоко С. Н., *Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам*, Функц. анал. и его прил. **18** (1984), №1, 16–27.

[12] Набоко С. Н., Фаддеев М. М., *Операторы модели Фридрихса, подобные самосопряженным*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. физ., хим. **1990**, вып. 4, 78–82.

[13] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[14] Павлов Б. С., *Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **39** (1975), №1, 123–148.

[15] Pavlov B., *Nonphysical sheet for perturbed Jacobian matrices*, Алгебра и анализ **6** (1994), №3, 185–199.

[16] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

[17] Рыжов В. А., *Абсолютно непрерывные и сингулярные подпространства несамосопряженного оператора*, Зап. науч. семин. ПОМИ **222** (1995), 163–202.

[18] Сахнович Л. А., *Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром*, Тр. Моск. мат. о-ва **19** (1968), 211–270.

[19] Соломяк Б. М., *О функциональной модели для диссипативных операторов. Бескоординатный подход*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **178** (1989), 57–91.

[20] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.

[21] Федоров С. И., *О гармоническом анализе в многосвязной области и характер-автоморфных пространствах Харди*, Алгебра и анализ **9** (1997), №2, 192–240.

[22] Штраус А. В., *Характеристические функции линейных операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **24** (1960), №1, 43–74.

[23] Хилле Э., Филлипс Р. С., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

[24] Якубович В. А., *Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления*. II, Сиб. мат. ж. **16** (1975), №5, 1081–1102.

[25] Alpay D., Vinnikov V., *Finite dimensional de Branges spaces on Riemann surfaces*, J. Funct. Anal. **189** (2002), no. 2, 283–324.

[26] Arov D. Z., Nudelman M. A., *Passive linear stationary dynamical scattering systems with continuous time*, Integral Equations Operator Theory **24** (1996), 1–45.

[27] Arova Z., *On J-unitary nodes with strongly regular J-inner characteristic functions in the Hardy class* $H_2^{n\times n}$, Operator Theoretical Methods (Timişoara, 1998), Theta Found., Bucharest, 2000, pp. 29–38.

[28] Avdonin S. A., Ivanov S. A., *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[29] Ball J. A., *A lifting theorem for operator models of finite rank on multiply-connected domains*, J. Operator Theory **1** (1979), 3–25.

[30] Ball J. A., Cohen N., *De Branges-Rovnyak operator models and systems theory: a survey*, Topics in Matrix and Operator Theory (Rotterdam, 1989), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 50, Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 93–136.

[31] Benamara N.-E., Nikolski N., *Resolvent tests for similarity to a normal operator*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999), no. 3, 585–626.

[32] de Branges L., Rovnyak J., *Canonical models in quantum scattering theory*, Perturbation Theory and its Application in Quantum Mechanics (Madison, 1965), Wiley, New York, 1966, pp. 295–392.

[33] Clark D. N., *On a similarity theory for rational Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 6–31.

[34] Curtain R. F., Zwart H. J., *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Texts Appl. Math., vol. 21, Springer-Verlag, New York, 1995.

[35] Datko R., *Extending a theorem of A. M. Lyapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 610–616.

[36] Duren P. L., *Theory of H^p-spaces*, Pure Appl. Math., vol. 38, Academic Press, New York–London, 1970.

[37] Dym H., *On Riccati equations and reproducing kernel spaces*, Recent Advances in Operator Theory (Groningen, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 124, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 189–215.

[38] Foiaş C., Frazho A. E., *The commutant lifting approach to interpolation problems*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 44, Birkhäuser, Basel, 1990.

[39] Fuhrmann P. A., *Linear systems and operators in Hilbert space*, McGraw-Hill, New York, 1981.

[40] Fuhrmann P. A., *A polynomial approach to linear algebra*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[41] Hasumi M., *Invariant subspace theorems for finite Riemann surfaces*, Canad. J. Math. **18** (1966), 240–255.

[42] Jacob B., Partington J. R., *The Weiss conjecture on admissibility of observation operators for contraction semigroups*, Integral Equations Operator Theory **40** (2001), 231–243.

[43] Jacob B., Partington J. R., Pott S., *Conditions for admissibility of observation operators and boundedness of Hankel operators* (в печати).

[44] Kaashoek M. A., Verduyn Lunel S. M., *Characteristic matrices and spectral properties of evolutionary systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 479–517.

[45] Kalton N. J., Le Merdy C., *Solution of a problem of Peller concerning similarity*, J. Operator Theory **47** (2002), 379–387.

[46] Komornik V., *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, RAM Res. Appl. Math., Masson, Paris; J. Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 1994.

[47] Kupin S., *Linear resolvent growth test for similarity of a weak contraction to a normal operator*, Ark. Mat. **39** (2001), 95–119.

[48] Kupin S., Treil S., *Linear resolvent growth of a weak contraction does not imply its similarity to a normal operator*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 229–242.

[49] Le Merdy C., *On dilation theory for C^0- semigroups on Hilbert space*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), no. 4, 945–959.

[50] Le Merdy C., *The similarity problem for bounded analytic semigroups on Hilbert space*, Semigroup Forum **56** (1998), 205–224.

[51] Le Merdy C., *The Weiss conjecture for bounded analytic semigroups* (в печати).

[52] Le Merdy C., *A bounded compact semigroup on Hilbert space not similar to a contraction one*, Semigroups of Operators: Theory and Applications (Newport Beach, CA, 1998), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 42, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 213–216.

[53] Le Merdy C., *Similarities of ω-accretive operators*, Prépubl. Lab. Math. Besançon no. 2002/07, Univ. France Comté, Centre Nat. Rech. Sci., Besançon, 2002.

[54] Lions J.-L., *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. T. 1, 2, Rech. Math. Appl., t. 8, 9, Masson, Paris, 1988.

[55] Livšic M. S., Kravitsky N., Markus A. S., Vinnikov V., *Theory of commuting nonselfadjoint operators*, Math. Appl., vol. 332, Kluwer Acad. Publishers Group, Dordrecht, 1995.

[56] Verduyn Lunel S. M., Yakubovich D. V., *A functional model approach to linear neutral functional-differential equations*, Integral Equations Operator Theory **27** (1997), 347–378.

[57] McIntosh A., *Operators which have an H^∞ functional calculus*, Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations (North Ryde, 1986), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 14, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986, pp. 210–231.

[58] McCullough S., *Commutant lifting on a two holed domain*, Integral Equations Operator Theory **35** (1999), no. 1, 65–84.

[59] Nikolski N. K., *Contrôlabilité à une renormalisation près et petits opérateurs de controle*, J. Math. Pures Appl. (9) **77** (1998), no. 5, 439–479.

[60] Nikolski N. K., Vasyunin V. I., *Elements of spectral theory in terms of the free function model.* I. *Basic constructions*, Holomorphic Spaces (Berkeley, CA, 1995), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 33, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 211–302.

[61] Nikolski N. K., *Operators, functions, and systems: an easy reading.* Vol. 1. *Hardy, Hankel, and Toeplitz.* Vol. 2. *Model operators and systems*, Math. Surveys Monogr., vol. 92, 93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[62] Paulsen V. I., *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 146, Longman; Wiley, New York, 1986.

[63] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci., vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[64] Pisier G., *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 351–369.

[65] Pritchard A. J., Salamon D., *The linear quadratic control problem for infinite-dimensional systems with unbounded input and output operators*, SIAM J. Control Optim. **25** (1987), 121–144.

[66] Staffans O., *Quadratic optimal control of well-posed linear systems*, SIAM J. Control Optim. **37** (1999), 131–164.

[67] Staffans O., Weiss G., *Transfer functions of regular linear systems.* II. *The system operator and the Lax-Phillips semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 8, 3229–3262.

[68] Vasyunin V. I., Makarov N. G., *A model for noncontractions and stability of the continuous spectrum*, Complex Analysis and Spectral Theory (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer, Berlin–New York, 1981, pp. 365–412.

[69] Voichick M., *Invariant subspaces on Riemann surfaces*, Canad. J. Math. **18** (1966), 399–403.

[70] Weiss G., *Admissible observation operators for linear semigroups*, Israel J. Math. **65** (1989), 17–43.

[71] Weiss G., *Admissibility of unbounded control operators*, SIAM J. Control Optim. **29** (1989), 527–545.

[72] Xia D., *On the kernels associated with a class of hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory **6** (1983), no. 3, 444–452.

[73] Yakubovich D. V., *Spectral properties of smooth finite rank pertubations of a planar Lebesgue spectrum cyclic normal operator*, Report no. 15 (1990/91), Inst. Mittag-Leffler, Stockholm.

[74] Yakubovich D. V., *Spectral properties of smooth perturbations of normal operators with planar Lebesgue spectrum*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 55–83.

[75] Yakubovich D. V., *Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators*, J. Funct. Anal. **136** (1996), no. 2, 294–330.

[76] Yakubovich D. V., *A similarity version of the Nagy-Foias model, duality and exact controllability*, 17th International Conference on Operator Theory (Timisoara, 1998): Thesis of Reports.

[77] Yakubovich D. V., *Subnormal operators of finite type. II. Structure theorems*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 3, 623–681.

[78] Zuazua E., *Some problems and results on the controllability of partial differential equations*, European Congress of Mathematics. Vol. 2 (Budapest, 1996), Progr. Math., vol. 169, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 276–311.

[79] Тихонов А. С., *Функциональная модель и двойственность спектральных компонент для операторов с непрерывным спектром на кривой*, Алгебра и анализ **14** (2002), №4, 158–195.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 20 августа 2002 г.

Автономный университет Мадрида

E-mail: dmitry.yakubovich@uam.es