В. А. Желудев, Представление остаточного члена аппроксимации и точные оценки для некоторых локальных сплайнов, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 54–65

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА АППРОКСИМАЦИИ И ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

В. А. Желудев

В настоящей статье изучаются локальные сплайны дефекта I на равномерной сетке с шагом α, аппроксимирующие функции и их производные произвольного порядка. А именно рассмотрены сплайны первой, третьей и пятой степеней, реализующие разный порядок аппроксимации $f^{(s)}$, в том числе сплайны, реализующие максимально возможные порядки $O(\alpha^2)$, $O(\alpha^4)$, $O(\alpha^6)$ соответственно при минимальном количестве задействованных сеточных значений функции f (так называемые сплайны минимального шаблона — СМШ). Кроме того, рассмотрены простейшие сплайны произвольной степени, точно воспроизводящие производные $p_{s+1}^{(s)}(t)$ многочленов степени $s+1$, а также СМШ произвольной степени r, точно воспроизводящие $p_r(t)$. В работе найдены явные выражения остаточных членов, возникающих при аппроксимации перечисленными выше сплайнами функций и их производных произвольного порядка. Полученные выражения позволяют найти точные оценки погрешности аппроксимации на соответствующих классах функций. Эти результаты базируются на установленных в работах [1, 2] асимптотических разложениях остаточных членов по степеням α, а также на одном из результатов работы [3].

§ 1. **Предварительные сведения.** Сведения, приводимые в этом параграфе, в основном почерпнуты из книги [4] и статей [1, 2]. Как обычно, C — пространство непрерывных на всей оси функций, $f \in C^s \Leftrightarrow f^{(s)} \in C$, $\overset{s}{L}_\infty$ — пространство функций, у которых $f^{(s)}$ ограничены. Если $f \in C$, то $\omega(f, \beta)$ — модуль непрерывности функции f. Обозначим $t_+ = 0{,}5\,(t + |t|)$, $N = [t/\alpha]$. Тогда $t = \alpha(N + \tau)$, $\tau \in [0, 1]$. Пусть $\theta = \tau(1 - \tau)$. Если f непрерывна, то $f_k = f(\alpha k)$, $f_k^p = f(\alpha(k + p/2))$. Символом $\overset{s}{\nabla}_\alpha$ будем обозначать нисходящую разность

$$\overset{s}{\nabla}_\alpha f(t) = \frac{1}{\alpha^s} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} f(t - \alpha k).$$

Обозначим

$$b_\alpha^m(t) = \nabla_\alpha^m (t_+^{m-1}/(m-1)!).$$

Это B-сплайн степени $(m-1)$ на равномерной сетке с шагом α. Отметим, что $b_\alpha^m(t)$ это сплайн дефекта I и обладает такими свойствами

$$b_\alpha^m(t) \geqslant 0 \qquad \operatorname{supp} b_\alpha^m(t) = (0, \ \alpha m), \qquad b_\alpha^m(t) = b_\alpha^m(\alpha m - t). \tag{1.1}$$

Если для вычисления значений сплайна на интервале между двумя узлами требуется знание сеточных данных лишь из некоторой окрестности этого интервала, то такой сплайн называют локальным.

Локальный сплайн дефекта I степени $(m-1)$ на равномерной сетке с шагом α, построенный по данным $\{f_\nu\}$, может быть записан следующим образом:

$$S^m(f, t) = \alpha \sum_{k=N-m+1}^{N} F_k^m b_\alpha^m (t - \alpha k),$$

где F_k^m — конечная линейная комбинация сеточных значений f_ν. Задание функционалов F_k^m определяет свойства сплайна. Производная сплайна степени $(m+s+1)$

$$S^{m+s}(f, t)^{(s)} = \alpha \sum_{k=N-m+1}^{N} \nabla_\alpha^s F_k^{m+s} b_\alpha^m (t - \alpha k), \tag{1.2}$$

это локальный сплайн степени $(m-1)$. Если для нахождения значения сплайна в данной точке t используются значения функции f в точках $\{t_\nu\}_{\nu_1}^{\nu_2}$, то множество $\{t_\nu\}_{\nu_1}^{\nu_2}$ будем называть шаблоном этого сплайна. Заметим, что коэффициенты в формуле (1.2) можно записать в форме

$$\nabla_\alpha^s F_k^{m+s} = \sum_{j=-p+s/2}^{p+s/2} \beta_j f_{k+m/2+j}, \quad \beta_j = (-1)^s \beta_{-j}. \tag{1.3}$$

где p — целое число, а индекс j пробегает целые или полуцелые значения, в зависимости от того, является ли s четным или нечетным числом.

Мы рассмотрим несколько типов локальных сплайнов.

1. Простейшие сплайны, аппроксимирующие $f^{(s)}$:

$$S_0^{m+s}(f, t)^{(s)} = \alpha \sum_{k=N-m+1}^{N} \nabla_\alpha^s f_k^{m+s} b_\alpha^m (t - \alpha k). \tag{1.4}$$

Эти сплайны точно воспроизводят $p_{1+s}^{(s)}(t)$, если $f_k = P_{1+s}(\alpha k)$, где P_r — многочлен степени r. Для $m > 2$, $f \in C^{s+2}$ справедлива формула

$$S_0^{m+s}(f, t)^{(s)} = f^{(s)}(t) + \alpha^2 \frac{m+s}{24} f^{(s+2)}(t) + \alpha^2 O(\omega(f^{(s+2)}, \alpha)). \tag{1.5}$$

Для линейных сплайнов ($m = 2$)

$$S_0^{2+s}(f, t)^{(s)} = f^{(s)}(t) + \frac{\alpha^2}{2} f^{(s+2)}(t)\left(\theta + \frac{s}{12}\right) + \alpha^2 O(\omega(f^{(s+2)}, \alpha)). \tag{1.6}$$

2. Кубические ($m = 4$) сплайны минимального шаблона (СМШ) точно воспроизводящие $P_{3+s}^{(s)}(t)$:

$$S_2^{4+s}(f, t)^{(s)} = \alpha \sum_{k=N-3}^{N} \nabla_\alpha^s \left(f_k^{4+s} - \alpha^2 \frac{4+s}{24} \nabla_\alpha^2 f_{k+1}^{1+s}\right) b_\alpha^4 (t - \alpha k). \tag{1.7}$$

Если $f \in C^{s+4}$, то

$$S_2^{4+s}(f, t)^{(s)} = f^{(s)}(t) - \frac{\alpha^4}{24} f^{(s+4)}(t)(\theta^2 + (5s^2 + 62s + 160)/240) + \\ + \alpha^4 O(\omega(f^{(s+4)}, \alpha)). \tag{1.8}$$

3. Сплайны пятой степени, точно воспроизводящие $P_{3+s}^{(s)}(t)$:

$$S_2^{6+s}(f, t) = \alpha \sum_{N-5}^{N} \nabla_\alpha^s \left(f_k^{6+s} - \alpha^2 \frac{6+s}{24} \nabla_\alpha^2 f_{k+1}^{6+s}\right) b_\alpha^6 (t - \alpha k). \tag{1.9}$$

Если $f \in C^{4+s}$, то

$$S_2^{6+s}(f, t)^{(s)} = f^{(s)}(t) - \alpha^4 \frac{(6+s)(5s+52)}{5760} f^{(4+s)}(t) + \alpha^4 O(\omega(f^{(4+s)}, \alpha)). \tag{1.10}$$

4. СМШ пятой степени, точно воспроизводящие $P_{5+s}^{(s)}(t)$:

$$S_4^{6+s}(f, t)^{(s)} = \alpha \sum_{k=N-5}^{N} \nabla_\alpha^s \left(f_k^{6+s} - \alpha^2 \frac{6+s}{24} \nabla_\alpha^2 f_{k+1}^{6+s} + \right. \\ \left. + \alpha^4 \frac{(6+s)(5s+52)}{5760} \nabla_\alpha^4 f_{k+2}^{6+s}\right) b_\alpha^6 (t - \alpha k). \tag{1.11}$$

Если $f \in C^{6+s}$, то

$$S_4^{6+s}(f, t)^{(s)} = f^{(s)}(t) + \alpha^6 \frac{f^{(6+s)}(t)}{720} \left[\Theta^2 \left(\Theta + \frac{1}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{35s^3 + 1092s^2 + 10852s + 33264}{4032}\right] + \alpha^6 O(\omega(f^{(6+s)}, \alpha)). \tag{1.12}$$

§ 2. Ядра Пеано. Пусть сплайн $S(f, t)^{(s)}$ точно воспроизводит $P_{n+s}^{(s)}(t)$ и шаблон сплайна содержится в $[a, b]$. Если $f \in L_\infty^{n+s+2}$, то

$$f(t) = P_{n+s}(t) + \frac{1}{(n+s)!} \int_a^b (t-u)_+^{n+s} f^{(n+s+1)}(u)\, du \Rightarrow \\ \Rightarrow P_{n+s}^{(s)}(t) = f^{(s)}(t) - \frac{1}{n!} \int_a^b (t-u)_+^n f^{(n+s+1)}(u)\, du.$$

Так как сплайн $S(f,\ t)^{(s)}$ точно воспроизводит $P_{n+s}^{(s)}(t)$, то

$$S(f,t)^{(s)} = P_{n+s}^{(s)}(t) + \frac{1}{(n+s)!}\int_a^b S((x-u)_+^{n+s}, t)^{(s)} f^{(n+s+1)}(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= f^{(s)}(t) - \int_a^b K_s^n(t,u) f^{(n+s+1)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

$$K_s^n(t,u) = \frac{1}{n!}(t-u)_+^n - \frac{1}{(n+s)!} S((x-u)_+^{n+s}, t) \tag{2.1}$$

— так называемое ядро Пеано.

$$R_s(t) = f^{(s)}(t) - S(f,t)^{(s)} = \int_a^b K_s^n(t,u) f^{(n+s+1)}(u)\,\mathrm{d}u. \tag{2.2}$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть для любой функции $f \in C^{s+r}$ имеет место представление*

$$S(f,\ t)^{(s)} = f^{(s)}(t) + \alpha^r \varphi(t) f^{(s+r)}(t) + \alpha^2 O(\omega(f^{(s+r)}, \alpha)), \tag{2.3}$$

где $\varphi(t)$ — какая-либо непрерывная функция. Тогда

1) *сплайн $S(f,\ t)^{(s)}$ точно воспроизводит $P_{s+r-1}^{(s)}(t)$;*

2) *если $K_s^{r-1}(t,\ u)$ ядро Пеано (2.1), то*

$$\int_a^b K_s^{r-1}(t,u)\,\mathrm{d}u = -\alpha^r \varphi(t) \tag{2.4}$$

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Согласно формуле (2.2)

$$S(f,t)^{(s)} = f^{(s)}(t) - \int_a^b K_s^{r-1}(t,u) f^{(s+r)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

Поэтому

$$\int_a^b K_s^{r-1}(t,u) f^{(s+r)}(u)\,\mathrm{d}u = -\alpha^r \varphi(t) f^{(s+r)}(t) + \alpha^r O(\omega(f^{(s+r)}, \alpha)).$$

Отсюда вытекает соотношение (2.4), если взять $f(t) = t^{s+r}$.

Следствие 2.1. *Пусть для любой функции $f \in C^{s+r}$ имеет место соотношение (2.3). Если ядро Пеано $K_s^n(t,\ u)$ сплайна $S(f,\ t)^{(s)}$ не меняет знак в своей области определения, то для остаточного члена аппроксимации функции $f^{(s)}$ справедливо представление*

$$R_s(t) = -\alpha^r \varphi(t) f^{(r+s)}(\xi), \qquad \xi \in [a,\ b]. \tag{2.5}$$

Изложение в последующих параграфах будет посвящено доказательству знакопостоянства ядер Пеано для сплайнов, перечисленных в пунктах 1—4.

Отметим еще, что согласно формуле (2.1) при $u > t$

$$K_s^n(t,u) = -\frac{1}{(n+s)!} S((x-u)_+^{n+s}, t)^{(s)}. \tag{2.6}$$

Если n нечетно, то нетрудно показать, что

$$K_s^n(t,u)=\frac{1}{n!}(u-t)_+^n-\frac{(-1)^s}{(n+s)!}S\left((u-x)_+^{n+s},t\right)^{(s)}, \qquad (2.7)$$

а при $t>u$

$$K_s^n(t,u)=\frac{(-1)^{s+1}}{(n+s)!}S\left((u-x)_+^{n+s},t\right)^{(s)}. \qquad (2.8)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2.2. *Пусть* $t=\alpha(N+\tau)$, $t'=\alpha(N+1-\tau)$, $u=\alpha(N+v)$, $u'=\alpha(N+1-v)$ *и* $S(f,t)^{(s)}$ — *локальный сплайн, точно воспроизводящий* $P_{n+s}^{(s)}(t)$, n — *нечетное число*, $K_s^n(t, u)$ — *ядро Пеано. Тогда*:

1) $K_s^n(t+\alpha M, u+\alpha M)=K_s^n(t, u)$ *для любого целого* M;

2) $K_s^n(t, u)=K_s^n(t', u')$.

Для доказательства нужно воспользоваться формулами (1.2) и (1.3).

Следствие 2.2. *Если в условиях леммы* 2.2 $K_s^n(t, u)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *при* $u\geqslant t$, *то* $K_s^n(t, u)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *во всей своей области определения.*

§ 3. Простейшие сплайны. Простейший сплайн степени $(m-1)$ аппроксимирующий $f^{(s)}$, задается формулой (1.4). Этот сплайн точно воспроизводит $P_{1+s}^{(s)}(t)$. При $u>t$

$$K_s^1(t,u)=\frac{-\alpha}{(1+s)!}\sum_{k=N-m+1}^{N}\nabla_\alpha^s\cdot\left(\alpha\left(k+\frac{m+s}{2}\right)-u\right)_+^{s+1}b_\alpha^m(t-\alpha k).$$

Но $\nabla_\alpha^s(z-u)_+^{s+1}=[(z-u)_+^{s+1}]_{z=\zeta}^{(s)}=(\zeta-u)_+\geqslant 0$. Так как $b_\alpha^m(t)\geqslant 0$ для всех t, то $K_s^1(t, u)\leqslant 0$ при $u>t$. Следствие 2.2 и формулы (1.5), (1.6) позволяют сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть* $f\in C^{2+s}$ и $S_0^{s+1}(f, t)^{(s)}$ — *простейший сплайн, заданный формулой* (1.4). *Тогда*

$$f^{(s)}(t)-S_0^{m+s}(f,t)^{(s)}=\begin{cases}-(\alpha^2(m+s))/24)f^{(s+2)}(\xi), & m>2,\\ -(\alpha^2/2)(\theta+s/12)/f^{(s+2)}(\xi), & m=2.\end{cases}$$

Если $t\in[\alpha N, \alpha(N+1)]$, *то* $\xi\in[\alpha(N+1-(m+s)/2), \alpha(N+(m+s)/2]$.

§ 4. Кубические сплайны минимального шаблона. СМШ третьей степени, точно воспроизводящие $P_{3+s}^{(s)}(t)$ задаются формулой (1.7). Рассмотрим сначала сплайн, аппроксимирующий f

$$S_2^1(f,t)=\alpha\sum_{k=N-3}^{N}\left(f_k^1-\frac{\alpha^2}{6}\nabla_\alpha^2 f_{k+1}^1\right)b_\alpha^4(t-\alpha k). \qquad (4.1)$$

Можно преобразовать этот сплайн к форме

$$S_2^4(f,t) = -\frac{1}{36}\sum_{i=-2}^{3} f_{N+i}Q_i(\tau), \tag{4.2}$$

$$Q_3(\tau) = \tau^3, \quad Q_2(\tau) = (1+\tau)^3 - 12\tau^3,$$
$$Q_1(\tau) = (2+\tau)^3 - 12(1+\tau)^3 + 39\tau^3,$$
$$Q_{-i}(\tau) = Q_{1+i}(1-\tau), \quad \tau = (1/\alpha)(t-\alpha N) \in [0, 1].$$

Нетрудно установить, что $Q_1(\tau) < 0$ при $\tau \in [0, 1]$. Так как сплайн точен на кубических многочленах, то при $u > t$, $u = \alpha(N+v)$

$$K_0^3(t,u) = -\frac{1}{6}S_2^4((x-u)_+^3, t) = \frac{\alpha^3}{216}\sum_{i=1}^{3}(i-v)_+^3 Q_i(\tau). \tag{4.3}$$

ЛЕММА 4.1. *Ядро Пеано* $K_0^3(t, u) \geqslant 0$ *в своей области определения.*

Доказательство. Предположим, что в какой-либо точке $M_0(t_0, u_0)$ $(t_0 \in [\alpha N, \alpha(N+1)]$, $u_0 \in [t_0, \alpha(N+3)]$, выполняются одновременно соотношения $K_0^3(M_0) = 0$, $K_0^3(M_0)_u' = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3}(i-v_0)_+^3 Q_i(\tau_0) = 0, \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(i-v_0)^2 Q_i(\tau_0) = 0. \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получим

$$(3-v_0)_+^2 Q_3(\tau_0) = (1-v_0)_+^2 Q_1(\tau_0),$$

что невозможно, так как $Q_3(\tau) > 0$, $Q_1(\tau) < 0$ при $\tau \in (0, 1]$. Поэтому, если существует M_0 такая, что $K_0^3(M_0) = 0$, то $K_0^3(M_0)_u' \neq 0$, и уравнение $K_0^3(t, u) = 0$ на всем интервале $(\alpha N, \alpha(N+1)]$ определяет неявную функцию $u(t)$. При этом, если при данном $t \in (\alpha N, \alpha(N+1))$, u переходит через значение $u(t)$, то $K_0^3(t, u)$ должна менять знак. В частности, при нашем предположении должна менять знак функция $\Phi(u) = K_0^3(\alpha(N+1), u)$ при $u \geqslant \alpha(N+1)$. Но

$$\Phi(u) = (\alpha^3/216)\,[(3-v)_+^3 - 4(2-v)_+^3] \geqslant 0$$

при $v \geqslant 1$. Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4.2. *Для СМШ* $S_2^{4+s}(f, t)^{(s)}$ *заданных формулой* (1.7), *ядро Пеано* $K_s^3(t, u) \geqslant 0$ *при всех натуральных* s.

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Предположим, что $K_r^3(t, u) \geqslant 0$ и покажем, что $K_{r+1}^3(t, u) \geqslant 0$. Согласно формуле (1.7)

$$S_2^{4+r+1}(f,t)^{(r+1)} = \alpha\sum_{k=N-3}^{N}\nabla_\alpha^2\Big(\nabla_\alpha f_{k+0,5}^{4+r} -$$

$$-\frac{\alpha^2(4+r)}{24}\nabla_\alpha^2\left(\nabla_\alpha f_{k+1,5}^{4+r}\right)\Big)b_\alpha^1(t-\alpha k)-$$

$$-\frac{\alpha^3}{24}\sum_{k=N-3}^{N}\nabla_\alpha^r\left(\nabla_\alpha^3 f_{k+1,5}^{4+r}\right)b_\alpha^4(t-\alpha k)=$$

$$=S_2^{4+r}\left(\nabla_\alpha f\left(x+\frac{\alpha}{2}\right),t\right)^{(r)}-\frac{\alpha^2}{24}S_0^{4+r}\left(\triangle_\alpha^3 f\left(x+\frac{3\alpha}{2}\right),t\right)^{(r)}.$$

Если $f\in L_\infty^{4+2}$, то в соответствии с формулой (2.2) и теоремой 3.1 имеем

$$S_2^{4+r+1}(f,t)^{(r+1)}=\nabla_\alpha f\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\int_a^b K_r^3(t,x)\nabla_\alpha f^{(4+r)}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)dx-$$

$$-\frac{\alpha^2}{24}\nabla_\alpha^3 f^{(r)}\left(t+\frac{3\alpha}{2}\right)-\frac{(4+r)\alpha^4}{576}\nabla_\alpha^3 f^{(s+2)}(\zeta).$$

При $u>t$

$$K_{r+1}^3(t,u)=-\frac{1}{(4+r)!}S_2^{4+r+1}\left((x-u)_+^{4+r},t\right)^{(r+1)}=$$

$$=-\frac{1}{24}\left(\nabla_\alpha\left(t-u+\frac{\alpha}{2}\right)_+^4-24\int_a^b K_r^3(t,x)\,b_\alpha^1\left(x-u+\frac{\alpha}{2}\right)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha^2}{24}\nabla_\alpha^3\left(t-u+\frac{3\alpha}{2}\right)_+^4-\frac{(4+r)\alpha^4}{48}b_\alpha^3(\zeta)\right).$$

Все слагаемые в скобках, кроме $\nabla_\alpha(t-u+\alpha/2)_+^4$, отрицательны. Если $u>t+\alpha/2$, то $\nabla_\alpha(t-u+\alpha/2)_+^4=0$ и, следовательно, $K_{r+1}^3(t,u)\geqslant 0$. При $t\leqslant u\leqslant t+\alpha/2$ рассмотрим разность

$$\nabla_\alpha\left(t-u+\frac{\alpha}{2}\right)_+^4-\frac{\alpha^2}{24}\nabla_\alpha^3\left(t-u+\frac{3\alpha}{2}\right)_+^4=\left|\begin{matrix}t-u=\alpha z\\ z\in[-0.5,0]\end{matrix}\right|=$$

$$=\alpha^3\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{24}\left[\left(z+\frac{3}{2}\right)^4-3\left(z+\frac{1}{2}\right)^4\right]\right)=$$

$$=\frac{\alpha^3}{24}\left[27\left(z+\frac{1}{2}\right)^4-\left(z+\frac{3}{2}\right)^4\right]<0,\quad z\in[-0{,}5,\ 0].$$

Поэтому и при $t\leqslant u\leqslant t+\alpha/2$ $K_{r+1}^3(t,u)\geqslant 0$.

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть* $f\in C^{4+s}$ *и* $S_2^{4+s}(f,t)^{(s)}$ — *СМШ третьей степени, определенный формулой* (1.7). *Тогда при любом натуральном* s

$$f^{(s)}(t)-S_2^{4+s}(f,t)^{(s)}=\frac{\alpha^4}{24}f^{(4+s)}(\xi)\left(\Theta^2+\frac{5s^2+62s+160}{240}\right).$$

Если $t\in[\alpha N,\ \alpha(N+1)]$, *то* $\xi\in[\alpha(N-2-s/2),\ \alpha(N+3+s/2)]$.

§ 5. Сплайны пятой степени, точно воспроизводящие $P_{3+s}^{(s)}(t)$.

Здесь речь пойдет о сплайнах $S_2^{6+s}(f,t)^{(s)}$, заданных формулой (1.9). Аналогично предыдущему параграфу можно доказать следующие предложения.

ЛЕММА 5.1. *Ядро Пеано сплайна* $S_2^6(f, t)$ $\tilde{K}_0^3(t, u) \geqslant 0$ *в своей области определения.*

ЛЕММА 5.2. *Для сплайнов пятой степени, заданных формулой* (1.9), *ядро Пеано* $\tilde{K}_s^3(t, u) \geqslant 0$ *в своей области определения при любом натуральном* s.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть* $f \in C^{s+4}$ *и* $S_2^{6+s}(f, t)^{(s)}$ — *сплайн пятой степени, заданный формулой* (1.9). *Тогда при любом натуральном* s

$$f^{(s)} - S_2^{6+s}(f, t)^{(s)} = \frac{\alpha^4(6+s)(5s+52)}{5760} f^{(4+s)}(\xi).$$

Если $t \in [\alpha N, \ \alpha(N+1)]$, *то* $\xi \in [\alpha(N-3-s/2), \ \alpha(N+4+s/2)]$.

§ 6. Сплайны пятой степени минимального шаблона. СМШ пятой степени, точно воспроизводящие $P_{5+s}^{(s)}(t)$ заданы формулой (1.11). Как и в § 4, рассмотрим сначала сплайн $S_4^6(f, t)$. Можно записать

$$S_4^6(f, t) = \frac{1}{2880} \sum\nolimits_{i=-4}^{4} f_{N+i} T_i(\tau). \tag{6.1}$$

Положим $a_0 = 9690$, $a_1 = -4680$, $a_2 = 1305$, $a_3 = -190$, $a_4 = 13$. Тогда

$$T_i(\tau) = \sum\nolimits_{k=0}^{4} a_k (\tau + k + 1 - i)_+^5, \quad T_{-i}(\tau) = T_{i+1}(1-\tau). \tag{6.2}$$

Отметим, что при $\tau \in [0, 1]$ $T_1(\tau)$, $T_4(\tau) > 0$, $T_5(\tau) \geqslant 0$, $T_3(\tau)$ меняет знак «+» на «—» при переходе через точку $\tau_3 \simeq 0{,}42$, $T_2(\tau)$ меняет знак «—» на «+» при переходе через $\tau_2 \simeq 0{,}74$. Таким образом,

$$T_1(\tau),\ T_4(\tau) > 0,\ T_5(\tau) \geqslant 0,\ T_2(\tau) < 0 \text{ при } \tau \in [0, \tau_2), \tag{6.3}$$

$$T_1(\tau),\ T_5(\tau),\ T_4(\tau) > 0,\ T_2(\tau) \geqslant 0,\ T_3(\tau) < 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_2, 1].$$

Так как сплайн $S_4^6(f, t)$ точен на многочленах пятой степени, то, полагая $u = \alpha(N + v)$, получаем при $u > t$ ядро Пеано

$$K_0^5(t, u) = -\frac{1}{120} S_4^6((x-u)_+^5, t) = -A\alpha^5 \sum\nolimits_{i=1}^{5} (i-v)_+^5 T_i(\tau),$$
$$A = 1/345600.$$

ЛЕММА 6.1. *Ядро Пеано* $K_0^5(t, u) \leqslant 0$ *в своей области определения.*

Доказательство. Покажем сначала, что $K_0^5(t, u) \leqslant 0$ при $\tau \in [0, \tau_2]$. Введем вспомогательную функцию

$$L(t, u) = -A\alpha^5 \sum\nolimits_{i=2}^{5} (i-v)_+^5 T_i(\tau) \geqslant K_0^5(t, u).$$

Предположим, что $L(t_0, u_0) = 0$, $L(t_0, u_0)'_u = 0$. Тогда

$$\sum\nolimits_{i=2}^{5} (i-v_0)_+^5 T_i(\tau_0) = 0, \quad \sum\nolimits_{i=2}^{5} (i-v_0)_+^4 T_i(\tau_0) = 0,$$
$$\tau_0 \in [0, \tau_2).$$

Отсюда получаем

$$2T_5(\tau_0)(5-v_0)_+^4+T_4(\tau_0)(4-v_0)_+^4=T_2(\tau_0)(2-v_0)_+^4,$$

что невозможно ввиду (6.3).

При $t=\alpha N$

$$L(\alpha N,\ u)=-A\alpha^5(13(4-v)_+^5+226(3-v)_+^5-1616(2-v)_+^5)\leqslant 0,$$

поэтому $L(t,\ u)\leqslant 0$ при $\tau\in[0,\ \tau_2)$, $u>t$ а, значит, в этой области и $K_0^5(t,\ u)\leqslant 0$.

Пусть теперь $\tau\in[\tau_2,\ 1]$. Положим

$$M(t,\ u)=-A\alpha^5\sum\nolimits_{i=3}^5(i-v)_+^5\ T_i(\tau)\geqslant K_0^5(t,\ u).$$

Так же как и выше, предполагаем, что $M(t,u)$ имеет кратный по u корень и приходим к соотношению

$$T_5(\tau_1)(5-v_1)_+^4=T_3(\tau_1)(3-v_1)_+^4,$$

которое не может иметь места. При $\tau=\tau_2$ $M(t,u)=L(t,u)\leqslant 0$, поэтому $M(t,u)\leqslant 0$ при $\tau\in[\tau_2,1]$, откуда следует $K_0^5(t,u)\leqslant 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. *Для СМШ* $S_4^{6+s}(f,\ t)^{(s)}$, *заданных формулой* (1.11), *ядро Пеано* $K_s^5(t,\ u)\leqslant 0$ *при всех натуральных* s.

Доказательство. Предположим, что $K_r^5(t,\ u)\leqslant 0$ и докажем, что $K_{r+1}^5(t,\ u)\leqslant 0$. Согласно формуле (1.11)

$$S_4^{6+r+1}(f,t)^{(r+1)}=\alpha\sum\nolimits_{k=N-5}^N\nabla_\alpha^{r+1}\left(f_k^{7+r}-\frac{\alpha^2(7+r)}{24}\right)\nabla_\alpha^2 f_{k+1}^{7+r}+$$

$$+\frac{\alpha^4(7+r)(5r+57)}{5760}\nabla_\alpha^4 f_{k+2}^{7+r}b_\alpha^6(t-\alpha k)=$$

$$=\alpha\sum\nolimits_{k=N-5}^N\nabla_\alpha^r\left(\nabla_\alpha f_{k+0.5}^{6+r}-\frac{\alpha^2(6+r)}{24}\right)\nabla_\alpha^2(\nabla_\alpha f_{k+1,5}^{6+r})+$$

$$+\frac{\alpha^4(6+r)(5r+52)}{5760}\nabla_\alpha^4(\nabla_\alpha(f_{k+2,5}^{6+r}))\,b_\alpha^6(t-\alpha k)-$$

$$-\frac{\alpha^3}{24}\sum\nolimits_{k=N-5}^N\nabla_\alpha^r\left(\nabla_\alpha^3 f_{k+1,5}^{6+r}-\frac{(6+r)\alpha^2}{24}\nabla_\alpha^2(\nabla_\alpha^3 f_{k+2,5}^{6+r})\right)b_\alpha^6(t-\alpha k)+$$

$$+\frac{3\alpha^5}{640}\sum\nolimits_{k=N-5}^N(\nabla_\alpha^2(\nabla_\alpha^5 f_{k+2,5}^{6+r})\,b_\alpha^6(t-\alpha k)=$$

$$=S_4^{6+r}\left(\nabla_\alpha f\left(x+\frac{\alpha}{2}\right),t\right)^{(r)}-\frac{\alpha^2}{24}S_2^{6+r}\left(\nabla_\alpha^3 f\left(x+\frac{3\alpha}{2}\right),t\right)^{(r)}+$$

$$+\frac{3\alpha^4}{640}S_0^{6+r}\left(\nabla_\alpha^5 f\left(x+\frac{5\alpha}{2}\right),t\right)^{(r)}.$$

Если $f \in L_\infty^{6+r}$, то в соответствии с формулой (2.2), теоремами 3.1 и 5.1

$$S_4^{6+r+1}(f,t)^{(r+1)} = \nabla_\alpha f^{(r)}\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) - \\ - \int_a^b K_r^5(t,x)\,\nabla_\alpha f^{(6+r)}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}x - \\ - \frac{\alpha^2}{24}\nabla_\alpha^3 f^{(r)}\left(t+\frac{3\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^6(6+r)(5r+52)}{138240}\nabla_\alpha^3 f^{(r+4)}(\xi) + \\ + \frac{3\alpha^4}{640}\nabla_\alpha^5 f^{(r)}\left(t+\frac{5\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^6}{5120}\nabla_\alpha^5 f^{(r+2)}(\eta).$$

При $u > t$

$$K_{r+1}^5(t,u) = -\frac{1}{(6+r)!}S_4^{6+r+1}((x-u)_+^{6+r},t)^{(r+1)} = \\ = -\frac{1}{120}\Big(N(t,u) + \Big\{-720\int_a^b K_r^5(t,x)\,b_\alpha^1\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}x + \\ + \frac{\alpha^6(6+r)(5r+52)}{384}b_\alpha^3(\xi) + \frac{3}{512}b_\alpha^5(\eta)\Big\},$$

$$N(t,u) = \nabla_\alpha\left(t-u+\frac{\alpha}{2}\right)_+^6 - \frac{\alpha^2}{24}\nabla_\alpha^3\left(t-u+\frac{3\alpha}{2}\right)_+^6 + \\ + \frac{3\alpha^4}{640}\nabla_\alpha^5\left(t-u+\frac{5\alpha}{2}\right)_+^6.$$

Так как по предположению $K_r^5(t,x) \leqslant 0$, группа слагаемых в фигурных скобках положительна. Рассмотрим функцию $N(t,u)$. При $u \geqslant t + 3\alpha/2$ $N(t,u) \geqslant 0$. Пусть $\alpha/2 \leqslant u - t \leqslant 3\alpha/2$. Обозначим $t - u = \alpha z$, $z \in [-3/2, -1/2]$.

$$N(t,u) = -\alpha^5\left(\frac{1}{24}\left(z+\frac{3}{2}\right)^6 - \frac{3}{640}\left[\left(z+\frac{5}{2}\right)^6 - \right.\right. \\ \left.\left. - 5\left(z+\frac{3}{2}\right)^6\right]\right) > 0.$$

Пусть теперь $0 \leqslant u - t \leqslant \alpha/2$, $z \in [-1/2, 0]$;

$$N(t,u) = \alpha^5\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^6 - \frac{1}{24}\left[\left(z+\frac{3}{2}\right)^6 - 3\left(z+\frac{1}{2}\right)^6\right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{640}\left[\left(z+\frac{5}{2}\right)^6 - 5\left(z+\frac{3}{2}\right)^6 + 10\left(z+\frac{1}{2}\right)^6\right]\right) = \\ = \frac{\alpha^5}{1920}\left[2250\left(z+\frac{1}{2}\right)^6 - 125\left(z+\frac{3}{2}\right)^6 + 9\left(z+\frac{5}{2}\right)^6\right] > 0.$$

Таким образом, $K_{r+1}^5(t,u) \leqslant 0$ при $t < u$, а следовательно, и во всей области определения. Лемма доказана.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть* $f \in C^{6+s}$ *и* $S_4^{6+s}(f,t)^{(s)}$ — *СМШ пятой степени, заданный формулой* (1.11). *Тогда при любом натуральном* s

$$f^{(s)}(t) - S_4^{6+s}(f,t)^{(s)} = -\frac{\alpha^6}{720}f^{(6+s)}(\xi)\left[\theta^2\left(\theta+\frac{1}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{35s^3 + 1092s^2 + 10852s + 33264}{4032}\right].$$

Если $t \in [\alpha N,\ \alpha(N+1)]$, *то* $\xi \in [\alpha(N-4-s/2),\ \alpha(N+5+s/2)]$.

§ 7. **Оценки остаточных членов.** Полученные выражения для остаточных членов аппроксимации позволяют без труда получить неулучшаемые в соответствующих классах функций оценки этих остаточных членов, как поточечные, так и интервальные. Пусть $t \in [\alpha N,\ \alpha(N+1)]$. Обозначим

$$\| f \|_{r,t} = \max | f(\xi) |, \quad \xi \in [\alpha(N-r+1),\ \alpha(N+r)].$$

Приведем некоторые из оценок, которые могут быть получены из результатов предыдущих параграфов.

1. Линейные сплайны:

$$| f^{(s)}(t) - S_0^{2+s}(f,t)^{(s)} | \leqslant \frac{\alpha^2}{2}\left(\theta + \frac{s}{12}\right) \| f^{(s+2)} \|_{1+s/2,\,t}.$$

2. Кубические СМШ:

$$| f^{(s)} - S_2^{4+s}(f,t)^{(s)} | \leqslant \frac{\alpha^4}{24}\left(\theta^2 + \frac{5s^2+62s+160}{240}\right) \| f^{(4+s)} \|_{3+s/2,\,t}.$$

3. СМШ пятой степени:

$$| f^{(s)}(t) - S_4^{6+s}(f,t)^{(s)} | \leqslant \frac{\alpha^6}{720}\left[\left(\theta + \frac{1}{2}\right)\theta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{35s^3 + 1092s^2 + 10852s + 33264}{4032}\right] \| f^{(6+s)} \|_{5+s/2,\,t}.$$

В частности, при $s = 0$

$$| f(t) - S_4^6(f,\ t) | \leqslant \beta\alpha^6 \| \nu^{(6+s)} \|_{5,\,t},$$

$$\beta = \frac{531}{46080} \simeq 1{,}15\cdot 10^{-2}.$$

Отметим, что для интерполяционного сплайна дефекта I с периодическими краевыми условиями соответствующая константа $\beta = 61/46080 \simeq 1{,}32\cdot 10^{-3}$ (см. [5]).

§ 8. **Заключительные замечания.** В статье Н. П. Корнейчука [3] приведено без доказательства следующее предложение, касающееся ядер Пеано $K(t,\ u)$ СМШ произвольной нечетной степени $2n-1$, точно воспроизводящих многочлены степени $2n-1$.

Предложение 8.1. *Ядра Пеано $K(t,\ u)$ не меняют знака в своей области определения.*

Леммы 4.1 и 6.1 являются частными случаями этого предложения. Но, так как автору неизвестно доказательство Н. П. Корнейчука, он счел возможным для полноты изложения привести собственный вариант доказательства этих лемм. В работе [2] содержится следующий результат.

Предложение 8.2. *Пусть $f \in C^{m+s}$. Тогда для СМШ произвольной степени $(m-1)$, точно воспроизводящих $P_{m-1+s}^{(s)}(t)$, справедливо представление*

$$S^{(m+s)}(f,\ t)^{(s)} = f^{(s)}(t) + \alpha^m f^{(s+m)}(t)\,\delta_{m,s}^m(\tau) +$$
$$+ \alpha^m O(\omega(f^{(s+m)},\ \alpha)), \qquad \delta_{m,s}^m(\tau) = -(\mathscr{B}_m(\tau)/m!) - \beta_m^{m+s},$$

$\mathscr{B}_m(\tau)$ — *многочлен Бернулли степени* m, *а* β_m^r — *константы, определяемые равенствами*

$$\left(\frac{2\arcsin v/2}{v}\right)^r = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{2l}^r v^{2l}, \qquad \beta_{2l+1}^r = 0.$$

Из предложений 8.1, 8.2 и следствия 2.1 вытекает утверждение, приведенное в заметке [2].

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть* $f \in C^{2n}$. *Тогда для СМШ* $S^{2n}(f, t)$ *произвольной нечетной степени* $(2n-1)$, *точно воспроизводящих многочлены той же степени,*

$$f(t) - S^{2n}(f, t) = \alpha^{2n} f^{(2n)}(\xi)\left(\frac{\mathscr{B}_{2n}(\tau)}{(2n)!} + \beta_{2n}^{2n}\right).$$

Если $t \in [\alpha N, \ \alpha(N+1)]$, *то* $\xi \in [\alpha(N - 2n + 2), \ \alpha(N + 2n - 1)]$, $\tau = t/\alpha - N \in [0, 1]$.

Вышеприведенные рассмотрения позволяют выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза. *Пусть* $f \in C^{2n+s}$. *Тогда для СМШ произвольной нечетной степени* $(2n-1)$, *точно воспроизводящих* $P_{2n-1+s}^{(s)}(t)$ *при любом натуральном* s

$$f^{(s)}(t) - S^{2n+s}(f, t)^{(s)} = \alpha^{2n} f^{(2n+s)}(\xi)\left(\frac{\mathscr{B}_{2n}(\tau)}{(2n)!} + \beta_{2n}^{2n+s}\right).$$

Если $t \in [\alpha N, \ \alpha(N+1)]$, *то* $\xi \in [\alpha(N - 2n + 2 - s/2), \ \alpha(N + 2n - 1 + s/2)]$.

Ленинградское высшее
военно-инженерное строительное
краснознаменное училище
им. ген. армии А. Н. Комаровского

Поступило
09.06.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Желудев В. А. Асимптотические формулы для локальной сплайн-аппроксимации на равномерной сетке // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 4. С. 797—802.
[2] Желудев В. А. Локальные квазиинтерполяционные сплайны и преобразования Фурье // ДАН СССР. 1985. Т. 282, № 6. С. 1293—1298.
[3] Корнейчук Н. П. О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. 1982. Т. 4, № 5. С. 617—621.
[4] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
[5] Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.