Ю.В.Нетрусов

ОЦЕНКИ ЕМКОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ПРОСТРАНСТВАМИ БЕСОВА

Введение

Работа посвящена изучению емкостей множеств A, $A \subset R^n$, в пространствах Бесова $BL^{\omega}_{p,\theta}$, и в этом смысле она является непосредственным продолжением работ [5], [6] автора, при этом основное внимание уделяется множествам нулевой емкости. В работе получены (в некотором смысле неулучшаемые) оценки снизу емкости множества A в пространстве Бесова через свойства множества A, формулируемые в терминах покрытий (характеристики типа φ-вместимости по Хаусдорфу).

Кратко остановимся на содержании работы. В первом разделе мы напоминаем определения пространств Бесова (заметим, что в отличие от работ [1-4] мы рассматриваем пространство Бесова не как подпространство обобщенных функций Шварца, а как подпространство L_p, что является существенным при $p<1$), емкости множеств в этих пространствах и функции множества $h_{\varphi,\theta}$ (введенной в [5], [6]), близкой по своим свойствам к φ-вместимости по Хаусдорфу (совпадающей с ней при $\theta=1$), а также вводим ряд обозначений, которые потребуются нам в дальнейшем.

Центральное место в работе занимает второй раздел, в котором мы приводим формулировки основных результатов работы. В теореме I и предложении I получены некоторые оценки емкостей множеств в пространствах $BL^{\omega}_{p,\infty}$, $0<p\leqslant 1$, в частности, получена оценка (в некотором смысле неулучшаемая) снизу емкости в пространстве $BL^{\ell}_{p,\infty}$, $0<p\leqslant 1$, $0<\ell p\leqslant n$ через величину $h_{\omega,\infty}$ (интересной, по мнению автора, особенностью этого результата является появление последовательности $\{\varkappa_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\varkappa_0=1$, $\varkappa_{n+1}=2^{\varkappa_n}$, $n\in N_0$). Теорема 2 является основным результатом работы. Из нее, в частности, следует эквивалентность емкости в пространстве $BL^{\ell}_{p,\theta}$ и величины $h_{n-\ell p,\,\theta/p}$ при $\theta<1$ (ранее подобная эквивалентность была установлена автором только при $p\leqslant 1$ (смотри [5,6])). В предложении 2 дано обобщение теоремы 2 на случай нестепенной гладкости. В предложении 3 показано, что при $0<u,\ v\leqslant 1$, $0<p,\ \theta<\infty$ в отличие от случая $1\leqslant u\neq v\leqslant\infty$, $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ (смотри предложе-

© Ю. В. Нетрусов, 1992

ние 2) емкости в пространствах Бесова $BL^{\ell}_{p,u,\theta}$ и $BL^{\ell}_{p,v,\theta}$ (построенных по пространствам Лоренца $L_{p,u}$ и $L_{p,v}$ соответственно) эквивалентны. В теореме 3 и предложении 4 (приведенном без доказательства) дается решение задачи Адамса ([2, 3]) о классификации множеств нулевой емкости в пространствах $BL^{\ell}_{p,\theta}$, $0<\ell p<n$ (в случае $\ell p=n$ эта задача была решена ранее, независимо друг от друга, Адамсом ($1\leqslant p<\infty$) и автором ($0<p<\infty$) в работах [3-5]).

В разделе 3 приводится доказательство основных результатов работы. При этом подробные доказательства иногда отсутствуют и мы ограничиваемся только формулировками вспомогательных утверждений и набросками их доказательств. Построению примеров множеств, показывающих точность сформулированных здесь результатов, автор надеется посвятить отдельную работу

I. Определения и основные обозначения

Всюду в дальнейшем: $0<p,\ q<\infty$, $0<\theta,\ \sigma\leqslant\infty$, n - размерность пространства R^n, μ_n - мера Лебега в R^n, $supp$ - носитель, $\|f\|_p$ - квазинорма (норма при $p\geqslant 1$) в пространстве L_p;

$L_{p,\theta}$ - пространство Лоренца, то есть множество функций f, для которых величина

$$\|f\|_{p,\theta}=\left(\int_0^{+\infty}(f^*(t)t^{1/p})^{\theta}\,dt/t\right)^{1/\theta}$$

конечна, где f^* - неубывающая перестановка функции $|f|$;

ω, ω_1 - строго возрастающие непрерывные функции одной переменной, определенные на $[0,\infty)$, такие, что $\omega(0)=\omega_1(0)=0$, $\omega(1)=\omega_1(1)=1$ и $\omega(t)\geqslant c_1\omega(2t)$, $\omega_1(t)\geqslant c_2\omega_1(2t)$; здесь и далее $c, c_1, c_2, \ldots$ - некоторые положительные постоянные, зависящие от параметров, фиксированных в рамках того или иного утверждения; $\omega(t)\in S$ ($\omega(t)\in S_M$, $M>0$) означает существование постоянных $\varepsilon>0$ и $C>0$ таких, что функция $\omega(t)/t^{\varepsilon}$ ($t^{M-\varepsilon}/\omega(t)$) C - возрастает; Ω_n - класс строго возрастающих непрерывных функций φ одной переменной таких, что $\varphi(0)=0$ и функция $t^n/\varphi(t)$ - возрастает; далее считаем, что $\omega,\omega_1\in S$; $a\asymp b$ означает, что $c_1\leqslant a/b\leqslant c_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть $m\in N$, $\omega(t)\in S_m$, $0<p<\infty$, $0<u$, $\theta\leqslant\infty$. Тогда будем говорить, что функция $f, f\in L_{p,u}$,

принадлежит пространству $BL^{\omega}_{p,u,\theta}$, если конечна величина

$$\|f\|_{p,u}+\left(\int_0^1(\omega^m_{p,u}(f,t)/\omega(t))^{\theta}\,dt/t\right)^{1/\theta},$$

где

$$\omega^m_{p,u}(t)=\sup_{|z|<t}\left\|\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+2}C^j_m f(x+jz)\right\|_{p,u}.$$

В случае $\omega(t)=t^{\ell}$ или $u=p$ мы будем писать $BL^{\ell}_{p,u,\theta}$ и $BL^{\omega}_{p,\theta}$ вместо того, чтобы писать $BL^{t^{\ell}}_{p,u,\theta}$ и $BL^{\omega}_{p,p,\theta}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $A\subset R^n$. Емкостью $\overline{cap}$ в пространстве $BL^{\omega}_{p,u,\theta}$ мы будем называть величину

$$\overline{cap}(A,BL^{\omega}_{p,u,\theta})=\inf\|g\|^p_{BL},$$

где инфимум берется по всем открытым множествам G, $A\subset G$ и функциям g, $g\in BL^{\omega}_{p,u,\theta}$ таким, что $g(x)\geqslant 1$ почти всюду в G. $\mathcal{E}(BL^{\omega}_{p,u,\theta})$ – класс компактных подмножеств R^n, имеющих нулевую емкость в пространстве $BL^{\omega}_{p,u,\theta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\varphi\in\Omega_n$, $0<\theta\leqslant\infty$, $A\subset R^n$. Тогда через $h_{\varphi,\theta}(A)$ обозначим величину

$$\inf\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_j}\varphi(r_i)\Big)^{\theta}\right)^{1/\theta},$$

$$I_j=\{i\in N_0\,|\,\lambda_{j+1}<r_i\leqslant\lambda_j\},\ j\in N_0,$$

где инфимум берется по всем покрытиям множества $A\subset R^n$ счетным числом шаров $D(x_i,r_i)$ (здесь и ниже $D(x,a)$ – шар с центром в точке $x\in R^n$ и радиусом $a>0$), $i\in N_0$, $0<r_i\leqslant 1$, а последовательность $\{\lambda_j\}_{j=0}^{+\infty}$ определяется соотношениями

$$\lambda_0=1,\quad \lambda_{j+1}=\max\{2^{-u}\,|\,\varphi(2^{-u})\leqslant\varphi(\lambda_j)/2,$$
$$2^{-un}/\varphi(2^{-u})\leqslant\lambda_j^n/(2\varphi(\lambda_j)),\ u\in N\}.$$

$\mathcal{E}_{\varphi,\theta}$ – класс компактов K, $K\subset R^n$ таких, что $h_{\varphi,\theta}(K)=0$. В случае, если $\varphi(t)=t^{\alpha}$, $0<\alpha<n$, мы будем писать $\mathcal{E}_{\alpha,\theta}$ и $h_{\alpha,\theta}$ вместо $\mathcal{E}_{t^{\alpha},\theta}$ и $h_{t^{\alpha},\theta}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $A\subset R^n$, $0<\theta\leqslant\infty$. Тогда через $h^*_{\omega,\theta}(A)$ обозначим величину

$$\inf\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}(m(j)\,\omega(2^{-j}))^{\theta}\Big)^{1/\theta},$$

где инфимум берется по всем покрытиям множества A счетным числом шаров $D(x_i, r_i)$, $r_i = 2^{-t(i)}$, $t(i)\in N_0$, $i\in N_0$, а $m(j)$ – число шаров из этого покрытия, радиус которых равен 2^{-j}.

В заключение этого раздела введем еще одно обозначение. Пусть $0<p<\infty$, ψ – непрерывная возрастающая функция, определенная на $[0,\infty)$, $\psi(0)=0$, последовательность $\{\varkappa_n\}_{n=0}^{+\infty}$ определена соотношениями $\varkappa_0=1$, $\varkappa_{n+1}=2^{\varkappa_n}$, $n\in N_0$. Тогда через $\ell_\psi, M_p, \ell_p^{\varkappa}, M_p^{\varkappa}$ будем обозначать множество числовых последовательностей $\{a_i\}_{i=0}^{+\infty}$ таких, что величины

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\psi(|a_i|),\qquad \sup_{i\in N_0}\big(a_i^*(\ln(2+i))^p\big),$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(a^*_{\varkappa(i)})^p,\qquad \sup_{i\in N_0}\big(a^*_{\varkappa(i)}(\ln(2+i))^p\big),$$

соответственно, конечны. Здесь $\{a_i^*\}_{i=0}^{+\infty}$ – неубывающая перестановка последовательности $\{|a_i|\}_{i=0}^{\infty}$. Положим также $M_0 = M_0^{\varkappa} = \ell_\infty$.

2. Основные результаты

В работе автора [5] было установлено, что емкость в пространстве $BL^{\ell}_{p,\theta}$, $0<p\le 1$, $0<\theta<\infty$, $0<\ell<n/p$, эквивалентна величине $h_{n-\ell p,\theta/p}$. Там же было установлено, что при $\theta=\infty$ этот результат становится неверным (оценка $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,\infty})\le c_1 h_{n-\ell p,\infty}(A)$ остается справедливой, однако оценка $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,\infty})\ge c_2 h_{n-\ell p,\infty}(A)$ перестает быть справедливой).

Поэтому возникает естественный вопрос: при каких условиях на функцию φ, $\varphi\in\Omega_n$, имеет место оценка $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,\infty})\ge c_3 h_{\varphi,\infty}(A)$? Ответ на этот вопрос (при некоторых ограничениях на φ) и некоторые другие близкие к нему содержится в приводимой ниже теореме.

ТЕОРЕМА I. Пусть $0<q<p\le 1$, $0<u, v\le\infty$, $0<\ell p<n$, и выполнено одно из следующих двух условий: i) $p<1$ или ii) $u\le 1$. Тогда:

а) Если $\varphi \in \Omega_n$, $\gamma(t) = \varphi(t)\, t^{\ell p - n}$ и функция $\gamma(t)$ почти возрастает на отрезке (0,I), то следующие утверждения равносильны.

I) Справедлива оценка $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,u,\infty}) \geqslant c_1 h_{\varphi,\infty}(A)$, $A \subset R^n$.

2) $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,u,\infty}) \subset \mathcal{E}_{\varphi,\infty}$

3) Последовательность $\{\gamma(2^{-i})\}_{i=0}^{+\infty}$ принадлежит $\ell^{\varkappa}_{1/p}$.

в) Если функция $\gamma(t) = t^{\ell p}/(\omega(t))^q$ почти возрастает на отрезке (0,I), то следующие утверждения равносильны:

I) Имеет место неравенство

$$\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,u,\infty}) \geqslant c_2 \overline{cap}(A, BL^{\omega}_{q,v,\infty}), \quad A \subset R^n.$$

2) $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,u,\infty}) \subset \mathcal{E}(BL^{\omega}_{q,v,\infty})$.

3) Последовательность $\{\gamma(2^{-i})\}_{i=0}^{+\infty}$ принадлежит $\ell^{\varkappa}_{1/(p-q)}$.

с) Если функция $\gamma(t) = (t^{\ell}/\omega(t))$ почти возрастает на отрезке (0,I), $v < u$, то следующие утверждения равносильны:

I) Имеет место неравенство

$$\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,u,\infty}) \geqslant c_3 \overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,v,\infty}), \quad A \subset R^n.$$

2) $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,u,\infty}) \subset \mathcal{E}(BL^{\omega}_{p,v,\infty})$.

3) Последовательность $\{\gamma(2^{-i})\}_{i=0}^{+\infty}$ принадлежит $M^{\varkappa}_{r}$, $r = 1/v - 1/u$.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ I. I) Имликация I) $\Leftarrow$ 3) в утверждениях а),в),с) теоремы сохраняет силу и без условия возрастания функции $\gamma(t)$.

2) Утверждение пункта в) останется справедливым, если условие $\ell p < n$ заменить на $\ell p = n$.

Утверждение теоремы I (возможно, при некоторых ограничениях на параметры) допускает обобщение на нестепенную функцию гладкости. Мы ограничимся здесь только следующим результатом, обобщающим пункт а) теоремы I (аналогичное обобщение имеет место и для пункта в)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\varphi_1 \in \Omega_n$, $0 < p \leqslant 1$, $0 < u \leqslant \infty$; $\omega(t) \geqslant t^{n/p}$, $t \in [0,1]$;

$$1/\varphi(t) = 1 + \int_t^1 (\omega(u))^p / u^n du/u \ ,$$

причем интеграл, стоящий справа, расходится (то есть $\varphi(0) = 0$), функция $\gamma(t) = \varphi_1(t)/\varphi(t)$ почти возрастает на отрезке (0,I) и выполнено одно из следующих двух условий: i) $p < 1$ или ii) $u \leqslant 1$. Тогда следующие три условия равносильны.

I) Имеет место неравенство

$$\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\infty}) \geqslant ch_{\varphi_1,\infty}(A) \ , \quad A \subset R^n \ .$$

2) $\mathcal{E}(BL^{\omega}_{p,u,\infty}) \subset \mathcal{E}_{\varphi_1,\infty}$.

3) Последовательность $\{\gamma(2^{-i})\}_{i=0}^{+\infty}$ принадлежит $\ell^{\infty}_{1/p}$.

Следующая теорема (по мнению автора) является наиболее важным результатом работы. В ней устанавливается эквивалентность емкостей в пространствах Бесова с величинами типа $h_{\beta,\theta}$ (ранее подобная связь в другом случае была установлена в работе автора [5]). Кроме того, эта теорема, результаты работы [5] вкупе с тем фактом, что $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,1}) \neq \mathcal{E}_{n-\ell p,1/p}$, $1 < p < \infty$, $0 < \ell p < n$, (смотри пункт в) предложения 2, сформулированного ниже) позволяют завершить решение задачи классификации емкостей в пространствах Бесова-Лебега (со степенной функцией гладкости), поставленной Д.Р.Адамсом в работе [2] .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < \ell < n/p$. Тогда величина $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,1,1})$ (как функция множества A) эквивалентна величине $h_{n-\ell p,1/p}$.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < u \leqslant \infty$, $0 < \ell p < n$, $0 < \theta < 1$. Тогда величина $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,u,\theta})$ (как функция множества A) эквивалентна величине $h_{n-\ell p,\theta/p}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ 2. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \ell p < n$. Тогда можно показать, что $\mathcal{E}(B^{\ell}_{p,1}) \neq \mathcal{E}_{n-\ell p,1/p}$. Однако имеет место следующий результат:

Пусть $h(t)$ - непрерывная неубывающая функция, определенная на $[0,\infty)$, такая, что

$$h(0) = 0, \ \int_0^1 (h(t))^{p'} dt/t < \infty \ , \quad 1/p + 1/p' = 1 \ ;$$

(в частности, можно взять $h(t) \sim (|\ln(t)|)^{-\varepsilon - 1/p'}$ при $t \to 0$,

$\varepsilon > 0$); $\varphi(t) = t^{1/p} h(t)$. Тогда для любого множества A , $A \subset R^n$, такого, что $\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,1}) \leqslant 1$, существует покрытие $A \subset \cup Q_{i,k}$ $((i,k) \in \Gamma$, $\Gamma \subset N_0 \times Z^n)$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varphi(m_i 2^{i(\ell p - n)}) \leqslant c(\overline{cap}(A, B^{\ell}_{p,1}))^{1/p} .$$

Здесь через m_i обозначено количество ячеек семейства $\{Q_{i,k}\}_{(i,k)\in\Gamma}$ с длиной ребра 2^{-i}, $Q_{i,k} = 2^{-i}([0,1)^n + k)$.

Обобщению теоремы 2 на нестепенную функцию гладкости, а также изучению влияния "второго индекса" (имеется в виду u) на емкость в пространстве $BL^{\omega}_{p,u,\theta}$ посвящен следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$0 < u$, $\theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant u_1$, $\theta_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \sigma \leqslant 1$.

Тогда:

а) $\overline{cap}(A, B^{\omega}_{p,1,1}) \asymp h_{\varphi,1/p}(A)$; $\overline{cap}(A, B^{\omega}_{p,u,\theta}) \asymp h_{\varphi,\theta/p}(A)$ (как функции множества A), где

$$\varphi(t) = \inf_{t \leqslant x \leqslant 1} x^n/(\omega(x))^p , \quad 0 < \theta < 1 ;$$

в) Пусть $p > 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\varphi_1 \in \Omega_n$,

$$1/\varphi(t) = \left(1 + \left(\int_t^1 (\omega(y) y^{-n/p})^{\theta'} dy/y\right)^{1/\theta'}\right)^p ,$$

$1/\theta' + 1/\theta = 1$, причем интеграл, стоящий справа, расходится (то есть $\varphi(0) = 0$).

Определим последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0}^{+\infty}$ положительных чисел с помощью следующих соотношений:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{i+1} = \max\{2^{-u} \mid 2^{-u} < \lambda_i , \ \varphi(2^{-u}) \leqslant \varphi(\lambda_i)/2, \ u \in N\} .$$

Тогда следующие три условия равносильны.

I) Имеет место неравенство

$$\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \geqslant c h_{\varphi_1,\sigma}(A), \quad A \subset R^n .$$

2) $\mathcal{E}(BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \subset \mathcal{E}_{\varphi_1,\sigma}$.

3) Последовательность $\{\varphi_1(\lambda_i)/\varphi(\lambda_i)\}_{i=0}^{+\infty}$ принадлежит

пространству

i) ℓ_s, $1/(sp) = 1/(\sigma p) - 1/\theta$, если $0 < \sigma < 1/p$;

ii) ℓ_s, $1/(sp) = 1 - 1/\theta$, если $1/p < \sigma \leq 1$;

iii) M_s, $s = p\max(0, 1 - 1/u)$, если $\sigma = 1/p$, $\theta = 1$

iv) ℓ_ψ, если $\sigma = 1/p$, $\theta > 1$, где $1/(sp) = 1 - 1/\theta$,

$$\psi(t) = (t(\ln(2 + 1/t))^r)^s, \quad r/p = \max(0, 1 - 1/u).$$

c) Пусть выполнены все условия предыдущего пункта,

$$1/\varphi_1(t) = \left(1 + \left(\int_t^1 (\omega_1(y) y^{-n/p})^{\theta_1'} dy/y\right)^{1/\theta_1'}\right)^p,$$

$1/\theta_1' + 1/\theta_1 = 1$, причем интеграл, стоящий справа, расходится (то есть $\varphi_1(0) = 0$).

Тогда следующие три условия равносильны.

I) Имеет место неравенство

$$\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \geq c\,\overline{cap}(A, BL^{\omega_1}_{p,u_1,\theta_1}), \quad A \subset R^n.$$

2) $\mathcal{E}(BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \subset \mathcal{E}(BL^{\omega_1}_{p,u_1,\theta_1})$.

3) Последовательность $\{\varphi_1(\lambda_i)/\varphi(\lambda_i)\}_{i=0}^{+\infty}$ принадлежит пространству

i) ℓ_∞, если $\theta_1 > \theta$;

ii) M_s, $s/p = \max(0, 1/u_1 - 1/u)$, если $\theta = \theta_1$;

iii) ℓ_ψ, если $\theta_1 < \theta$, где $1/(sp) = 1/\theta_1 - 1/\theta$,

$$r/p = \max(0, 1/u_1 - 1/u), \quad \psi(t) = (t(\ln(2 + 1/t))^r)^s.$$

ЗАМЕЧАНИЯ К ПРЕДЛОЖЕНИЮ 2. I) Утверждения пунктов в) и с) предложения 2 останутся справедливы, если условие $p > 1$ заменить на условия $p = 1$, $\omega, \omega_1 \in S_{n/p}$.

2) Пусть $0 < p < \infty$, $0 < u \leq \infty$, $0 < \theta \leq 1$ и выполнено одно из условий: i) $u \leq 1$ или ii) $\theta < 1$. Тогда

$\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \asymp h^*_{\omega^{-p} t^n, \theta/p}(A)$ (как функции множества A).

3) Задача о сравнении емкостей множеств в пространствах $BL^{\omega}_{p,u,\theta}$ и $BL^{\omega_1}_{q,u_1,\theta_1}$, $1 \leq \theta, \theta_1, u, u_1 \leq \infty$, $1 < p \neq q < \infty$, по сути дела решена в [5] (смотри теорему 3.I, где разобран случай $u = p$, $u_1 = q$, однако доказательство и ответ (он независим от u и u_1) точно такие же).

4) Утверждение предложения 2 вместе с результатами работы [5] приводят к следующему любопытному, по мнению автора, эффекту. Поясним это на примере емкости в пространстве $BL^{\ell}_{2,2}$.

Пусть $0<2\ell<n$, $\theta\neq 1/2$. Тогда включение $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{2,2})\subset \mathcal{E}_{n,\theta}$, справедливо тогда и только тогда, когда последовательность $\{\gamma(2^{-i})\}_{i=0}^{+\infty}$, $\gamma(t)=h(t)t^{2\ell-n}$, принадлежит пространству ℓ_s, где зависимость показателя $1/s$ от $1/\theta$ (что и является любопытным по мнению автора) определяется следующим образом:

$$1/s=\begin{cases} 1/\theta, & \text{если } 1\leq\theta\leq\infty \\ 1, & \text{если } 1/2<\theta<1 \\ 1/\theta-1, & \text{если } 0<\theta<1/2 \end{cases}$$

Одно из возможных объяснений этого факта состоит в следующем: величина $\overline{cap}(A,BL^{\ell}_{2,2})$ при изучении вложения $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{2,2})\subset\mathcal{E}_{h,\theta}$, $\theta\geq 1$, ведет себя как $h_{n-2\ell,\infty}(A)$, а при изучении вложения $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{2,2})\subset\mathcal{E}_{h,\theta}$, $\theta<1/2$, ведет себя как $h_{n-2\ell,1}(A)$, так как известно (смотри [5]), что

$$c_1 h_{n-2\ell,\infty}(A)\leq\overline{cap}(A,BL^{\ell}_{2,2})\leq c_2 h_{n-2\ell,1}(A),\quad A\subset R^n.$$

Из предложения 2 вытекает, что если $0<\ell<n/p$, $1\leq p<\infty$, $1\leq\theta,u,v\leq\infty$, $u\neq v$, то $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,u,\theta})\neq\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,v,\theta})$.

Однако, как показывает следующий результат, если $0<u,v\leq 1$ и $\theta\neq\infty$, то $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,u,\theta})=\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,v,\theta})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $0<p$, $\theta<\infty$, $0<u,v\leq 1$. Тогда $\overline{cap}(A,BL^{\omega}_{p,u,\theta})\asymp\overline{cap}(A,BL^{\omega}_{p,v,\theta})$.

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРЕДЛОЖЕНИЮ 3. Аналогично доказательству пункта с) теоремы I можно показать, что $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,u,\infty})\neq\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,v,\infty})$, $1<p<\infty$, $0<\ell<n/p$, $u\neq v\leq 1$. Однако, в отличие от случая $p\leq 1$, точные количественные результаты (типа утверждения пункта с) теоремы I) относительно величины возникающего здесь "зазора" автору неизвестны.

Для формулировки следующих результатов нам потребуется несколько новых обозначений.

Пусть $0<p<\infty$, $0<\theta\leq\infty$. Положим

$$I = (0,\infty) \times (0,\infty] ;$$
$$\Gamma_1(p,\theta) = \{(u,v) \in I \mid p/\theta \leqslant u/v\}$$
$$\Gamma_2(p,\theta) = \{(u,v) \in I \mid p(1-1/\theta) \geqslant u(1-1/v)\}$$
$$\Gamma_3(p,\theta) = \Gamma_1(p,\theta) \cap \Gamma_2(p/t, \theta/t), \quad t = \min(1,p,\theta),$$
$$\Gamma_4(p,\theta) = \{1 \geqslant u > p, \ v = \infty\},$$
$$\Gamma_5(p,\theta) = \{u = p/\theta, \ v = 1\}$$
$$\Gamma(p,\theta) = \begin{cases} \Gamma_3(p,\theta) \setminus \Gamma_4(p,\theta), & \text{если } p<1, \ \theta=\infty \\ \Gamma_3(p,\theta) \setminus \Gamma_5(p,\theta), & \text{если } \theta<p, \ \theta<1 \\ \Gamma_3(p,\theta) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из теоремы 2 и результатов работы [5] вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0<p, q<\infty, 0<\sigma, \theta \leqslant \infty, 0<\ell p = mq < n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) Имеет место оценка
$$\overline{cap}(A, BL^{\ell}_{p,\theta}) \leqslant c \ \overline{cap}(A, BL^{m}_{q,\sigma}), \quad A \subset R^n ;$$
2) $\mathcal{E}(BL^{\ell}_{p,\theta}) \supset \mathcal{E}(BL^{m}_{q,\sigma})$;

3) $(q,\sigma) \in \Gamma(p,\theta)$.

Импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3) из утверждения предыдущей теоремы можно усилить следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $0<p<\infty$, $0<\theta \leqslant \infty$, $0<\ell p<n$, $\varepsilon>0$. Тогда существует компакт K, $K = K(\ell, p, \theta, \varepsilon)$, $K \subset R^n$, такой, что

1) K содержится в некотором шаре радиуса $\varepsilon > 0$;

2) $\overline{cap}(K, BL^{m}_{q,\sigma}) > 0$, если $(q,\sigma) \in \Gamma(p,\theta)$; $mq = \ell p$.

3) $\overline{cap}(K, BL^{m}_{q,\sigma}) = 0$, если $(q,\sigma) \notin \Gamma(p,\theta)$, $mq = \ell p$.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Утверждение предложения 4 останется справедливым, если в пунктах 2) и 3) соотношения $(q,\sigma) \in \Gamma(p,\theta)$ и $(q,\sigma) \notin \Gamma(p,\theta)$ заменить на соотношения $(p,\theta) \notin \Gamma(q,\sigma)$ и $(p,\theta) \in \Gamma(q,\sigma)$ соответственно.

3. Доказательства основных результатов

3.I. Обозначения. Вспомогательные результаты

Всюду в дальнейшем:

$$Q_0=[0,1)^n;\ Q_{i,k}=2^{-i}(k+Q_0),\ i\in N_0,\ k\in Z^n;$$

$\chi_{i,k}$ – характеристическая функция множества $Q_{i,k}$, $i\in N_0$, $k\in Z^n$;

C_b^a – число сочетаний из b по a;

$|T|$ – количество элементов множества T;

$FST(i,\gamma_1,\gamma_2)$, $i\in N_0$, $\gamma_1,\gamma_2\in R$, $\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant 0$, – множество, состоящее из функций v, определенных на R^n, которые можно представить в виде

$$v=\sum_{k\in I}\alpha_{i,k}\chi_{i,k},\quad \gamma_1\geqslant\alpha_{i,k}\geqslant\gamma_2,\quad k\in I,$$

где $I=I(v)$ – некоторое подмножество Z^n;

$f_{*,q}(t)$, где $0<q<\infty$, $t\in R$, $t>0$, f – измеримая функция, определенная на R^n, – величина, определенная соотношением

$$f_{*,q}(t)=\inf\left(\|f\chi_E\|_q\, t^{-1/q}\right),$$

где инфимум берется по всем множествам E, $E\subset R^n$, $\mu_n(R^n\setminus E)=t$;

$|||f|||_{p,\theta,q}$, где $0<p<q<\infty$, $0<\theta\leqslant\infty$, f – измеримая функция, определенная на R^n, – величина, определенная соотношением

$$|||f|||_{p,\theta,q}=\left(\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left(f_{*,q}(2^{-i})\,2^{-i/p}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}.$$

Отметим, что при сделанных выше предположениях нетрудно доказать, что величина $|||\cdots|||_{p,\theta,q}$ эквивалентна величине $\|\cdots\|_{p,\theta}$.

Далее мы постоянно будем использовать следующее простое, но очень полезное утверждение, доказанное в работе [5].

ЛЕММА I.I. Пусть $0<p<\infty$, $0<u,\theta\leqslant\infty$. Тогда емкость в пространстве $BL^{\omega}_{p,u,\theta}$, как функция множества $A\subset R^n$, эквивалентна величине

$$\inf\left(\sum_{i=0}^{i=+\infty}(\|v_i\|_{p,u}/\omega(2^{-i}))^{\theta}\right)^{p/\theta},$$

где инфимум берется по всем последовательностям функций $\{v_i\}_{i=0}^{+\infty}$, $v_i \in FST(i,1,0)$, таким, что $\sum_{i\in N_0} v_i(y) \geq 1$ при любом $y \in A$, причем лишь конечное число членов последовательности $\{v_i(y)\}_{i=0}^{+\infty}$ отлично от 0.

ЗАМЕЧАНИЯ К ЛЕММЕ I.I. I) Пусть $\{\mu_i\}_{i=0}^{+\infty}$ – произвольная последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{i=0}^{+\infty}\mu_i \leq c_1$; $\{j_m\}_{m=0}^{+\infty}$ – строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, $j_0 = 0$, S – биективное отображение N_0 на N_0. Тогда в утверждении леммы дополнительно можно считать, что последовательность функций $\{v_i\}_{i=0}^{+\infty}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

а) при любых $x \in R^n$, $i \in N_0$ справедлива оценка

$$v_i(x) \geq \mu_m/(j_{m+1} - j_m),$$

если $j_m \leq S(i) \leq j_{m+1} - 1$ и $v_i(x) \neq 0$;

в) при любых $y \in A$, $m \in N_0$ справедлива оценка $\sum v_i(y) \geq \mu_m$, где суммирование проводится по всем $i, i \in N_0$, таким, что $j_m \leq S(i) \leq j_{m+1} - 1$, если $\sum v_i(y) \neq 0$.

2) Из предыдущего замечания легко выводится, что если $\omega \in S_{n/p}$ и

$$\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \leq 2^{-jn}/(\omega(2^{-j}))^p$$

при некотором $j \in N_0$, то в утверждении леммы дополнительно можно считать, что $v_i = 0$, если $i \in N_0$, $i \leq j$.

3) Пусть $0 < p < \infty$, $0 < \theta$, $u \leq \infty$ и выполнено одно из трех условий:

а) $u = p = 1$;

б) $p \geqslant 1$, $1 \leqslant u \leqslant \infty$

в) $p < 1$, $p \leqslant u \leqslant \infty$.

Функция φ определена на отрезке (0,I) так же, как в предложении I, если $p < 1$, и так же, как в пункте в) предложения 2, если $p \geqslant 1$ (при этом, если $\theta < 1$, то следует положить $\theta' = \infty$). Последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0}^{+\infty}$ строится по функции φ так же, как в предложении 2, $\nu_i = -\log_2 \lambda_i$, $i \in N_0$. Тогда утверждение леммы вместе с замечаниями I,2 к ней останется справедливым, если:

i) в формулировке леммы 1.1 величину $\omega(2^{-i})$ заменить на величину $(\lambda_i^n/\varphi(\lambda_i))^{1/p}$, а условие $v_i \in FST(i,1,0)$ на условие $v_i \in FST(\nu_i, 1, 0)$;

ii) в формулировке замечания 2 величину $2^{-jn}/(\omega(2^{-j}))^p$ заменить на величину $\varphi(2^{-\nu_j})$, а условие $i \leqslant j$ – на условие $i \leqslant j - c$, где c – некоторая постоянная, а требование $\omega \in S_{n/p}$ – исключить.

3.2. Доказательство теоремы I

Сформулируем вначале три простых леммы, которые потребуются нам в дальнейшем.

ЛЕММА 2.I. Пусть $\Delta, d, \alpha \in R$, $0 < \Delta \leqslant 1/2$, $d > 1$, $0 < \alpha < 1$, $2\Delta d < \alpha$, $E \subset R^n$, $1 \leqslant \lambda(x) \leqslant d$ при любом $x \in E$, $\mu_n(E) = 1$, $E_0 \subset E$, $\mu_n(E \setminus E_0) \geqslant \alpha$. Тогда при любом $t > 0$ имеет место неравенство

$$(\lambda(x)\chi_E)_{*,1}(t) \geqslant \left(\frac{1}{1-\Delta}\lambda(x)\chi_{E_0}\right)_{*,1}(t).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $a, b \in R$, $a > 1$, $b > 1$; последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$ определены с помощью соотношений

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{i+1} = a^{a_i},\ b_{i+1} = b^{b_i},\ i \in N.$$

Тогда существует $m \in N$ такое, что при любом $j \in N$ имеет место оценка $b_j \leqslant a_{j+m}$, $m = m(a, b)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть

$a \in N$; $\lambda_i \in R$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 4^{-d}$, $i = 1, 2, \ldots, a$, $d \in N$, $d \geqslant 4$,

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_a = 1$.

Тогда существуют множества $\{I_j\}_{j=1}^{u}$, $u \in N$, такие, что

а) $I_j \subset \{1, 2, \dots a\}$, $j=1,\dots,u$, $|I_1| \geqslant 4^{d-3}$, $|I_u| \leqslant a/16$;

в) $|I_{j+1}| / |I_j| \geqslant 2$, $j = 1, 2, \dots, u-1$;

с) $\lambda_r / \lambda_v \leqslant 4$, если $r, v \in I_j$, $j=1,\dots,u$;

d) $I_j \cap I_k = \emptyset$, если $j \neq k$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant u$;

е) $\sum_{j=1}^{j=u} (\min_{i \in I_j} \lambda_i) |I_j| \geqslant 2^{-8}/3$.

Элементарное доказательство лемм 2.I и 2.2 мы опустим. Отметим только, что в качестве m, существование которого утверждается в лемме 2.2, можно взять любое число s, $s \in N$, такое, что $a_s > a^d$, где d, $d > 1$, – любое вещественное число, для которого имеет место неравенство $a^d > db$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2.3. Не умаляя общности будем считать, что последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0}^{i=a}$ не убывает. Положим

$$m(k) = |\{(i \in N \mid 1 \leqslant i \leqslant a/16,\ 4^{-k-1} < \lambda_i \leqslant 4^{-k}\}|.$$

Определим теперь числа u, $u \in N$, $k(j)$, $j=1,\dots,u$, с помощью соотношений

$$k(1) = \min\{t \mid t \in N,\ m(t) \geqslant 4^{d-3}\},$$

$$k(j+1) = \min\{t \mid t \in N,\ t \geqslant k(j),$$

$$m(t)\, 4^{-t} \geqslant 4^{-k(j)}\, m(k_j)\, 2^{-(t-k(j))}\},$$

если множество, стоящее в правой части последнего равенства, непусто (отметим, что множество, стоящее в правой части равенства, определяющего $k(1)$, всегда непусто), в случае, если при некотором $j = j_0$ это множество окажется пустым, то полагаем $u = j_0$.

Утверждение пунктов а) – d) леммы 2.3 сразу следует из построения, а утверждение пункта е) легко вытекает из пункта с) и следующих трех оценок:

$$\sum_{i=0}^{i=+\infty} m(i)\, 4^{-i} \geqslant 2^{-5}; \quad \sum_{i=0}^{i=k(1)-1} m(i)\, 4^{-i} \leqslant 2^{-4}/3,$$

$$\sum_{i=k(j)}^{i=k(j+1)-1} 4^{-i}\, m(i) \leqslant 2 \cdot 4^{-k(j)}\, m(k(j)),$$

$j = 1, 2, \dots u$.

Причем в последнем неравенстве при $j = u$ величину $\kappa(u+1)-1$ следует заменить на ∞ .

Докажем теперь три леммы комбинаторного характера, последняя из которых, по мнению автора, представляет и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2.4. а) Пусть $i \in N_0$, $a, \ell, t \in N$, $a \geqslant \ell + t$, $\ell > 2i$, $t > 2i$, $8a(i+1) \leqslant \ell t$.
Тогда $2C_\ell^i \cdot C_{a-\ell}^{t-i} \leqslant C_\ell^{i+1} \cdot C_{a-\ell}^{t-(i+1)}$.

в) Пусть $v \in N_0$, $a, \ell, t \in N$, $a \geqslant \ell + t$, $\ell > 4v+4$, $t > 4v+4$, $16(v+1)a \leqslant t\ell$.
Тогда $\sum_{j=0}^{j=v} C_\ell^j \cdot C_{a-\ell}^{t-j} \leqslant 2^{-v} C_a^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2.4. Пункт а) сразу следует из оценок:

$$(C_\ell^i \cdot C_{a-\ell}^{t-i})/(C_\ell^{i+1} \cdot C_{a-\ell}^{t-(i+1)}) = \frac{(i+1)(a-t-\ell+j+1)}{(\ell-i)(t-i)} \leqslant$$

$$\leqslant 4(i+1)a/(t\ell) \leqslant 1/2.$$

Пункт в) легко вытекает из пункта а) с помощью следующей цепочки неравенств

$$\sum_{j=0}^{j=v} C_\ell^j \cdot C_{a-\ell}^{t-j} \leqslant C_\ell^{v+1} \cdot C_{a-\ell}^{t-(v+1)} \leqslant 2^{-v} C_\ell^{2v+1} \cdot C_{a-\ell}^{t-2v-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-v} C_a^t .$$

ЗАМЕЧАНИЕ к лемме 2.4. Пункт в) леммы допускает следующую переформулировку. Пусть выполнены условия пункта в) леммы 2.4,

$$I \subset \{1, \dots, a\}, \quad |I| = \ell,$$

$$F = \{ J \mid J \subset \{1, \dots, a\}, \ |J| = t, \ |J \cap I| \geqslant v \}.$$

Тогда $|F| / C_a^t \geqslant (1 - 2^{-v})$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $a, d, t \in N$, $\gamma, b \in R$, $\gamma, b \geqslant 1$, $d \geqslant 4$; $\lambda_i \in R$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 4^{-d}$, $i = 1, \dots, a$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_a = 1$, $4^{d-5} \geqslant b/\gamma$, $t \leqslant a/8$, $t \geqslant 64\gamma a/b$;

$$\Omega = \{ J \mid J \subset \{1, \dots, a\}, \ |J| = t, \ \textstyle\sum_{i \in J} \lambda_i \geqslant 2^{-11} \gamma / b \}.$$

Тогда $|\Omega| / C_a^t \geqslant (1-2^{-u}), \quad u = \gamma 4^{d-4}/b$.

Лемма 2.5 легко выводится из замечания к предыдущей лемме с помощью леммы 2.3. Поэтому простое, но несколько громоздкое доказательство леммы 2.5 мы приводить не будем.

ЛЕММА 2.6. Пусть $a, m \in N$, $b > 1$, $a \geqslant c_0 b m (\ln m + 1)$;

$0 \leqslant \lambda_{\omega,i}$, $i = 1, \dots, a$, $\omega \in \Omega$, $|\Omega| = m$.

Тогда существует множество $I, I \subset \{1, \dots, a\}$, такое, что $|I| \leqslant c_1 a / b$ и при любом $\omega \in \Omega$ справедлива следующая оценка:

$$\sum_{i \in I} \lambda_{\omega,i} \geqslant \min(1, 3\lambda/b) \sum_{i=1}^{i=a} \lambda_{\omega,i} .$$

Здесь c_0, c_1 - некоторые абсолютные постоянные.

СЛЕДСТВИЕ из леммы 2.6. Пусть $\ell, a \in N$;

$D, B, A, \lambda, \gamma, \beta, u \in R$; $\beta, u > 1$; $\gamma \geqslant 2\lambda > 0$;

$D, B, A > 0$; $1 \geqslant \gamma \geqslant B/\beta^u$, $\ell < A\beta^u$, $\lambda \geqslant D/\beta^{2u}$;

$\{m(i)\}_{i=0}^{i=\ell}$ - строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел;

$\{v(i)\}_{i=0}^{i=\ell}$ - последовательность функций, таких, что

$v_i \in FST(m(i), 1, D/\beta^{2u})$, $i = 1, \dots, \ell$;

$\sum_{i=1}^{i=\ell} v_i \geqslant (\gamma - \lambda)\chi_F$, $F \subset E = \bigcup_{q=1}^{q=a} Q_q$, $Q_q = Q_{m(0), k(q)}$,

$k(q) \in Z^n$, $q = 1, 2, \dots a$.

Тогда, если $a \geqslant c_2 u^2 \beta^{3u}$, $c_2 = c_2(\beta, A, B, D)$, то существует множество $I, I \subset \{1, \dots a\}$, и функции $\{v_{1,i}\}_{i=1}^{i=\ell}$ такие, что $|I| \leqslant c_3 a\lambda/\gamma$ и выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{supp} v_{1,i} \subset \operatorname{supp} v_i$, $i = 1, \dots, \ell$;

2) при любом $i \in \{1, \dots, \ell\}$ и любом $t > 0$ имеет место неравенство $(v_{1,i})_{*,1}(t) \leqslant (v_i)_{*,1}(t)$;

3) $v_{1,i} \in FST(m(i), 1, D/\beta^{2s})$, $i = 1, 2, \dots, \ell$;

4) $\sum_{i=1}^{i=\ell} v_{1,i} \geqslant \gamma \chi_{F \setminus E_0}$, $E_0 = \bigcup_{q \in I} Q_q$.

Здесь $c_3 = c_3(\beta, A, B, D)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2.6. Пусть A и A_1 – некоторые положительные числа, выбор которых мы уточним в дальнейшем. Далее не умаляя общности считаем, что $c_1 \geqslant 2A$, $b \geqslant A_1$ (выполнения последнего неравенства можно добиться за счет увеличения A) и при любом $\omega \in \Omega$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{i=a} \lambda_{\omega,i} = 1 .$$

Обозначим через $\{\lambda^*_{\omega,i}\}_{i=1}^{i=a}$ неубывающую перестановку множества $\{\lambda_{\omega,i}\}_{i=1}^{i=a}$, $\omega \in \Omega$. Разобьем множество индексов Ω на два непересекающихся множества Ω_1 и Ω_2, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, следующим образом: $\omega \in \Omega_1$ тогда и только тогда, когда имеет место оценка $\sum \lambda^*_{\omega,i} \geqslant \min(32/b, 1)$, где суммирование проводится по всем $i \in N$ таким, что $1 \leqslant i < aA/mb$. Тогда нетрудно показать, что если $A_1 \geqslant 64$, $A \geqslant 4$, $c_0 \geqslant 1$, $\omega \in \Omega_2$, то

$$\sum \lambda^*_{\omega,i} \geqslant 1/2, \quad \sup \lambda^*_{\omega,i} \leqslant m\, 64/(A \cdot a),$$

где суммирование и взятие супремума проводится по всем $i \in N$ таким, что $a \geqslant i > aA/(mb)$.

Выбирая A_1, A, c_0 достаточно большими и применяя предыдущую лемму при $\omega \in \Omega_2$, легко заканчиваем доказательство леммы 2.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия леммы 2.6. Пусть $\Delta \in N$ таково, что $2(|\log_2(\beta^{2u}/D)|+1) \leqslant \Delta$, $\Delta < c_4 u$. Положим

$$\Omega = \{\omega \mid \omega = (r, \alpha),\ r \in \{1, \dots, \ell\},\ \alpha \in \{1, \dots, \Delta\}\},$$

$$\lambda_{\omega,q} = \mu_n(\{x \in Q_q \mid 2^{-\alpha-1} < v_r \leqslant 2^{-\alpha}\}),\ \omega = (r, \alpha) \in \Omega .$$

Применяя лемму к последовательностям $\{\lambda_{\omega,q}\}_{q=1}^{q=a}$, $\omega \in \Omega$, при $b = \gamma/\lambda$, найдем множество I. Далее, определяя $v_{1,i}$ соотношением

$$v_{1,i} = \min(1, \gamma/(\gamma-\lambda) v_i)\, \chi_{E \setminus E_0},\ i = 1, \dots, \ell,$$

и используя лемму 2.I, легко заканчиваем доказательство следствия.

Из следствия леммы 2.6 легко выводится следующий результат, элементарное доказательство которого мы приводить не будем.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\ell, D, B, A, \gamma, \beta, u, \{m(i)\}_{i=0}^{i=\ell}$ – такие же, как и в следствии леммы ;

$F \subset R^n$, $\{v_i\}_{i=0}^{i=\ell}$ – последовательность функций таких, что $v_i \in FST(m(i), 1, D/\beta^{2u})$, $i=0,1,\dots,\ell$,

$$\sum_{i=1}^{i=\ell} v_i \geqslant \gamma \chi_F .$$

Тогда существует множество $I \subset Z^n$ и функции $\{v_{1,i}\}_{i=1}^{i=\ell}$ такие, что

$$|I| \leqslant c(u^3\beta^{3u} + 2^{nm(0)} \|v_0\|_1/\gamma), \quad c = c(A, B, D, \beta),$$

и выполнены условия I)–4) следствия леммы 2.6, где в качестве E_0 надо взять следующее множество: $E_0 = \bigcup_{k \in I} Q_{m(0),k}$.

СЛЕДСТВИЕ леммы 2.7. Пусть выполнены условия леммы 2.7. Тогда существует последовательность множеств $\{I_i\}_{i=0}^{i=\ell}$ таких, что

I) $I_i \subset Z^n$, $|I_i| \leqslant c(u^3\beta^{3u} + 2^{nm(i)} \|v_i\|_1/\gamma)$, $i=0,\dots,\ell$;

2) $F \subset \bigcup_{i=0}^{i=\ell} (\bigcup_{k \in I_i} Q_{m(i),k})$.

Далее нам будет полезен следующий результат, простое (но несколько длинное) доказательство которого мы приводить не будем.

ЛЕММА 2.8. Пусть $E \subset R^n$, $d \in N_0$, $\ell \in N$, $\{m(i)\}_{i=1}^{i=\ell}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел; $\{v_i\}_{i=1}^{\ell}$ – последовательность функций таких, что

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{i=\ell} v_i \geqslant 2^{-d}\chi_E, \quad v_i \in FST(m(i), 1, 0), \ i=1,\dots,\ell .$$

Тогда существуют множества $\{E(\alpha)\}_{\alpha=0}^{\alpha=d}$, $\{J(\alpha,i)\}_{\alpha=0}^{\alpha=d}{}_{i=1}^{i=\ell}$; такие, что

I) $E(\alpha) \subset R^n$, $J(\alpha,i) \subset Z^n$, $\alpha=0,\dots,d$, $i=1,\dots,\ell$;

2) семейства $\{J(\alpha,i)\}_{\alpha=0}^{\alpha=d}$ дизъюнктны при любом i, $i=1,\dots,\ell$;

3) $64 \sum_{i=1}^{i=\ell} (v_i (\sum_{k \in J(\alpha,i)} \chi_{m(i),k})) \geqslant 2^{-\alpha}\chi_{E(\alpha)}$, $\alpha=0,\dots,d$;

4) $\sup\limits_{0\leq\alpha\leq d} 2^{-\alpha}\chi_{E(\alpha)} \geq \left(\sum_{i=1}^{i=\ell} v_i\right)\chi_E$.

Из предыдущей леммы и следствия из леммы 2.7 легко вытекает следующий результат.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\ell, A, B, D, \gamma, \beta, u, \{m(i)\}_{i=0}^{i=\ell}$ – такие же, как и в следствии леммы 2.6; $E \subset R^n$; $\{v_i\}_{i=0}^{i=\ell}$ – последовательность функций таких, что

$$1 \geq \sum_{i=0}^{i=\ell} v_i \geq \gamma\chi_E ,$$

$$v_i \in FST(m(i), 1, D/\beta^{2u}), \quad i=0,\dots,\ell .$$

Тогда существует последовательность функций $\{v_{1,i}\}_{i=0}^{i=\ell}$ таких, что:

I) $\sum_{i=0}^{i=\ell} v_{1,i} \geq \left(\sum_{i=0}^{i=\ell} v_i\right)\chi_E$;

2) $v_{1,i} \in FST(m(i), 1, \gamma)$, $i=0,\dots,\ell$;

3) при любом i, $i\in\{0,\dots,\ell\}$, функции $v_{1,i}$ можно представить в виде $v_{1,i} = v_{2,i} + v_{3,i}$ так, чтобы при любом $t>0$ имели место следующие две оценки:

а) $(v_{2,i})_{*,1}(t) \leq c(v_i)_{*,1}(t)$;

в) $(v_{3,i})^*(t) \leq \gamma\chi_{[0,a(i)]}(t)$, $a(i) = cu^4\beta^{3u}2^{-nm(i)}$.

Здесь $c = c(\beta, A, B, D)$ – некоторая постоянная.

ЛЕММА 2.I0. Пусть $0<p<1$, $0<u\leq\infty$; f_1, f_2 – измеримые функции, определенные на R^n, такие, что при любом $t>0$ справедливо неравенство $(f_1)_{*,1}(t) \leq (f_2)_{*,1}(t)$. Тогда

$$\|f_1\|_{p,u} \leq c\|f_2\|_{p,u} , \quad c=c(p,u) .$$

Элементарное доказательство леммы 2.I0 мы приводить не будем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Пусть $0<p\leq 1$, $0<u\leq\infty$ и выполнено одно из следующих двух условий: либо $i)$ $p<1$; либо $ii)$ $p=u=1$; Пусть $0<\alpha<n/p$, $1<\beta<2^{(n-p\alpha)/4}$, $A\subset R^n$,

$\overline{cap}(A, BL^{\alpha}_{p,u,\infty}) \leq 2^{-j(n-p\alpha)}$, $j\in Z$, $j_0 = max(0,j)$, $\lambda>0$,

S – биекция N_0 на N_0 ; $\{\beta(\nu)\}_{\nu=0}^{+\infty}$ – последовательность положительных чисел, определяемая с помощью следующих соотношений: $\beta(0)=1$, $\beta(\nu+1)=\beta^{\beta(\nu)}$, $\nu\in N_0$; $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ – монотонно убывающая последовательность положительных чисел такая,

что $\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} a_\nu \leq \lambda$.

Тогда существует последовательность функций $\{v_i\}_{i=0}^{+\infty}$ такая, что

I) $v(i)=0$, если $s(i)<j_0$;

2) $v(i)\in FST(s(i),1,a_\nu)$, если $s(i)\geq j_0$, $\beta(\nu)\leq i<\beta(\nu+1)$, $\nu\in N_0$;

3) $\|v_i\|_{p,u}\leq C\,2^{-s(i)\alpha-j(u/p-\alpha)}$, $i\in N_0$, $C=C(\alpha,\beta,u,p,\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЯ к предложению 2.I. I) Если s – тождественное отображение (то есть $s(i)=i$ при любом $i\in N_0$), тогда требование монотонного убывания последовательности $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{\nu=+\infty}$ из формулировки предложения можно исключить.

2) Как вытекает из леммы 2.2, последовательность $\{\beta(\nu)\}_{\nu=0}^{+\infty}$, фигурирующую в предложении, можно заменить на последовательность $\{\varkappa(\nu)\}_{\nu=0}^{+\infty}$.

Утверждение предложения нетрудно вывести из леммы I.I и замечаний к ней, леммы 2.9 и леммы 2.I0 (при $p<1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Импликации I) $\Longrightarrow$ 2) тривиальны, импликации 3) $\Longrightarrow$ I) (и замечание I) к теореме) легко следуют из предложения 2.I и леммы 2.II, приводимой ниже. Мы не будем приводить доказательство импликаций 2) $\Longrightarrow$ 3). Однако отметим следующее: доказательство импликаций 2) $\Longrightarrow$ 3) в случае пунктов а) и в) проводится аналогично рассуждениям работы [5] (предложение 3.2), где показано, что емкости в пространствах $BL_{p,\infty}^{\ell/p}$ и $BL_{q,\infty}^{\ell/q}$ различны, но технически чуть более сложно; доказательство импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) в случае пункта с) основано на близких соображениях, но труднее.

ЛЕММА 2.II. Пусть $0<p,q<\infty$, $0<u,v\leq\infty$, $q<p$, $a>0$, $\gamma=\max(1/v-1/u,0)$, $\sigma=p/q$, $f\in L_{p,u}(R^n)$; $f\geq a$ почти всюду на множестве E, $E=\{x\,|\,x\in R^n,\ f(x)\neq 0\}$.

Тогда

I) $\mu_n(E)\leq c_1(\|f\|_{p,u}/a)^p$,

2) $\|f\|_{q,v}\leq c_2\,a^{1-\sigma}\|f\|_{p,u}^{\sigma}$,

3) $\|f\|_{p,v}\leq c_3(\ln(\|f\|_\infty/a+1))^\gamma\|f\|_{p,u}$.

Элементарное доказательство леммы 2.II мы приводить не будем.

Доказательство предложения I проводится аналогично доказательству части а) теоремы I, но технически сложнее.

3.3. Доказательство теоремы 2.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы докажем ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3.I. Пусть G, g - измеримые функции с дизъюнктными (относительно меры Лебега) носителями;

$$g, G \in L_q(R^n), \quad 1 \leq q < \infty, \quad \lambda \in R, \quad 0 < \lambda \leq 1/2 .$$

Тогда имеет место неравенство

$$\| G+g \|_q \geq (\lambda C \| G \|_q + \| G + g/(1-\lambda) \|_q)/(1+\lambda C),$$

где $C = C(q)$ - некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\| G \|_q = A$, $\| g \|_q = a$. Тогда не умаляя общности можно считать, что $A = 1$. Используя дизъюнктность носителей функций G и g, сводим требуемое неравенство к неравенству

$$(1+a^q)^{1/q} \geq (\lambda C + (1+(a/(1-\lambda))^q)^{1/q})/(1+\lambda C),$$

которое, как нетрудно видеть, эквивалентно оценке

$$\lambda C((1+a^q)^{1/q} - 1) \geq (1+(a/(1-\lambda))^q)^{1/q} - (1+a^q)^{1/q} .$$

Последняя из приведенных выше оценок легко вытекает из следующих двух элементарных неравенств:

$$(1+a^q)^{1/q} - 1 \geq a^q (1+a^q)^{1/q-1}/q,$$

$$(1+(a/(1-\lambda))^q)^{1/q} - (1+a^q)^{1/q} \leq a^q((1/(1-\lambda))^q - 1)(1+a^q)^{1/q-1}/q \leq$$

$$\leq a^q((1+2\lambda)^q - 1)(1+a^q)^{1/q-1}/q \leq 4^q a^q \lambda (1+a^q)/q .$$

СЛЕДСТВИЕ из леммы 3.I. Пусть выполнены условия леммы 3.I. Тогда при любом $t > 0$ имеет место оценка

$$(G+g)_{*,q}(t) \geq (\lambda C (G)_{*,q}(t) + (G+g/(1-\lambda))_{*,q}(t))/(1+\lambda C) .$$

ЗАМЕЧАНИЕ к лемме 3.I. Пусть $r \geqslant 1$ и выполнены условия леммы 3.I. Тогда утверждение леммы и следствия из нее останется справедливым, если величину $\|\dots\|_q$ заменить на величину $(\|\dots\|_q)^r$, а величину $(\dots)_{*,q}$ – на величину $((\dots)_{*,q})^r$ (при этом константа C, фигурирующая в утверждении леммы 3.I и следствии из нее, зависит только от r и q).

ЛЕММА 3.2. Пусть $0<p<q<\infty$, $0<r<\infty$ и выполнены условия леммы 3.I. Тогда имеет место неравенство

$$|||G+g|||_{p,r,q} \geqslant \lambda C(|||G|||_{p,r,q} + |||G+g/(1-\lambda)|||_{p,r,q})/(1+\lambda C) .$$

Здесь $C=C(r,q)$ – некоторая постоянная.

СЛЕДСТВИЯ из леммы 3.2. I) Пусть $A>0$, $0<p$, $r<\infty$, $1\leqslant q<\infty$, $p<q$, $0<\lambda\leqslant 1/2$; $\{G_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{g_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – последовательности измеримых функций, определенных на R^n, таких, что при любом $i\in N$

$$\mu_n(\{x \mid x\in R^n,\ G_i(x)\neq 0,\ g_i(x)\neq 0\}) = 0 .$$

Тогда существует δ, $\delta=\delta(p,r)>0$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |||G_i+g_i|||_{p,r,q} + A \geqslant$$

$$\geqslant \min\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} |||G_i+g_i/(1-\lambda)|||_{p,r,q},\ \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} |||G_i|||_{p,r,q} + \delta A/\lambda\Big)\Big)$$

2) Пусть $0<\lambda_m\leqslant 1/2$, $0<A_m$, $m=1,\dots,u$; $0<p<q<\infty$, $1\leqslant q$, $0<r$; $\{G_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{g_{i,m}\}_{i=1\ m=1}^{+\infty\ \ m=u}$ – последовательности измеримых функций, определенных на R^n, такие, что при любом $i\in N$ функции G_i, $g_{i,1}, g_{i,2},\dots,g_{i,u}$ имеют попарно непересекающиеся носители (в смысле меры Лебега). Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |||G_i + \sum_{m=1}^{m=u} g_{i,m}|||_{p,r,q} + \sum_{m=1}^{m=u} A_m \geqslant$$

$$\geqslant \min\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} |||G_i + \sum_{m=1}^{m=u} \varepsilon_m g_i/(1-\lambda_m)|||_{p,r,q} +$$

$$+\delta\left(\sum_{m=1}^{m=u}(1-\varepsilon_m)A_m/\lambda_m\right)),$$

где минимум берется по всем последовательностям $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{m=u}$, $\varepsilon_m\in\{0,1\}$, $m=1,\dots u$; $\delta=\delta(q,r)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.2. При $r=1$ утверждение леммы сразу вытекает из следствия леммы 3.I. В общем случае $0<r<\infty$ утверждение леммы 3.2 нетрудно вывести из замечания к лемме 3.I и приводимой ниже леммы 3.3.

Доказательство следствий из леммы 3.2. Докажем первое следствие. Доказательство проведем методом от противного. В качестве δ возьмем постоянную $1/C$, где C – константа, фигурирующая в утверждении леммы, и предположим, что требуемое неравенство не имеет места. Тогда будут справедливы следующие две оценки:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}|||G_i+g_i|||_{p,r,q}+A\leq\sum_{i=1}^{+\infty}|||G_i+g_i/(1-\lambda)|||_{p,r,q},$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}|||G_i+g_i|||_{p,r,q}+A\leq\sum_{i=1}^{+\infty}|||G_i|||_{p,r,q}+A/(C\lambda).$$

Сложив эти две оценки (предварительно умножив первую на $1/(1+\lambda C)$, а вторую на $\lambda C/(1+\lambda C)$), придем к неравенству, которое противоречит утверждению леммы 3.2. Следствие 2 легко (индукцией по m) вытекает из следствия I.

ЛЕММА 3.3. Пусть $0<\nu\leq 1$; $\{a_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$, $\{b_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$, $\{d_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$ – последовательности положительных чисел. Тогда:

а) если $r\geq 1$ и при любом $i\in Z$ справедливо неравенство

$$a_i^r\geq\nu b_i^r+(1-\nu)d_i^r,$$

то

$$\|\{a_i\}\|_{\ell_r}\geq\nu\|\{b_i\}\|_{\ell_r}+(1-\nu)\|\{d_i\}\|_{\ell_r};$$

в) если $0<r\leq 1$ и при любом $i\in Z$ справедливо неравенство

$$a_i\geq\nu b_i+(1-\nu)d_i,$$

то справедливо утверждение части а).

Мы не будем приводить элементарное доказательство леммы 3.3. Отметим только, что утверждение части в) легко вытекает из неравенства Минковского, а утверждение части а) из вогнутости функции $x^{1/r}$, $x\in(0,+\infty)$, $r\geq 1$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $0<p<q<\infty$, $0<r\leq\infty$, $i\in N_0$, $\lambda>0$, $1>\lambda$, $v\in FST(i,1,\lambda)$, $v\in L_{p,r}$.

Тогда:

а) Существуют числа $a,b\in N$, $0\leq a\leq b$, множества $\{E_j\}_{j=a}^{j=b}$ и функция v_2 такие, что

I) E_j - есть объединение конечного числа ячеек $\{Q_{i,k}\}_{k\in Z^n}$;

2) множества E_j, $j=a,\dots,b$, попарно дизъюнктны;

3) если $j,m\in N_0$, $a\leq j\leq j+m\leq b$, то

$$c_2\alpha^m\leq\mu_n(E_j)/\mu_n(E_{j+m})\leq c_1\beta^m;$$

4) $v\leq v_2$, $\operatorname{supp} v_2=\operatorname{supp} v$, $|||v_2|||_{p,r,q}\leq c|||v|||_{p,r,q}$;

5) $v_2=\sum_{j=a}^{j=b}2^{-j}\chi_{E_j}$.

Здесь c,c_1,c_2,α,β - некоторые постоянные, зависящие только от p,q,r; $0<\alpha<\beta<1$.

в) Существуют число u, $u\in N_0$, последовательность чисел $\{\beta_j\}_{j=0}^{u}$, множества $\{E_j\}_{j=0}^{u}$ и функция v_2 такие, что:

i) выполнены условия I),2),4) предыдущего пункта;

ii) $c_3\leq 2^j\mu_n(E_j)/\mu_n(\operatorname{supp} v_2)\leq c_4$, $j=0,1,\dots,u$;

iii) $v_2=\sum_{j=0}^{j=u}\beta_j\chi_{E_j}$, $0<\beta_0<\dots<\beta_u\leq 1$;

iv) если $u\geq 1$, то $\beta_{u-1}\leq 1/2$

v) если $\beta_u<1$, то $\beta_u\leq 1/2$.

Здесь c_3,c_4 - некоторые постоянные, зависящие только от p и r.

Элементарное, но технически достаточно громоздкое доказательство леммы мы приводить не будем.

Далее нам потребуется следующий простой результат, который мы тоже приведем без доказательства.

ЛЕММА 3.5. Пусть c_1,c_2,α,β, $0<\alpha<\beta<1$, - некоторые

постоянные; $a, b \in N_0$, $a \leq b$; $\{B_i\}_{i=a}^{i=b}$ – последовательность положительных чисел. Тогда, если из условий $j, m \in N_0$, $a \leq j \leq j+m \leq b$ вытекает, что $c_2 \alpha^m \leq B_j / B_{j+m} \leq c_1 \beta^m$, то при любом $\ell \in N$, $a \leq \ell \leq b$, справедливо неравенство

$$B_a + B_{a+1} + \ldots + B_\ell \leq c_3 B_\ell \; ; \; c_3 = c_3(c_1, c_2, \alpha, \beta).$$

Из предыдущей леммы, следствия 2 леммы 3.2 и утверждения пункта а) леммы 3.4 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 3.6. Пусть $0<p<q<\infty$, $q \geq 1$, $F \subset R^n$; $\{m(i)\}_{i=0}^{+\infty}$ – строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел; $\{\gamma_i\}_{i=0}^{+\infty}$, $\{\omega_i\}_{i=0}^{+\infty}$ – последовательности положительных чисел; $\{v_i\}_{i=0}^{+\infty}$ – последовательность функций такие, что

$$\sum_{i=0}^{+\infty} v_i \geq \chi_F, \; v_i \in FST(m(i), 1, \gamma_i), \; \gamma_i < 1, \; i \in N_0 .$$

Тогда существуют последовательность функций $\{v_{1,i}\}_{i=1}^{+\infty}$ и множество E, $E \subset R^n$, удовлетворяющие условиям:

1) $\sum_{i=1}^{+\infty} v_{1,i} \geq \chi_{F \setminus E}$, $v_{1,i} \subset FST(m(i), 1, \gamma_i)$, $\operatorname{supp} v_{1,i} \subset \operatorname{supp} v_i$, $i \in N$;

2) множество E есть объединение конечного числа ячеек вида $\{Q_{m(0),k}\}_{k \in Z^n}$;

3) $$\sum_{i=1}^{+\infty} |||v_{1,i}|||_{p,1,q} / \omega_i + \delta_1 (\mu_n(E))^{1/p} / \omega_0 \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |||v_i|||_{p,1,q} / \omega_i .$$

Здесь $\delta_1 = \delta_1(p,q)$ – некоторая постоянная.

СЛЕДСТВИЕ из леммы 3.6. Пусть выполнены условия леммы 3.6 и, кроме того, известно, что при любом $x \in F$ лишь конечное число членов последовательности $\{v_i(x)\}_{i=0}^{i=\infty}$ не равно нулю. Тогда существуют множества $\{E_i\}_{i=0}^{+\infty}$ такие, что:

1) при любом $i \in N_0$ множество E_i есть объединение конечного числа ячеек вида $\{Q_{m(i),k}\}_{k \in Z^n}$;

2) $F \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i$;

3) $\sum_{i=0}^{+\infty}(\mu_n(E_i))^{1/p}/\omega_i \leq 1/\delta_1 \sum_{i=0}^{+\infty} |||v_i|||_{p,1,q}/\omega_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.6. Положим $\delta_1 = \delta/(c_3 c c_0)$, где δ – постоянная из следствия 2 леммы 3.2; c – постоянная из пункта 4) части а) леммы 3.4; c_3 – постоянная из предыдущей леммы, c_0 – постоянная, фигурирующая в неравенстве

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} 2^i(\mu_n(\{x \mid 2^{i-1} < f(x) \leq 2^i\}))^{1/p} \leq c_0 |||f|||_{p,1,q} ,$$

$$f \in L_{p,1}(R^n) , \quad 0<p<q<\infty, \quad c_0 = c_0(p,q) .$$

Применим к функции v_0 лемму 3.4 и найдем числа a, b, множества $E_a, \ldots, E_b$ и функцию v_2 , удовлетворяющую утверждению части а) леммы 3.4. Далее считаем, что $a \neq 0$ (случай $a=0$ разбирается аналогично, но несколько длиннее). Положим:

$$u = b-a+1, \quad \lambda_1 = 2^{-a}, \ \lambda_2 = 2^{-a-1}, \ldots, \lambda_u = 2^{-b} ;$$

$$A_1 = \mu_n(E_a)/(\omega_0 c c_0), \ldots, A_u = \mu_n(E_b)/(\omega_0 c c_0) ;$$

$$g_{1,i} = v_i \chi_{E_a}, \ g_{2,i} = v_i \chi_{E_{a+1}}, \ldots, g_{u,i} = v_i \chi_{E_b} ;$$

$$G_i = v_i \left(1 - \sum_{j=a}^{j=b} \chi_{E_j}\right), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{m}$ – последовательность, состоящая из нулей и единиц, на которой достигается минимум, фигурирующий в утверждении следствия 2 леммы 3.2. Полагая

$$v_{1,i} = G_i + \sum_{j=1}^{j=u} \varepsilon_j g_{j,i}/(1-\lambda_j), \quad i \in N ,$$

$E = \bigcup E_{j+a-1}$, где объединение берется по всем $j \in N$, $1 \leq j \leq u$, таким, что $\varepsilon_j = 0$,
легко завершаем доказательство леммы.

Утверждения теоремы 2, пункта а) предложения 2 и замечания 2 к нему легко вытекают из леммы I.I, следствия леммы 3.6 и следующего тривиального утверждения (которое легко следует из леммы I.I).

ЛЕММА 3.7. Пусть $0<p<q<\infty$, $0<u, \sigma \leq \infty$, $0<\theta<1$, $q = p/\theta$. Тогда

$$c_1 h^*_{\omega, \sigma/p}(A) \geq \overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\sigma}),$$

$$c_2\,\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,\theta}) \geq \overline{cap}(A, BL^{\omega_1}_{q,1,1}),\ \omega_1 = \omega^{\theta},\ A \subset R^n.$$

Утверждение замечания к теореме 2 (относящееся к оценке емкости в пространстве $BL^{\ell}_{p,1}$ снизу) легко вытекает из лемм 3.8 и 3.9 (при $p > 1$, $u = p$), приводимых ниже.

ЛЕММА 3.8. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < u \leq \infty$, $A \subset R^n$, $\overline{cap}(A, BL^{\omega}_{p,u,1}) \leq 1$. Тогда в утверждении леммы I.I дополнительно можно считать, что $\mu_n(supp\, v_i) \leq c_5(\omega(2^{-i}))^p$, $i \in N_0$.

ЛЕММА 3.9. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 < u \leq \infty$, $D > 0$, $\Delta > 0$, $p < q$, h - непрерывная, возрастающая функция определенная на $[0, \infty)$ такая, что

а) $\int_0^1 (h(t))^{u'} dt/t \leq D$, $1/u' + 1/u = 1$,

в) $h(2t) \leq D h(t)$, $t > 0$.

Тогда, если $\{E_j\}_{j=1}^{m}$ - набор множеств,

$$E_j \subset R^n,\ \mu_n(E)\Delta < c_5,\ E = \bigcup_{j=1}^{m} E_j ,$$

$$c_3 \mu_n(E) \leq \mu_n(E_j) 2^{-j} \leq c_4 \mu_n(E),$$

$$v = \sum_{j=1}^{j=m} \beta_j \chi_{E_j},\ \beta_j > 0,\ j = 1, \ldots, m,$$

то имеет место оценка

$$|||v|||_{p,u,q} \geq c_6 \sum_{j=1}^{j=m} \beta_j (\mu(E_j))^{1/p} h(\Delta \mu_n E_j),$$

где $c_6 = c_6(D, c_3, c_4, c_5, p, u, q)$ - некоторая постоянная.

ЛЕММА 3.10. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $1 < u \leq \infty$, функция $h(t)$ - удовлетворяет условиям леммы 3.9. Тогда утверждение леммы 3.6 и следствия из нее останется справедливым, если дополнительно потребовать, чтобы последовательность $\{v_i\}_{i=0}^{+\infty}$ удовлетворяла соотношению $\mu_n(supp\, v_i) \leq c_5 \omega_i^p$, $i \in N_0$, и при этом величину

$|||\ldots|||_{p,1,q}$ всюду заменить на $|||\ldots|||_{p,u,q}$, а величины $(\mu_n(E))^{1/p}/\omega_0$ и $(\mu_n(E_i))^{1/p}/\omega_i$ заменить на величины $\varphi(\mu_n(E)/\omega_0^p)$ и $\varphi(\mu_n(E_i)/\omega_i^p)$, соответственно, где $\varphi(t)=h(t)t^{1/p}$.

Элементарное доказательство лемм 3.8-3.10 мы приводить не будем. Отметим только, что доказательство леммы 3.10 проводится аналогично доказательству леммы 3.6, но при этом вместо леммы 3.5 надо использовать лемму 3.9, а вместо части а) леммы 3.4 - часть в) той же леммы.

Пункты в) и с) предложения 2 мы доказывать не будем, однако заметим, что импликации 3) $\Longrightarrow$ I) легко могут быть выведены из пункта а) предложения 2 и следующего (в некотором смысле чисто технического) результата.

ЛЕММА 3.11. Пусть $p>1$, $0<\theta,\theta_1,u,u_1\leq\infty$, $1/\theta'=\max(0,1-1/\theta)$, $1/\theta_1'=\max(0,1-1/\theta_1)$, функции φ,φ_1 и последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0}^{i=+\infty}$ определены по функциям ω,ω_1 так же, как в утверждении пункта с) предложения 2; выполнено утверждение 3) пункта с) предложения 2. Тогда, если $A\subset R^n$, то

$$\overline{cap}(A,BL^{\omega_1}_{p,u_1,\theta_1})\leq c\,\overline{cap}(A,BL^{\omega}_{p,u,\theta}),$$

$$c=c(p,\omega,\omega_1,u,u_1,\theta,\theta_1).$$

3.4. Доказательство предложения 3.

Пусть далее $1\leq\theta<\infty$, $1\leq q<\infty$, $0<p<q$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $0\leq a\leq 1/2$, $A>0$, $0\leq|B|<A/2$. Тогда

I) $(1+a)^q\leq 1+ac_1$;

2) $(1-a)^q\leq 1-ac_2$;

3) Существует число β, $\beta=\beta(A,B)$ такое, что

$$(A+B)^{\theta/q}=A^{\theta/q}(1+\beta B/A),\quad c_3\leq\beta\leq c_4.$$

Здесь c_1,c_2,c_3,c_4 - некоторые постоянные, зависящие только от q и θ.

Элементарное доказательство леммы мы приводить не будем.

ЛЕММА 4.2. Существует постоянная $c_5=c_5(\theta,q)\geq 1$ такая, что если $m\in N$, $D>0$; $\{\nu_j\}_{j=1}^m$, $\{\Delta_j\}_{j=1}^m$, $\{a_j\}_{j=1}^m$ - последовательности положительных чисел, $\sum_{j=1}^m\Delta_j=1$; $c_5\nu_j\leq\Delta_j/2$, $j=1,\ldots,m$, то

$$\sum_{u=1}^{u=m} \Delta_u (D + \sum_{j\in I(u)} (a_j(1+v_j))^q +$$

$$+ ((1-c_5 v_u/\Delta_u) a_u)^q)^{\theta/q} \leq (D + \sum_{u=1}^{u=m} (a_j)^q)^{\theta/q},$$

$$I(u) = \{1,\dots,m\} \setminus \{u\}, \quad u\in N, \quad 1\leq u\leq m.$$

СЛЕДСТВИЕ леммы 4.2. Существует постоянная c_0, $c_0 = c_0(q,\theta)$, такая, что если $\{\Delta_j\}_{j=1}^m$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$, $\{a_j\}_{j=1}^m$ – последовательности положительных чисел, $m\in N$, $D>0$; $8c_0\lambda_j \leq \Delta_j$, $j=1,\dots,m$,

$$\sum_{j=1}^{j=m} \Delta_j = 1, \quad \text{то}$$

$$\sum_{u=1}^{u=m} \Delta_u (D + \sum_{j\in I(u)} (a_j/(1-2\lambda_j))^q +$$

$$+ (a_j(1-c_0\lambda_u/\Delta_u)/(1-\lambda_u))^q)^{\theta/q} \leq (D + \sum_{u=1}^{u=m} (a_j)^q)^{\theta/q},$$

$$I(u) = \{1,\dots,m\} \setminus \{u\}, \quad u\in N, \quad 1\leq u\leq m.$$

Утверждение леммы 4.2 легко выводится из леммы 4.I; при этом можно положить $c_5 = c_1 c_4/(c_2 c_3)$. Утверждение следствия сразу вытекает из леммы, если положить $c_0 = 4(c_5+2)$ и воспользоваться неравенствами

$$1/(1-2\lambda_j) \leq 1+4\lambda_j, \quad 1/(1-\lambda_j) \leq 1+2\lambda_j.$$

ЛЕММА 4.3. Пусть m, $\{\Delta_j\}_{j=1}^m$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ – такие же, как в утверждении следствия леммы 4.2, $\{G, g_1, g_2, \dots, g_m\}$ – множество измеримых функций, определенных на $R^{n\theta}$, с попарно не пересекающимися (в смысле меры Лебега) носителями;

$$G_u = G + \sum_{j\in I_u} g_j/(1-2\lambda_j) + (1-c_0\lambda_u/\Delta_u) g_u/(1-\lambda_u),$$

$$I(u) = \{1,\dots,m\} \setminus \{u\}, \quad u = 1,2,\dots,m;$$

$$G_0 = G + \sum_{j=1}^m g_j.$$

Тогда $\sum_{j=1}^m \Delta_j \|G_j\|_q^\theta \leq \|G_0\|_q^\theta$.

СЛЕДСТВИЕ леммы 4.3. Пусть выполнены условия леммы 4.3.

Тогда при любом $t > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta_j ((G_j)_{*,q}(t))^{\theta} \leq ((G_0)_{*,q}(t))^{\theta} .$$

Утверждение леммы 4.3 сразу следует из леммы 4.2 (смотри начало доказательства леммы 3.I).

ЛЕММА 4.4. Пусть $\{a_{j,i}\}_{j=0}^{m}{}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$ - последовательность положительных чисел;

$$(a_{0,i})^{\theta} \geqslant \sum_{j=1}^{m} (a_{j,i})^{\theta}, \ i \in Z .$$

Тогда $\left(\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} a_{0,i} \right)^{\theta} \geqslant \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} a_{j,i} \right)^{\theta}$.

СЛЕДСТВИЕ леммы 4.4. Пусть выполнены условия леммы 4.3. Тогда $\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \, \| G_j \|_{p,1,q}^{\theta} \leq \| G_0 \|_{p,1,q}^{\theta}$.

Утверждение леммы 4.4 сразу следует из неравенства Минковского.

ЛЕММА 4.5. Пусть c_0 - постоянная из леммы 4.3. Тогда существуют постоянные $c = c(p,q,c_0)$, $u = u(p,q,c_0) \in N$ такие, что если v, $v \in FST(i,1,\gamma)$, $\gamma > 0$, $i \in N_0$, то существуют a, $a \in N$, функция v_2, множества $\{E_j\}_{j=u}^{a}$, E_0 такие, что:

I) E_j есть объединение конечного числа ячеек вида $\{Q_{i,k}\}_{k \in Z^n}$, $j \in \{0\} \cup \{u, u+1, \ldots, a\}$;

2) множества $E_0, E_u, \ldots, E_a$ попарно дизъюнктны;

3) $v_2 = \sum_{j=u}^{j=a} 2^{-j} \chi_{E_j} + \chi_{E_0}$;

4) $\operatorname{supp} v_2 = \operatorname{supp} v$, $v \leq v_2$, $(\mu_n(E_0))^{1/p} \leq c \, \| v \|_{p,1,q}$,

$A = \sum_{j=u}^{j=a} 2^{-j} (\mu_n(E_j))^{1/p} \leq c \, \| v \|_{p,1,q}$;

5) если $A \neq 0$, то последовательность $\{\Delta_j\}_{j=u}^{a}$, $\Delta_j = 2^{-j} (\mu_n(E_j))^{1/p} / A$, удовлетворяет условию $8 c_0 2^{-j} \leq \Delta_j$, $j = u, \ldots, a$.

Элементарное, но технически громоздкое доказательство леммы 4.5 мы приводить не будем.

ЛЕММА 4.6. Пусть $0<p<q<+\infty$, $1\leq q$, $1\leq\theta<\infty$, $\alpha\in N_0$, $F\subset R^n$, $F_{\alpha-1}\subset R^n$, $\{\gamma_i\}_{i=0}^{+\infty}$, $\{\omega_i\}_{i=0}^{+\infty}$ – последовательности положительных чисел; $\{v_i\}_{i=0}^{+\infty}$ – последовательность функций, такие, что:

$$v_i\in FST(i,1,\gamma_i),\quad \|v_i\|_{p,1,q}<\infty,\quad 0<\gamma_i\leq 1,$$

$$i\in N_0,\quad \sum_{i=0}^{+\infty} v_i\geq \chi_{F\setminus F_{\alpha-1}};$$

$$\sum_{i=0}^{i=\alpha-1} v_i\geq 1/2\,\chi_{F_{\alpha-1}},\quad \Big(\sum_{i=0}^{i=\alpha-1} v_i\Big)\chi_{F\setminus F_{\alpha-1}}<1/2,$$

если $\alpha\in N$;

$F_{\alpha-1}$ есть объединение конечного числа ячеек вида $\{Q_{\alpha-1,k}\}_{k\in Z^n}$, если $\alpha\in N$, и $F_{\alpha-1}=\emptyset$, если $\alpha=0$.

Тогда существуют последовательность функций $\{v_{1,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ и множества E, E_0, $F_\alpha\subset R^n$, удовлетворяющие условиям:

1) $v_{1,i}\in FST(i,1,\gamma_i/2)$, $\operatorname{supp} v_{1,i}\subset \operatorname{supp} v_i$, $i\in N_0$;

2) $v_{1,\alpha}=a\chi_E+\chi_{E_0}$, $0\leq a\leq 1/2$;

3) $v_{1,i}=v_i$, если $i\in N_0$, $i\leq\alpha-1$;

4) множество F_α есть объединение конечного числа ячеек вида $\{Q_{\alpha,k}\}_{k\in Z^n}$;

5) $\sum_{i=0}^{i=\alpha} v_{1,i}\geq 1/2\,\chi_{F_\alpha}$,

$$\Big(\sum_{i=0}^{i=\alpha} v_{1,i}\Big)\chi_{F\setminus F_\alpha}<1/2,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} v_{1,i}\geq\chi_{F\setminus F_\alpha};$$

6) $$\Big(\big(\max((\mu_n(E_0))^{1/p}/c,\ a(\mu_n(E))^{1/p}/(cc_0))/\omega_\alpha\big)^\theta+$$

$$+\sum_{i=\alpha+1}^{+\infty}\Big(\|v_{i,1}\|_{p,1,q}/\omega_i\Big)^\theta\leq\sum_{i=\alpha}^{+\infty}\Big(\|v_i\|_{p,1,q}/\omega_i\Big)^\theta.$$

Здесь c_0, c - постоянные из предыдущей леммы.

Следствие из леммы 4.6. Пусть выполнены условия леммы 4.6 при $\alpha = 0$ и кроме того известно, что при любом $x \in F$ лишь конечное число членов последовательности $\{v_i(x)\}_{i=0}^{+\infty}$ не равно нулю. Тогда существует последовательность функций $\{v_{3,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ такая, что

I) $v_{3,i} = \chi_{E(0,i)} + a_i \chi_{E(i)}$, $0 \leq a_i \leq 1/2$; $E(0,i), E(i) \subset R^n$; $v_{3,i} \in FST(i,1,0)$, $i \in N_0$;

2) $\sum_{i=0}^{+\infty} v_{3,i} \geq 1/2\, \chi_F$;

3) $\sum_{i=0}^{+\infty} (\| v_{3,i} \|_{p,1} / \omega_i)^\theta \leq$

$$\leq c_1 \sum_{i=0}^{+\infty} (\| v_i \|_{p,1,q} / \omega_i)^\theta ,$$

где $c_1 = c_1(p, q, \theta)$ - некоторая постоянная.

Доказательство леммы 4.6 проводится аналогично доказательству леммы 3.6, но при этом вместо лемм 3.2 и 3.4 следует использовать следствие из леммы 4.4 и лемму 4.5.

Утверждение предложения 3 сразу вытекает из леммы I.I и следствия леммы 4.6.

Литература

I. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М., I986.

2. Adams D.R. Exeptional sets for Besov spaces. - In: Linear and complex analysis problem book "Springer" Lect. Notes Math. Vol.1043, 1984, p.515-518.

3. Adams D.R. The classification problem for the capacity associated with the Besov and Lizorkin-Tribel spaces. Preprint. Lexington (KY): Univ.Ky press, 1987.

4. Adams D.R. The classification problem for the capacity associated with the Besov and Tribel-Lizorkin spaces. In: Approximation and function spaces, PWN-Polish scientific publishers, Banach center publications, Vol.22, 1989, p.9-24.

5. Н е т р у с о в Ю.В. Метрические оценки емкостей множеств в пространствах Бесова. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1989, т.190, с.159-185.
6. Н е т р у с о в Ю.В. Множества особенностей функций из пространств типа Бесова и Лизоркина-Трибеля. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1989, т.187, с.162-178.

Netrusov Y.V. Estimates of capacities associated with Besov spaces.

Summary

Let X be the Besov space $BL^{\ell}_{p,\theta}(R^n)$, $0<p<\infty$, $0<\theta\leq\infty$, $0<\ell p<n$. Let $\overline{cap}(\cdot, X)$ be the capacity associated with the space X (defined on subsets of R^n) and φ be a function defined on $[0,1]$ such that $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ and for some $\varepsilon>0$ the functions $\varphi(t)t^{-\varepsilon}$, $t^{n-\varepsilon}/\varphi(t)$ increase.

DEFINITION. Let $A\subset R^n$, $0<\beta<\infty$. Define

$$h_{\varphi,\beta}(A)=\inf\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(m_i\,\omega(2^{-i}))^{\beta}\right)^{1/\beta},$$

where the infimum is taken over all coverings of A by a countable number of balls, whose radii r_j do not exceed 1, while m_i is the number of balls from this covering whose radii r_j belong the set $(2^{-i-1}, 2^{-i}]$, $i\in N_0$.

THEOREM 1. Let $p\leq 1$, $\theta=\infty$, and let the function $\varphi(t)t^{\ell p-n}$ increase. Then the following condition are equivalent:

a) for any compact set K, $K\subset R^n$, if $\overline{cap}(K,X)=0$ then $h_{\varphi,\infty}(K)=0$.

b) $\sum_{i=0}^{+\infty}(\varphi(1/x_i)x_i^{n-\ell p})^{1/p}<+\infty$, $x_0=1$, $x_{i+1}=2^{x_i}$, $i\in N_0$.

THEOREM 2. Let $\theta<1$. Then for any set A the inequalities $c_1\overline{cap}(A,X)\leq h_{t^{n-\ell p},\theta/p}(A)\leq c_2\overline{cap}(A,X)$ hold.