Е. С. Крупицын, Оценка многочлена от глобально трансцендентного полиадического числа, *Чебышевский сб.*, 2017, том 18, выпуск 4, 256–260

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-255-259

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-255-259

ОЦЕНКА МНОГОЧЛЕНА ОТ ГЛОБАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО ПОЛИАДИЧЕСКОГО ЧИСЛА

Е. С. Крупицын (г. Москва)

Аннотация

Пусть

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k,$$

где n_k — быстро возрастающая последовательность натуральных чисел. Этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел и представляет собой полиадическое число. Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Это позволяет рассматривать α, как бесконечномерный вектор $\left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}, \ldots\right)$, где координата с номером n равна сумме этого ряда в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$, где p_n — n-ое простое число.

Для любого многочлена $P(x)$, отличного от тождественного нуля и имеющего целые коэффициенты, имеет место равенство

$$P(\alpha) = \left(P\left(\alpha^{(1)}\right), \ldots, P\left(\alpha^{(n)}\right), \ldots\right).$$

Полиадическое число α называется алгебраическим, если $P(\alpha)$ есть нулевой вектор, $P(\alpha) = (0, \ldots, 0)$.

В работах В.Г. Чирского введены понятия трансцендентного, бесконечно трансцендентного, глобально трансцендентного числа. Именно, полиадическое число α называется алгебраическим, если для любого многочлена $P(x)$ полиадическое число $P(\alpha)$ не равно нулю, т.е. имеет хотябы одну отличную от нуля координату $P\left(\alpha^{(n)}\right)$. Полиадическое число называется бесконечно трансцендентным, если таких координат бесконечно много и глобально трансцендентным, если все $P\left(\alpha^{(n)}\right) \neq 0$. В работе получены оценки снизу $\left|P\left(\alpha^{(n)}\right)\right|_{p_n}$ в любом поле $\mathbb{Q}_{p_n}$. Следствием является глобальная трансцендентность α.

Ключевые слова: оценка многочлена, полиадическое число, трансцендентность.

Библиография: 15 названий.

ESTIMATES OF POLYNOMIALS IN A LIOUVILLEAN POLYADIC INTEGER

E. S. Krupitsyn (Moscow)

Abstract

Let

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k,$$

with a rapidly growing sequence n_k of positive integers. This series converges in all p-adic fields $\mathbb{Q}_p$ so it is a polyadic number.

The ring of polyadic integers is a direct product of the rings $\mathbb{Z}_p$ of p-adic integers over all prime numbers p.

So α can be considered as the vector $\left(\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(n)},\ldots\right)$ with coordinates equal to the sums $\alpha^{(n)}$ of the series α in the field $\mathbb{Q}_{p_n}$ for the n-th prime p_n.

For any nonzero polynomial $P(x)$ with integer coefficients one has

$$P(\alpha)=\left(P\left(\alpha^{(1)}\right),\ldots,P\left(\alpha^{(n)}\right),\ldots\right).$$

The polyadic integer α is called transcendental, if for any nonzero polynomial $P(x)$ with rational integer coefficients there exist a prime $p^{(n)}$ with $P\left(\alpha^{(n)}\right)\neq 0$ in p_n.

The polyadic integer is infinitely transcendental if there exist infinitely many primes p_n such that $P\left(\alpha^{(n)}\right)\neq 0$ in $\mathbb{Q}_{p_n}$ and it is called globally transcendental, if $P\left(\alpha^{(n)}\right)\neq 0$ for any n.

The paper presents estimates from below of $\left|P\left(\alpha^{(n)}\right)\right|_{p_n}$ in any $\mathbb{Q}_{p_n}$. As a corollary we get the global transcendence of α.

Keywords: polyadic integer, estimates of polynomials.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В работе дается оценка многочлена от полиадического лиувиллева числа. Теория полиадических чисел изложена, например, в книге [1]. Арифметические свойства полиадических чисел исследовались в работах В. Г. Чирского [2]–[11], [15], Д. Бертрана [12], В. Ю. Матвеева, Е. С. Крупицына [13] и др.

В работе Цайсова [14] установлена оценка многочлена от лиувиллева числа в архимедовом случае.

Цель этой работы — доказательство теоремы.

2. Основной текст статьи

Теорема 1. *Пусть*

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}a_k n_k!,\quad a_k\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant a_k\leqslant n_k,\quad n_k\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\frac{(n_k+1)\ln(n_k+1)}{n_k+1}\to 0 \text{ при } k\to+\infty. \tag{2}$$

Пусть $\varepsilon(H)\to 0$ при $H\to+\infty$. Пусть $\widetilde{p}\in\mathbb{N}$. Тогда существует $H_0=H_0(\widetilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p\leqslant\widetilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H, $H\geqslant H_0$, имеющего степень m, удовлетворяющую неравенству

$$m\varepsilon(H)<\frac{\ln\widetilde{p}}{2(\widetilde{p}-1)} \tag{3}$$

выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p>\frac{1}{m+1}\cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)\left(\ln\ln H+\ln\varepsilon^{-1}(H)\right)\cdot m}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим для $N\in\mathbb{N}$ $\alpha_N=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k n_k!$. Имеет место равенство

$$P(\alpha_N)=P(\alpha)+P'(\alpha)(\alpha_N-\alpha)+\ldots+\frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}(\alpha_N-\alpha)^m \tag{5}$$

Если

$$\alpha_{N} > H+1, \tag{6}$$

то по лемме о модуле старшего члена $P(\alpha_{N}) \neq 0$ и

$$|P(\alpha_{N})|_p \geqslant \frac{1}{|P(\alpha_{N})|} \tag{7}$$

Ввиду неравенства

$$\left| P'(\alpha)(\alpha_{N}-\alpha) + \ldots + \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}(\alpha_{N}-\alpha)^m \right|_p \leqslant |\alpha_{N}-\alpha|_p \leqslant |n_{N+1}!|_p$$

из (5) и (7) следует, что

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \frac{1}{|P(\alpha_{N})|} \tag{8}$$

если

$$|n_{N+1}!|_p < \frac{1}{|P(\alpha_{N})|}. \tag{9}$$

Для величины $|P(\alpha_{N})|$ имеем оценку

$$|P(\alpha_{N})| \leqslant H \cdot (m+1) \cdot \alpha_{N}^m \leqslant H \cdot (m+1) \cdot ((n_{N}+1)!)^m. \tag{10}$$

Ввиду формулы $|n!|_p = p^{-\frac{n-S_n}{p-1}}$, где S_n — сумма цифр p-ичного разложения числа n получаем, что неравенство (10) следует из неравенства

$$\ln(H(m+1)) + m(n_{N}+1)\ln(n_{N}+1) < \frac{\ln p}{p-1} \cdot n_{N+1} - \ln(p \cdot n_{N+1}). \tag{11}$$

При $N \geqslant N_0(H)$ ввиду (2),

$$\frac{(n_{N}+1)\ln(n_{N}+1)}{n_{N+1}} < \varepsilon(H) \tag{12}$$

и

$$\ln(n_{N+1}p) < m\varepsilon(H)n_{N+1}.$$

Поэтому (8) выполняется, если одновременно выполнены эти неравенства, условие (6) и неравенство

$$n_{N+1} > \frac{(\ln H(m+1))\,(p-1)}{\ln p - 2m(p-1)\varepsilon(H)}. \tag{13}$$

В свою очередь, условие (6) следует из неравентва

$$(n_{N}+1)\ln\left(\frac{n_{N}+1}{e}\right) > \ln(H+1)$$

или, с учетом (12), из

$$n_{N+1} > \frac{\ln(H+1)}{\varepsilon(H)}. \tag{14}$$

Если считать, что $m(H) \leqslant H$, то неравенство (13) следует из (14).

Пусть теперь N выбрано так, что $N \geqslant N_0(H)$ и выполняются неравенства (14) и

$$n_{N} \leqslant \frac{\ln(H+1)}{\varepsilon(H)}. \tag{15}$$

Это можно сделать при $H \geqslant H_0(p)$. Тогда из (15) получаем заключение теоремы (4). $\square$

3. Заключение

Подобными, но существенно более громоздкими рассуждениями можно получить оценку многочлена от совокупности полиадических чисел. Отметим, что в отличие от архимедовского случая проще устанавливается, что значение многочлена в приближающей точке отлично от нуля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.

2. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами //Доклады Академии наук, математика, том 439, №6, с. 677-679, 2014.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, том 81, выпуск 2, с. 215-232, 2017.

4. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник, том 17, №3, с. 180-185, 2016.

5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, том 78, №6, с. 193-210, 2014.

6. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Матем. заметки, том 48, вып. 2, с. 123-127, 1990.

7. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета, Серия 1: Матемаика. Механика. №1, с. 59-61, 2015.

8. Чирский В. Г., Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика, том 27, №4, с. 150-157, 2015.

9. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. – Сер.1, матем.,механ., №3, с.93-95, 1994.

10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник, том 12, №4, с. 129-134, 2011.

11. Чирский В. Г. Чирский Полиадические оценки для F-рядов. // Чебышёвский сборник, т.13, вып.2, с. 131-136, 2012.

12. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260.

13. Крупицын Е. С., Чирский В. Г. Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел // Преподаватель XXI век, №4, с. 217-224, 2012.

14. Cijsouw P. L. Transcendence measures. Amsterdam: Acad. Proefschrift, 1972.

15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of yu.v. nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 153–171.

REFERENCES

1. Postnikov A. G. 1971, *Introduction to the analytic number theory.* Moscow.
2. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, vol. 90, no. 3, pp. 766-768.
3. Chirskii V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya Mathematics*, vol. 81, no. 2. pp. 444-461.
4. Chirskii V. G. 2016, "An approach to the transformation of periodic sequences", *Chebushevskii sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 180-185.
5. Chirskii V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya Mathematics*, no. 6, pp. 1244-1260.
6. Chirskii V. G. 1990, "On global relations", *Math. notes*, vol. 48, no. 2, pp. 123-127. 1990.
7. Chirskii V. G. 2015, "Arithmetic properties of Euler series", *Moscow University Mathematics Bulletein*, vol. 70, no. 1, pp. 41-43.
8. Chirskii V. G., Nesterenko A. Yu. 2017, "An approach to the transformation of periodic sequences", *Discrete Mathematics and Applications*, vol. 27. no. 1, pp. 1-6.
9. Chirskii V. G. 1994, "On series which are algebraically independent in all local fields", *Vestnik Mosc. Univ., Ser.1, math.-mech.* no. 3, pp. 93-95.
10. Chirskii V. G. 2011, "Estimates for linear forms and polynomials in polyadic numbers", *Tchebyshev. Sbornik*, vol. 12, no. 4, pp. 129-134.
11. Chirskii V. G. 2012, "Polyadic estimates for F-series", *Tchebyshev. Sbornik*, vol. 13, no. 2, pp. 131-136.
12. Bertrand D., Chirskii V. G.,& Yebbou Y. 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse* – vol. 13, no. 2, pp. 241-260.
13. Krupitsyn E. S., Chirskii V. G. 2012, "Estimates of polynomials in some polyadic numbers", *Prepodavatel' XXI century*, no. 4, pp. 217-224.
14. Cijsouw P. L. 1972, *Transcendence measures.* Amsterdam, Acad. Proefschrift.
15. Chirskii V. G. 2017, "Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

Получено 14.09.2017
Принято в печать 15.12.2017