Ya. I. Belopol'skaya, Smooth diffusion measures and their transformations, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1999, Volume 260, 31–49

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

**Я. И. Белопольская**

# ГЛАДКИЕ ДИФФУЗИОННЫЕ МЕРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## 1. Введение

Вероятностный подход к изучению нелинейных уравнений математической физики часто позволяет глубже понять как природу и истоки самого уравнения, так и свойства решений различных задач для него. В этой работе мы опишем вероятностную интерпретацию хорошо известных в математической физике уравнений и систем (уравнения Бюргерса, Риккати, Штурма-Лиувилля и другие) и покажем, что такой подход позволяет естественным образом обобщить классические результаты. С другой стороны подходы, разработанные при изучении соответствующих задач математической физики и далекие, на первый взгляд, от теории случайных процессов подсказывают иногда ответы для естественных задач этой теории. В этой работе мы дадим вероятностное истолкование классического метода Дарбу, сформулированного при исследовании инвариантности задачи Штурма-Лиувилля по отношению к некоторому линейному преобразованию, и покажем что обобщение этого подход является эффективным при описании абсолютно непрерывных преобразований гладких мер.

Хорошо известно, что уравнение Бюргерса и уравнение Риккати – простейшие квазилинейные уравнения в частных производных допускают линеаризацию с помощью одной и той же подстановки. Мы покажем, что эта подстановка имеет естественную вероятностную интерпретацию. Эта интерпретация формулируется в терминах логарифмической производной распределения соответствующего диффузионного процесса, что, в свою очередь, позволяет обобщить известные результаты относительно решения задачи Коши для уравнения Бюргерса на более широкий класс параболических уравнений. Наряду с этим такой подход показывает, что соответствующие результаты слабо зависят от

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00719.

размерности фазового пространства и могут быть распространены на бесконечномерный случай.

Изучение связей между уравнениями Бюргерса, Риккати и линейными параболическими уравнениями мы продолжаем, анализируя классические результаты теории уравнений Штурма–Лиувилля. Заметим, что и в этом случае вероятностная интерпретация классических результатов позволяет получать их естественные обобщения.

Для того, чтобы пояснить вероятностную интерпретацию решения Хопфа для уравнения Бюргерса, мы показываем, что оно легко выражается в терминах логарифмической производной гладкой меры, порожденной некоторым диффузионным процессом. Прямое уравнение Колмогорова для этого процесса имеет вид уравнения теплопроводности. Аналогичные результаты справедливы и для произвольного диффузионного процесса [1, 2] , что позволяет получить обобщение ряда результатов, связанных с уравнением Бюргерса, на более широкий класс многомерных (и бесконечномерных) уравнений. Далее, если рассматриваемый диффузионный процесс обладает стационарным распределением, то его логарифмическая производная удовлетворяет соответствующему многомерному уравнению Риккати, коэффициенты которого определяются рассматриваемым процессом. При этом в некоторых случаях стационарное уравнение Бюргерса может быть получено дифференцированием уравнения Риккати по пространственным переменным.

Другой класс задач, который будет проанализирован с вероятностной точки зрения в этой работе, уходит корнями в теорию солитонов и может быть описан следующим образом.

В теории солитонов известна связь между уравнением Риккати и уравнением Штурма–Лиувилля (или уравнением Шредингера). Мы проведем вероятностный анализ этой связи и укажем на следствия этой новой интерпретации известных фактов.

При изучении задачи на собственные значения для двух стационарных уравнений Шредингера с разными потенциалами можно указать связь между потенциалами , обеспечивающую совпадение собственных значений. Эта связь назвается преобразованием Дарбу. Мы построим нестационарный аналог метода Дарбу и приведем его вероятностную интерпретацию, что позволит обобщить класс рассматриваемых уравнений.

В заключение отметим, что в этой работе даются лишь первые ответы на поставленные вопросы. Предлагаемый здесь путь, как мы полагаем, может привести к ответу и на другие вопросы, среди которых попытки сведения вычисления континуальных интегралов к вычислению средних по мерам в конечномерных пространствах, построение представления основного состояния для широкого класса диффузионных процессов. Любопытным представляется также построение вероятностной интерпретации различных уравнений теории солитонов таких как уравнение Кортевега-де Фриза, Кадомцева - Петвиашвили и других.

## 2. Уравнения Бюргерса, Риккати, Штурма–Лиувилля и их вероятностная интерпретация

В этой главе мы соберем воедино классические результаты, касающиеся связей между одномерным (по пространственной переменной) уравнением Бюргерса, а также уравнениями Риккати и Штурма–Лиувилля и рассмотрим их вероятностную интерпретацию. При этом исходным объектами для нас будут диффузионные процессы и их распределения и именно они будут источниками информации о решении соответствующих уравнений в частных производных.

Пусть $(\Omega, F, P)$ – вероятностное пространство, на котором задан скалярный винеровский процесс $w(t)$ и пусть $F_t$ обозначает фильтрацию порожденную винеровским процессом.

Рассмотрим простейший диффузионный процесс вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \sigma w(t), \tag{2.1}$$

где $\sigma$ некоторый скаляр и $\xi_0 \in R^1$ – $F_0$-измеримая случайная величина с гладким распределением $\nu(dy) = P\{\xi_0 \in dy\}$. Прямое уравнение Колмогорова для переходной вероятности $\mu(t, dy) = P\{\xi(t) \in dy | \xi(0) = \xi_0\}$ имеет вид уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}, \quad \mu_0(dy) = \nu(dy) \tag{2.2}$$

Такой же вид имеет уравнение для плотности $\mu(t, y)$ меры $\mu(t, dy)$ относительно меры Лебега.

Поскольку решение $\mu(t, y)$ задачи Коши (2.2) представляет собой гладкую функцию, то нетрудно вывести из него уравнение для логарифмической производной $\rho_\mu(t,y) = \dfrac{1}{\mu(t,dy)}\dfrac{\partial\mu(t,dy)}{\partial y}$ или (обозначаемой тем же символом) логарифмической производной ее плотности $\mu(t,y)$ относительно меры Лебега. Несложные вычисления показывают при этом , что функция

$$u(t,y) = -\sigma^2\rho_\mu(t,y), \quad t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(0,y) = u_0(y). \tag{2.4}$$

Используя явное выражение для решения задачи (2.2) и формулу (2.3), нетрудно вычислить явное выражение для функции $u(t,y)$ и проверить, что оно совпадает ц решением задачи (2.4), полученным Хопфом в его знаменитой работе [3].

Уравнение (2.4) называется уравнением Бюргерса и привлекает в последние годы повышенное внимание многих исследователей [4–7]. Отметим, что аналогичные рассуждения применимы и к переходной вероятности произвольного диффузионного процесса, полученного как решение стохастического уравнения (смотри, например, [2, 8]).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности с потенциалом

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y^2} + p(y)\mu_1, \mu_1(0,y) = \mu_{10}(y). \tag{2.5}$$

Тогда соответствующее уравнение Бюргерса имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{2.6}$$

При этом решение $u_1(t,y)$ задачи Коши для (2.6) с данными Коши $u_{10}(y)$ и функция $\mu_1(t,y)$ удовлетворяющая (2.5) по-прежнему связаны соотношением (2.3), если $u_{10}(y) = -\sigma^2\rho_{\mu_0}(y)$.

Рассмотрим далее уравнение Риккати

$$u' + u^2 + q(y)u + p(y) = 0 \tag{2.7}$$

и отметим, что оно также допускает линеаризацию с помощью подстановки (2.3). Выбирая $u(y) = -\sigma^2\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}$, нетрудно проверить,

что соответствующее линейное уравнение имеет вид
$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\phi(y)}{\partial y^2}+\frac{\sigma^2}{2}q(y)\frac{\partial\phi(y)}{\partial y}+\frac{1}{\sigma^2}p(y)\phi(y)=0. \qquad (2.8)$$
Сравнивая уравнение (2.8) и
$$\frac{\partial\phi(t,y)}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\phi(t,y)}{\partial y^2}-a\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\phi \qquad (2.9)$$
можно заметить, что если $q(y)=\dfrac{2a}{\sigma^2}$, $p(y)=\sigma^2\dfrac{\partial a}{\partial y}$ и решение $\phi(t,y)$ уравнения (2.9) при $t\to\infty$ сходится к функции $\hat{\phi}(y)$, то $\hat{\phi}(y)$ удовлетворяет (2.8).

Вероятностная интерпретация подстановки (2.3) (подстановки Коула–Хопфа) указывает прямой путь для построения возможных многомерных (и бесконечномерных) обобщений приведенных выше конструкций как для уравнения Бюргерса, так и для уравнения Риккати. Однако, в многомерном случае на этом пути возникают новые ограничения. В частности, проведенный выше анализ годится лишь для решения задачи Коши с потенциальными начальными данными, поскольку (2.3) должно выполняться для всех $t\geqslant 0$.

Перед тем, как завершить обсуждение уравнений Бюргерса и Риккати, отметим еще один вариант возможных обобщений этих уравнений (смотри также [7, 9, 10]).

Предположим, что
$$v(t,y)=\frac{u(t,y)}{\alpha(y)}=-\frac{\sigma^2}{\alpha(y)\mu(t,y)}\frac{\partial\mu(t,y)}{\partial y}. \qquad (2.10)$$

Как нетрудно проверить, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\alpha(y)$ – строго положительная (строго отрицательная) ограниченная дифференцируемая функция и $\mu(t,dy)$ – распределение случайного процесса $\xi(t)$ заданного соотношением (2.1) и условием $\xi(0)=\xi_0$, где $\xi_0$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина с гладким распределением $\nu(dy)$. Тогда функция $v(t,y)$ вида (2.10) является единственным решением задачи Коши для обобщенного уравнения Бюргерса*
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\alpha(y)v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\sigma^2\beta(y)\frac{\partial v}{\partial y}-\gamma(y)v, \qquad (2.11)$$

*где* $\beta(y) = \frac{\alpha'(y)}{\alpha(y)}$ *и* $\gamma(y) = -\frac{\sigma^2}{2}[\beta'(y) - \beta^2(y) + 2\beta^3(y)]$*, а* $v(0, y) = (\alpha(y))^{-1}\rho_\nu(y)$.

Если же рассмотреть уравнение Риккати вида

$$z'(y) + \alpha(y)z^2(y) + M(y)z(y) + N(y) = 0,$$

то для него подстановка

$$z(y) = -\frac{1}{\alpha(y)\mu(y)}\frac{\partial\mu(y)}{\partial y}$$

приводит к линейному уравнению вида

$$\mu'' + [M(y) - \beta(y)]\mu' + N(y)\alpha(y)\mu = 0. \tag{2.12}$$

При этом диффузионный процесс $\xi(t)$, генератор которого определяется левой частью (2.12), можно сконструировать как решение стохастического уравнения

$$d\xi = [M(\xi(t)) - \beta(\xi(t))]dt + dw.$$

Далее, используя описанные выше соображения, можно вывести соответствующее ему уравнение Бюргерса.

Для того, чтобы завершить обзор и вероятностный анализ интересующих нас одномерных результатов опишем связи, существующие между уравнениями Риккати, Штурма–Лиувилля и линейными параболическими уравнениями.

Здесь мы снова ограничимся простейшим случаем.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} + c(y)\mu + f(y),$$
$$\mu(t, 0) = \mu(t, 1) = 0, \mu(0, y) = \mu_0(y) \tag{2.13}$$

и представим ее решение в виде

$$\mu(t, y) = \nu(y) + v(t, y). \tag{2.14}$$

Нетрудно проверить, что при этом $v(t, y)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c(y)v$$
$$v(t, 0) = v(t, 1) = 0, \quad v(0, y) = \mu_0(y) - \nu(y). \tag{2.15}$$

Для того, чтобы функция $\mu(t,y)$ сходилась к $\nu(y)$ при $t\to\infty$ необходимо, чтобы $v(t,y)\to 0$ при $t\to\infty$. Представим решение $v(t,y)$ задачи (2.15) в виде

$$v(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{\lambda_k t}v_k(y), \tag{2.16}$$

где $\lambda_k$ и $v_k(y)$ определяются задачей Штурма–Лиувилля

$$\lambda_k v_k - v_k'' - c(y)v_k = 0, \quad v_k(0)=v_k(1)=0.$$

Очевидно, что если все $\lambda_k$, в (2.16), отрицательны, то $v(t,y)\to 0$ при $t\to\infty$, что влечет за собой сходимость $u(t,y)\to u(y)$ при $t\to\infty$. Отрицательность показателей $\lambda_k$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $u(t,y)\to u(y)$ для любых $f(x)$ и, следовательно, это условие позволяет гарантировать положительность $u(y)$ при условии, что $u(t,y)\geqslant 0$.

Рассмотрим семейство параболических уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c(y,\alpha)v \tag{2.17}$$

Решение $v(t,y,\alpha)$ задачи (2.17) (с теми же краевыми условиями, что и в (2.15)) будем искать в виде

$$v(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{\lambda_k t}v_k(y,\alpha), \tag{2.18}$$

где $\lambda_k$, вообще говоря, могут зависеть от $\alpha$. Естественным образом возникает вопрос можно ли выбрать $c(y,\alpha)$ так, чтобы $\lambda_k$ в (2.18) не зависели от $\alpha$. Переформулируем этот вопрос в терминах уравнения, которому подчиняются функции $v_k(y,\alpha)$ из (2.18). Тогда он должен звучать так. Существуют ли функции $c(y,\alpha)$ в уравнении Штурма–Лиувилля

$$v''=[\lambda+c(y,\alpha)]v, \tag{2.19}$$

для которых $\lambda$ не зависит от $\alpha$. Простейший проимер дается случаем $c(y,\alpha)=c(y+\alpha)$. Другими словами, если $c(y,\alpha)$ удовлетворяет уравнению $c'_\alpha(y,\alpha)-c'_y(y,\alpha)=0$, то $\lambda$ в (2.19) не зависит от $\alpha$. При этом существуют и другие интересные случаи, для нахождения которых разработаны различные методы. Мы опишем их более подробно в другой работе, а здесь остановимся на более простом классическом варианте соответствующем случаю, когда $\alpha = 1, 2$ и $c(y,1) = u(y), c(y,2) = v(y)$.

Рассмотрим пару уравнений Штурма–Лиувилля

$$y'' = [\lambda + u(x)]y \tag{2.20}$$

и

$$z'' = [\lambda + v(x)]z \qquad (2.21).$$

Метод Дарбу указывает как должны быть связаны между собой потенциалы $v(x)$ и $u(x)$ в (2.20) и (2.21), для того, чтобы оба уравнения выполнялись при одном и том же $\lambda$. В рамках этого метода (смотри [11, 12] ) решение уравнения (2.21) ищется в виде

$$z = A(x,\lambda)y + B(x,\lambda)y', \tag{2.22}$$

где $y$ удовлетворяет (2.20), а коэффициенты $A(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ должны быть выбраны специальным образом. Заметим, что, как нетрудно проверить, они должны быть отличны от нуля.

Положим $B(x,\lambda) = 1$ . Подставляя (2.21), (2.22) в (2.20) и приравнивая нулю коэффициенты при $y$ и $y'$, получаем соотношения

$$A_{xx} + u_x + A(u - v) = 0, \tag{2.23}$$

$$2A_x + u - v = 0. \tag{2.24}$$

Наконец, из (2.23) и (2.24) вытекает

$$A_{xx} - 2AA_x - u' = 0. \tag{2.25}$$

Соотношение (2.25) представляет собой стационарное уравнение Бюргерса. Интегрируя его, мы выведем уравнение Риккати

$$A^2 - A_x - u = \bar{\lambda},$$

где $\bar{\lambda}$ – постоянная интегрирования.

Напомним опять, что уравнение Риккати с помощью подстановки $A = -\frac{\theta'}{\theta}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\theta'' = (\bar{\lambda} + u(x))\theta. \tag{2.26}$$

Таким образом $\theta$ представляет собой частное решение уравнения (2.21), соответствующее $\lambda = \bar{\lambda}$. Из (2.25) следует, что $v = u - 2(ln\theta)''$ и уравнение для $z$ имеет вид

$$z'' = [\lambda + u - 2(ln\theta)'']z.$$

Таким образом, новый потенциал отличается от старого на величину

$$\delta u = -2(ln\theta)'' = 2[\frac{\theta''}{\theta} - [\frac{\theta'}{\theta}]^2].$$

Как следствие, мы получаем

$$z'' = (\lambda - \bar{\lambda} + \theta[\frac{1}{\theta}]'')z. \qquad (2.27)$$

Заметим, что если $\lambda = \bar{\lambda}$, то решение уравнения (2.27) имеет вид $z = (\frac{1}{\theta})$.

В заключение этой главы заметим, что соотношение (2.22) допускает естественную переформулировку в терминах логарифмической производной гладкой меры. Как следствие, мы получим ответ на вопрос о том как написать выражение для производной Радона–Никодима гладких мер, удовлетворяющих уравнениям Штурма–Лиувилля. Помимо этого мы получим выражение для плотности мер, удовлетворяющих уравнениям теплопроводности с разными потенциалами.

Напомним также, что важность преобразования Дарбу определяется тем, что имея одно уравнение, которое удается решить, мы получаем другое уравнение такого же типа, решение которого также заданы в явном виде в силу (2.22).

## 3. Многомерные аналоги уравнений Бюргерса, Риккати и метода Дарбу

В этой главе мы изучим многомерные аналоги уравнений и задач, приведенных в предыдущей главе. Некоторые из рассматриваемых здесь обобщений достаточно просты, однако ряд из них, насколько нам известно, до сих пор не рассматривался и не обсуждался в литературе. Предлагаемый подход существенно базируется на вероятностной интерпретации всех рассматриваемых задач, поэтому мы начнем изложение с описания класса рассматриваемых здесь диффузионных процессов и их мультипликативных функционалов. Вслед за этим мы выведем уравнения для векторных логарифмических производных распределений как самих процессов, так и мер, получаемых с помощью мультипликативных функционалов этих процессов и обсудим их связь с задачами параграфа 2.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, на котором задан винеровский процесс $w(t) \in R^n$ и пусть $\mathcal{F}_t$ обозначает порожденную им фильтрацию. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi = a(\xi(t))dt + A(\xi(t))dw, \tag{3.1}$$

коэффициенты $a(x) \in R^n, A(x) \in R^n \otimes R^n$ которого достаточно гладкие детерминированные функции роста не выше линейного. Тогда, в силу классических результатов теории стохастических уравнений, существует единственный $\mathcal{F}_t$-измеримый диффузионный случайный процесс $\xi(t) \in R^n$, удовлетворяющий дополнительному условию $\xi(0) = \xi_0 \in R^n$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\xi_0$ – $F_0$ – измеримая случайная величина с гладким распределением $P\{\xi_0 \in dy\} = \nu(dy)$.

Напомним, что для гладкой меры $\mu(dy)$, на евклидовом пространстве $(X, \mathcal{B}_X)$ векторная логарифмическая производная $\rho_\mu(y)$, $y \in X$ по направлению векторного поля $h(y) \in X$ задается соотношением

$$\frac{\nabla_h \mu(dy)}{\mu(dy)} = (h(y), \rho_\mu(y)) + \operatorname{div} h(y),$$

где $(,)$ обозначает скалярное произведение в $R^n$.

Общий вид уравнения, которому подчиняется векторная логарифмическая производная $\rho_\mu(y)$ переходной вероятности решения $\xi(t)$ стохастического уравнения (3.1), можно найти в [1, 2]. Ниже нам понадобится явный вид этого уравнения при $A(y) = \sigma I$ , где $I$ – тождественное отображение в $R^n$, и $a(y) \in R^)$ отличном от нуля. В этом случае логарифмическая производная $\rho_\mu$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr} A^* \rho_\mu'' A + (K\rho_\mu, \nabla)\rho_\mu -$$
$$-\nabla a \rho_\mu - (a, \rho_\mu)\rho_\mu - \nabla \operatorname{div} a, \quad \rho_\mu(0, y) = \lambda_{\mu_0}(y). \tag{3.2}$$

При этом обобщенное уравнение Бюргерса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u = \frac{1}{2}\mathrm{Tr} A^* u'' A + (a, K^{-1}u)u + K\nabla \operatorname{div} a + K\nabla a K^{-1} u \tag{3.3}$$

Если, кроме того, $\operatorname{div} a = 0$, то (3.3) упрощается и приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u = \frac{1}{2}\mathrm{Tr} A^* u'' A + (a, K^{-1}u)u + K\nabla a K^{-1} u. \tag{3.4}$$

Как следует из результатов теории Малявена [13], если $\nu(dy) = P\{\xi_0 \in dy\}$ – гладкая мера и коэффициенты $A(y), a(y)$ удовлетворяют условиям Малявена, то мера $\mu(t, dy) = \mu(t, y)dy$ также является гладкой мерой, обладающей векторной логарифмической производной $\rho_\mu(t, y)$. При этом векторное поле

$$u(t, y) = -K(y)\rho_\mu(t, y), \quad K(y) = A^*(y)A(y) \tag{3.5}$$

подчиняется обобщенному уравнению Бюргерса. В частном случае $A(y) = A$, $a(y) = 0$ функцию $u(t, y)$ вида (3.5) можно явно вычислить

$$u(t, y) = \frac{\int\limits_{R^n} \frac{y-x}{t} \exp[\frac{-(K^{-1}(x-y), x-y)}{2t}]\nu(x)dx}{\int\limits_{R^n} \exp[\frac{-(K^{-1}(x-y), x-y)}{2t}]\nu(x)dx} \tag{3.6}$$

в предположении, что $\nu(dy) = \nu(y)dy$ – гладкая мера в $R^n$, имеющая гладкую плотность $\nu(y)$ относительно меры Лебега $dy$ и $u_0(y) = -K\frac{\nabla\nu(y)}{\nu(y)}$, то есть начальное векторное поле потенциально.

Многомерное обобщение уравнения Риккати, естественное с точки зрения описанной в предыдущем параграфе интерпретации, имеет вид

$$\frac{\sigma^2}{2} \operatorname{div} v = \frac{1}{2}(v, v) + (p, v) + q, \tag{3.7}$$

где $q$ – скалярная, а $p$ – векторная функция. При этом подстановка (2.3) линеаризует (3.7), приводя его к линейному уравнению вида

$$\frac{\sigma^2}{2}\Delta\phi - (p(y), \nabla\phi) + \frac{1}{\sigma^2}q(y)\phi = 0, \tag{3.8}$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа. В предположении $\operatorname{div} p = 0$ соответствующее стационарное уравнение Бюргерса имеет вид

$$\frac{\sigma^2}{2}\Delta u - (u, \nabla u) - \nabla q - (\nabla p, u) - (p, \nabla u) = 0$$

и его можно вывести, вычисляя градиент левой и правой части уравнения (3.7).

В заключение этой главы мы опишем многомерный аналог метода Дарбу, приведем его вероятностную интерпретацию и обсудим его параболический вариант.

В ограниченной области $G \subset R^n$ с гладкой границей $\Gamma$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mu + c(y)\mu + f(y) \tag{3.10}$$

и пусть $\mu(t, y)$ – решение уравнения (3.10), удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$\mu(t, y) = 0, \quad y \in \Gamma, \quad \mu(0, y) = \nu(y), \quad y \in G. \tag{3.11}$$

Для простоты в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением задачи с периодическими граничными условиями. Полагая

$$\mu(t, y) = \mu_0(y) + v(t, y), \tag{3.12}$$

нетрудно проверить, что $v(t, y)$ должно удовлетворять следующей начально-краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta v + c(y)v$$

$$v(t, y) = 0, y \in \Gamma, \quad v(0, y) = \mu_0(y) - \nu(y). \tag{3.13}$$

Для того, чтобы $\mu(t, y)$ сходилось к $\mu_0(y)$ при $t \to \infty$ необходимо, чтобы $v(t, y) \to 0$ при $t \to \infty$. Построим решение (3.13) вида

$$v(t, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t} v_k(y). \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.13) получим уравнение

$$\lambda_k v_k - \Delta v_k - c(y)v_k = 0, \quad v_k(y) = 0, \quad y \in \Gamma. \tag{3.15}$$

Для того, чтобы $u(t, y) \to u(y)$ при $t \to \infty$ необходимо, чтобы все $\lambda_k$ в представлении (3.14) решения задачи (3.15) были неположительны. Отметим, что при этом $v(t, y) \to 0$ при $t \to \infty$. Сформулируем результат, который обобщает рассмотрения предыдущего параграфа.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\mu(dy)$ и $\nu(dy)$ гладкие меры в $(R^n, \Sigma_{R^n})$, удовлетворяющие эллиптическим уравнениям вида*

$$\Delta\mu = [\lambda + u(y)]\mu, \tag{3.16}$$

$$\Delta\nu = [\lambda + v(y)]\nu. \tag{3.17}$$

*Пусть $v(y) - u(y) = Q(y) + (q, \nabla Q(y))$, где $Q(y)$ гладкая скалярная функция удовлетворяющая соотношению $\nabla_i Q - q_i[Q^2 + u] = C_i$, $i = 1, \ldots, n$, $C_i = const$, а $q \in R^n$ – постоянное векторное поле. Тогда мера $\nu(dy)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu(dy)$ и производная Радона–Никодима имеет вид*

$$\frac{\nu(dy)}{\mu(dy)} = Q(y) + (q, \rho_\mu(y)), \tag{3.18}$$

**Доказательство.** Рассуждения при доказательстве этого утверждения вполне аналогичны тем, что были проведены в предыдущем параграфе. Подставляя

$$\nu(dy) = Q(y)\mu(y) + (q, \nabla\mu(dy)) \tag{3.19}$$

и (3.17) в (3.16) и приравнивая нулю коэффициенты при $\mu$ и $\nabla\mu$, получим соотношения

$$\Delta Q + (q, \nabla u) + Q(u - v) = 0, \tag{3.20}$$

$$2(q, \nabla Q) + u - v = 0, \tag{3.21}$$

из которых вытекает равенство

$$\Delta Q - 2Q(q, \nabla Q) + (q, \nabla u) = 0. \tag{3.22}$$

Заметим, что из (3.22) следует

$$\mathrm{div}(\nabla Q - q[Q^2 - u]) = 0.$$

Таким образом, достаточно выбрать $Q$, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_i Q - q_i Q^2 + u = \bar{\lambda}_i,$$

где $\bar{\lambda}_i$ – константы, чтобы доказать абсолютную непрерывность мер $\mu$ и $\nu$, удовлетворяющих соответственно (3.16) и (3.17), если потенциал в (3.17) имеет вид $v(y) = 2(q, \nabla Q(y)) + u(y)$. Выражение для производной Радона–Никодима непосредственно вытекает из (3.19).

В заключение заметим, что полученные результаты могут быть использованы для того, чтобы в ряде случаев свести вычисление континуальных интегралов в формуле Фейнмана–Каца к вычислению интегралов по мерам в конечномерных пространствах.

## 4. Гладкие меры и формула Фейнмана–Каца

В этой главе мы распространим метод Дарбу на параболические задачи, используя их вероятностную интерпретацию. Полученные при этом результаты позволят указать на некоторый класс потенциалов, для которых можно вычислить производную Радона–Никодима двух гладких мер, заданных с помощью формулы Фейнмана–Каца. Другими словами будет указан класс мультипликативных функционалов от марковских процессов для которых удается свести вычисление производной Радона–Никодима мер, порождаемых ими в фазовом пространстве процесса к вычислению конечномерных интегралов.

Вначале мы вновь вернемся к общей постановке задачи.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t) \in R^n$, являющийся сильным решением стохастического уравнения

$$d\xi = a(\xi(t))dt + A(\xi(t))dw, \xi(0) = \xi_0 \in R^n. \tag{4.1}$$

В этой работе всюду мы предполагаем, что коэффициенты этого уравнения неслучайны и удовлетворяют условиям классической теоремы о существовании и единственности решения СДУ, а распределение $\mu(0, dy) = P\{\xi_(0) \in dy\}$ случайной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi(0) = \xi_0$ – гладкая мера в $R^n$.

Процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий (4.1), обладает марковским свойством и его генератор имеет вид

$$M = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} K^{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - a_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Обозначим $M^*$ оператор, сопряженный с $M$

$$\int\limits_{R^n} Mf(y)\mu(dy) = \int\limits_{R^n} f(y)M^*\mu(dy).$$

При этом переходная вероятность $\mu_t(dy) = P\{\xi(t) \in dy | \xi(0) = \xi_0\}$ процесса $\xi(t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = M^*(t)\mu. \tag{4.2}$$

Пусть

$$\eta_i(t) = e^{\int\limits_0^t v_i(s, \xi(s))ds}, \; i = 1, 2$$

– пара скалярных мультипликативных функционалов от марковского процесса $\xi(t)$.

Пусть далее $\mu_i(t, dy) = \mu_i(t, y)dy$ – пара мер, плотности $\mu_i(t, y)$ которых относительно меры Лебега удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} = M^*(t)\mu_i + v_i(t, y)\mu_i, \quad \mu_i(0, y) = \mu_0^i(y). \tag{4.3}$$

Пусть меры $\mu_0^i(dy) = \mu_0^i(y)dy$ абсолютно непрерывны друг относительно друга. Используя формулу Фейнмана–Каца

$$\mu_i(t, y) = E[\exp\{\int\limits_0^t v_i(\tau, \xi(\tau)d\tau\}\mu_0^i(\xi(t))],$$

нетрудно видеть, что меры $\mu_1(t, dy)$ и $\mu_2(t, dy)$, плотности которых удовлетворяют (4.3) также абсолютно непрерывны друг относительно друга. К сожалению, формула Фейнмана–Каца не позволяет вычислить производную Радона–Никодима для рассматриваемой пары мер. Мы приведем здесь подход, позволяющий вычислить плотность таких мер.

Рассмотрим вначале общую ситуацию. Пусть мера $\nu(t, dy)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu(t, dy)$. Обозначим через $f(t, y)$ соответствующую производную Радона–Никодима $f(t, y) = \frac{\nu(t, dy)}{\mu(t, dy)}$. Заметим, что если $\nu(t, y)$ и $\mu(t, y)$ плотности соответствующих мер относительно меры Лебега, то $f(t, y) = \frac{\nu(t, y)}{\mu(t, y)}$. Из приведенных соотношений легко выразить логарифмическую производную функции $f(t, y)$ в терминах векторных логарифмических производных $\rho_\nu(t, y)$, $\rho_\mu(t, y)$ мер $\mu(t, dy)$ и $\nu(t, dy)$

$$\frac{\nabla f(t, y)}{f(t, y)} = \rho_\nu(t, y) - \rho_\mu(t, y).$$

Пусть далее мера $\mu(t, dy)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial\mu(t, dy)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mu(t, dy) + u(t, y)\mu(t, dy), \quad \mu(0, dy) = \mu_0(y). \tag{4.4}$$

Тогда, как нетрудно проверить, векторная логарифмическая производная $\rho_\mu(t, y)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial\rho_\mu}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta\rho_\mu + \sigma^2(\rho_\mu, \nabla\rho_\mu) + \nabla u, \rho_\mu(0, y) = \frac{\nabla\mu_0(dy)}{\mu_0(dy)}. \tag{4.5}$$

Пусть далее $\nu(t, dy)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial\nu(t, dy)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta\nu(t, dy) + v(t, y)\nu(t, dy). \tag{4.6}$$

Как уже упоминалось выше, эти меры абсолютно непрерывны друг относительно друга и, следовательно, существует измеримая функция $f(t, y)$ такая, что $\nu(t, dy) = f(t, y)\mu(t, dy)$. Выведем уравнение, которому при этом должна удовлетворять функция $f(t, y)$, вычисляя производные

$$\frac{\partial\nu(t, dy)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t}\mu(t, dy) + \frac{\partial\mu(t, dy)}{\partial t}f(t, y),$$

а также оператор Лапласа по пространственной переменной

$$\Delta\nu(t, dy) = [\Delta f(t, y) + 2(\nabla f(t, y), \rho_\mu(t, y)) + f(t, y)\Delta\mu(t, dy).$$

Подставляя полученные выражения в (4.6) и учитывая (4.5), получим цоотношения, которым должна удовлетворять функция $f(t, y)$

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta f(t, y) + \sigma^2(\nabla f(t, y), \rho_\mu(t, y)) + (v - u)f \tag{4.6}$$

и

$$f(0, y) = f_0(y) = \frac{\nu(0, dy)}{\mu(0, dy)}. \tag{4.7}$$

Далее, пусть $u(t, y) - v(t, y) = \kappa(t, y)$ и логарифмическая производная меры $\mu$ известна, тогда плотность $f(t, y)$ может быть представлена в виде

$$f(t, y) = E[f_0(\gamma(t)) \exp[\int_0^t \kappa(s, \gamma(s))ds], \tag{4.8}$$

где $\gamma(t)$ – диффузионный процесс, удовлетворяющий стохастическому уравнению

$$d\gamma(s) = \rho_\mu(t-s, \gamma(s))ds + \sigma dw(s), \gamma(0) = y \tag{4.9}$$

Во многих задачах представляет интерес возможность сведения функционального интеграла, учавствующего в представлении функции $f(t,y)$ к вычислению интеграла по мере в фазовом пространстве некоторого конечномерного случчайного процесса. Ниже мы рассмотрим некоторые случаи, в которых подобное сведение оказывается возможным.

Приведем один подход к решению этой задачи, представляющий собой обобщение метода Дарбу.

Будем искать решение уравнения (4.6) в виде

$$\nu(t, dy) = Q(t,y)\mu(t,dy) + (q(t,y), \nabla\mu(t,dy)) \tag{4.10}$$

или, используя логарифмическую производную меры $\mu(t,dy)$, в виде

$$\nu(t,dy) = [Q(t,y) + (q(t,y), \rho_\mu(t,y))]\mu(t,dy)). \tag{4.11}$$

Заметим, что если мы найдем выражение для скалярной функции $Q(t,y)$ и векторного поля $q(t,y)$ такие, что мера $\nu(t,dy)$ вида (4.10) будет удовлетворять (4.6), то выражение в квадратных скобках в правой части (4.11) будет равно производной Радона–Никодима $f(t,y)$ меры $\nu(t,dy)$ относительно меры $\mu(t,dy)$.

Выведем соотношения, которым должны подчиняться скалярная функция $Q(t,y)$ и векторное поле $q(t,y)$ для того, чтобы (4.11) задавало решение уравнения (4.6). Подставив (4.10) в (4.6) мы получим одно уравнение с двумя неизвестными функциями что позволяет выбрать постоянный вектор $q(t,x) = q$. При этом из (4.6), (4.11) и выбора $q = \mathrm{const}$ вытекает, что должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta Q + Q(u-v) + \nabla_q u = 0,$$

$$\sigma^2 \nabla Q + [u-v]q = 0.$$

Таким образом, $u - v = -\alpha\nabla_q Q$, где $\alpha = \sigma^2(q,q)^{-1}$ и, наконец,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta Q - \alpha Q\nabla_q Q + \nabla_q u. \tag{4.12}$$

Задача Коши для квазилинейного уравнения (4.12) с начальными данными $Q(0,x) = Q_0(x)$ в свою очередь допускает сведение к стохастической задаче

$$d\zeta(\tau) = \alpha Q(t-\tau, \zeta(\tau))d\tau + \sigma dw(\tau)$$

$$Q(t,x) = E[Q_0(\zeta(t)) + \int_0^t \nabla_q u(t-\tau, \zeta(\tau))d\tau]$$

При этом отметим, что мы добились того, что функциональный интеграл в формуле Фейнмана–Каца сведен к интегралу по мере в конечномерном пространстве, поскольку в силу (4.6), (4.7) мы имеем

$$\nu(t,y) = E\nu_0(\xi(t)) \exp^{\int_0^t v(t-\tau,\xi(\tau))d\tau} = [Q(t,y) + (q, \lambda_\mu(t,y))]\mu(t,y).$$

Напомним, что здесь $q$ – постоянный вектор, а $Q(t,y)$ в свою очередь задается соотношением

$$Q(t,y) = \int_{R^n} Q_0(z)\phi_x(t,dz) + \int_0^t \nabla_q u(t-\tau, z)\psi_y(\tau, dz),$$

где

$$\psi_y(t,dz) = P\{\zeta(t) \in dz | \zeta(0) = y\}.$$

Наконец, желаемый результат будет достигнут, если мы найдем класс потенциалов $u(y)$ для которых $\mu(t,y)$ можно представить в виде интеграла по некоторой мере в $R^n$. Отметим при этом , что мы можем выбрать в качестве затравочного потенциала константу $u(t,y) = u = \mathrm{const}$. Как следствие, мы получим требуемое представление для потенциала $v(t,y) = u - \alpha\nabla_q Q(t,y)$. В качестве другого затравочного потенциала мы можем , например, выбрать потенциал, для которого можно построить представление основного состояния [12].

## Литература


2. Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская, *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия*. Киев, Выща школа (1989).
2. Я. И. Белопольская, *Гладкие меры и нелинейные уравнения математической физики*. Проблемы математического анализа, **15** (1995), 70–83.
3. E. Hopf, *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., **3** (1950), 201–230.

4. A. Truman, H. Zhao, *On stochastic diffusion equations and stochastic Burgers equations.* J. Math. Phys., **37** (1996), 283–307.
5. Ya. Sinai, *Asymptotic behavior of solutions of ID-Burgers equation with quasiperiodic forcing.* Topological methods in Nonlinear analysis J. Shauder Center, **11** (1998), 219–226.
6. Ya. Belopolskaya, *Burgers equation on a Hilbert manifold and the motion of incompressible fluid.* Methods of Functional Analysis and Topology (1999).
7. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем с помощью марковских случайных процессов.* Изв. ВУЗ Математика, **12** (1978), 6–17.
8. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи.* М., Мир (1987).
9. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов.* М., Мир (1983).
10. F. Calogero, *Note on the Riccati equation.* J . Math. Phys., **4**, No. 3 (1963), 427–430.
11. Ya. Belopolskaya, *Invariant measures of diffusion processes in Hilbert spaces.* Abstracts of Commmunications of 7th Vilnius Conf. on Prob. Theory and Math. Stat. (1998), 146–147.
12. Ya. Belopolskaya, *Invariant measures of diffusion processes in Hilbert spaces and Hilbert manifolds.* Proceedings of Vilnius Conference (1999).

Belopol'skaya Ya. I. Smooth diffusion measures and their transformations.

We study absolutely continuous transformations of smooth diffusion measures and describe the generalized Darboux transformation. Besides we reveal the connections between some quasilinear classicl equations like Burgers or Riccati equations and their generalizations with equations which govern logarithmic derivatives of smooth diffusion measures. The results derived here combined with the ground state representation could be applied to compute functional integrals.

СПбГАСУ

Поступило 20 сентября 1999 г.