З. И. Исмаилов, Нормальные граничные задачи для уравнения второго порядка с ограниченным операторным потенциалом,

Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 2018–2019

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

З. И. ИСМАИЛОВ

НОРМАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрим дифференциально-операторное выражение второго порядка вида

$$ly=-y''(t)+Q(t)y(t),\ a\leqslant t\leqslant b,\ -\infty<a<b<\infty, \tag{0.1}$$

где $Q(t)$ при каждом $t\in[a,b]$ является ограниченным нормальным оператором в H и оператор-функция $Q(t)$ сильно непрерывна на $[a,b]$.

Определение. Линейный замкнутый плотно определенный оператор C в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с областью определения $D(C)$ называется формально нормальным, если $D(C)\subseteq D(C^*)$ и $\|Cf\|_{\mathscr{H}}=\|C^*f\|_{\mathscr{H}}$ при любом $f\in D(C)$, и максимально формально нормальным, если он не имеет собственных таких расширений. Формально нормальный оператор называется нормальным, если $D(C)=D(C^*)$.

Теория нормальных расширений неограниченного формально нормального оператора в гильбертовом пространстве была основана и развита Э. А. Коддингтоном [1], Р. Х. Дэвисом [2] и др. Однако эта теория не была приспособлена к теории дифференциальных операторов (следует лишь отметить работу [3]).

Вместе с дифференциальным выражением (0.1) рассмотрим формально сопряженное к нему выражение

$$l^+v(t)=-v''(t)+Q^*(t)v(t). \tag{0.2}$$

Обычным образом строятся минимальный $L_0(L_0^+)$ и максимальный L (L^+) операторы, порожденные дифференциальным выражением (0.1) ((0.2)) в пространстве $L_2(H,(a,b))$ [4, с. 177].

Указывается, что минимальный оператор L_0 формально нормален, однако он не является максимальным.

В данной статье (в терминах граничных условий) описываются все нормальные граничные задачи для выражения (0.1), изучается структура их спектра, исследуется асимптотическое поведение s-чисел этой задачи и доказывается одно необходимое условие нормальности общих граничных задач.

1. Отметим, что если $u(t)\in D(L)$, то ее производная абсолютно непрерывна на $[a,b]$. Поэтому $u(t)$ и $u'(t)$ в концах интервала (a,b) имеют граничные значения в пространстве H.

Обозначим через $L_0^{'}$ и $L^{'}$ минимальный и максимальный операторы, порожденные выражением

$$l'y=-y''(t)+\operatorname{Re}Q(t)y(t) \tag{1.1}$$

в пространстве $L_2(H,(a,b))$ соответственно.

Поскольку $Q(t)$ при каждом $t\in[a,b]$ нормален, то для того, чтобы описать все нормальные расширения минимального оператора L_0 в терминах граничных условий, достаточно в терминах граничных условий описывать все самосопряженные расширения минимального оператора $L_0^{'}$.

Верна следующая

Теорема 1.1. *Каков бы ни был унитарный оператор W в $H\oplus H$, расширение L_W минимального оператора L_0, порожденное выражением (0.1) и краевым условием*

$$(W-E)Y+i(W+E)Y'=0, \tag{1.2}$$

где $Y=\{-y(a),y(b)\}$, $Y'=\{y'(a),y'(b)\}$, является нормальным расширением. Обратно, всякое нормальное расширение оператора L_0 порождается выражением (0.1) и краевым условием вида (1.2), в котором W в $H\oplus H$ однозначно определяется расширением.

Верен более общий факт.

Пусть A_0 — симметрический дифференциальный оператор с равными конечными и бесконечными индексами дефекта в гильбертовом пространстве $L_2(H,(a,b))$.

Рассмотрим оператор $N_0=A_0+Q$, где $A_0^*(\operatorname{Im}Q(t))=(\operatorname{Im}Q(t))A_0^*$, $t\in[a,b]$.

Можно доказать, что N_0 формально нормален, но он не максимален. Верна следующая общая

Теорема 1.2. *Нормальные расширения N формально нормального оператора N_0 и самосопряженные расширения A симметрического оператора A_0 описываются одними и теми же краевыми условиями.*

С той же схемой, что и в [4, с. 180], можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если* $\dim H = m < \infty$, *то спектр граничной задачи*

$$-y''(t) + Q(t)y(t) = \lambda y(t),$$
$$(W - E)Y + i(W + E)Y' = 0$$

дискретный и s-числа этой задачи, определяющей произвольное нормальное расширение L_W минимального оператора L_0, имеют асимптотику $s_n(L_W) \sim \pi^2 n^2 / (m^2 (b-a)^2)$.

В случае $\dim H = \infty$ минимальный оператор L_0 не имеет расширений с дискретным спектром.

2. Рассмотрим дифференциально-операторное выражение

$$ly = -y''(t) + Qy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad -\infty < a < b < \infty, \tag{2.1}$$

где Q — ограниченный оператор в H.

Отметим одно необходимое условие для существования нормальных расширений минимального оператора L_0 в $L_2(H, (a, b))$ для (2.1).

Теорема 2.1. *Если у минимального оператора L_0 существует по крайней мере одно нормальное расширение, то оператор Q нормален.*

Доказательство. Легко видеть, что $y(t) = (t-a)^n (b-t)^m f \in D(L_0)$, $n, m \geqslant 2$, $f \in H$.

Пусть $\tilde{L}$ — нормальное расширение L_0. Тогда из нормальности $\tilde{L}$ следует, что

$$\|\tilde{L} y(t)\|_{L_2(H,\,(a,b))} = \|\tilde{L}^* y(t)\|_{L_2(H,\,(a,b))}.$$

Отсюда легко вычислить, что $\|Qf\|_H = \|Q^* f\|_H$, т. е. Q нормален.

Замечание 2.1. Следует отметить, что у минимального оператора L_0 для (0.1) всегда существует нормальное расширение в $L_2(H, (a, b))$. Например, краевые условия $y(a) = y(b) = 0$ вместе с дифференциальным выражением (0.1) порождают нормальное расширение.

Замечание 2.2. Если $Q(t) = Q^*(t)$ при $t \in [a, b]$, то нормальные расширения совпадают с самосопряженными расширениями.

Автор выражает искреннюю благодарность М. Л. Горбачуку за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. Coddington E. A. // Mem. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 134. P. 1—80.

2. Davis R. H // Technical Report N 10. Department of Mathematics, University of California. Berkeley, Calif., 1955.

3. Кокебаев Б. К., Отаров Х. Т. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1985. № 5. С. 38—42.

4. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев, 1984.

Институт математики и механики АН Азербайджана

Поступила в редакцию 24 июня 1993 г.