МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 32, № 4 (1982)

ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ С КОМПЛЕКСНОЙ ФАЗОЙ

В. Г. Данилов, И. А. Джемесюк

Введение. Интегральные операторы Фурье (и.о.ф.) изучаются и используются в большом числе работ, однако точные оценки для и.о.ф. известны лишь в L_2 для случая вещественной фазы и амплитуды, принадлежащей пространству $S^m_{\rho\delta}$ при $\rho < \delta$ (см. [1]). В [2] установлено совпадение между и.о.ф. с комплексной фазой и псевдодифференциальным оператором (п.д.о.), символ которого есть канонический оператор Маслова на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком. П.д.о. с такими символами изучались в [3] и, в общем случае, в [4]. В работах [3], [4] получены точные оценки для п.д.о., символом которого является канонический оператор Маслова на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком. В силу результатов [2] эти оценки переносятся на случай и.о.ф., каноническое соотношение которого является локально каноническим графиком. Целью данной работы является получение с помощью техники, развитой в [3], точных по порядку оценок для и.о.ф. с комплексной фазой в пространствах Соболева без предположения о том, что каноническое соотношение, отвечающее и.о.ф., есть локально канонический график. Напомним, что и.о.ф. есть линейная комбинация выражений вида

$$I(\Phi, a)\, u = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\Phi(x,y,p)} a(x, y, p)\, u(y)\, dy\, dp, \quad (0.1)$$

где $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $x \in \mathbf{R}^k$, $p \in \mathbf{R}^N$, $a(x, y, p) \in S^m_{\rho\delta}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$, $\Phi(x, y, p)$ — невырожденная комплексная операторная фазовая функция, т. е. такая функция, что при любом фиксированном $y(x)$ отображение $(x, p) \to \to \Phi(x, y, p)$, $((y, p) \to \Phi(x, y, p))$ не имеет критических точек. Последнее условие, как известно, обеспечивает корректность определения осциллирующих интегралов вида (0.1) (см. [1]). Мы рассмотрим случай $k = n = N$, $\delta \geqslant 1/2$, $\rho \leqslant 1/2$ и предположим, что носитель функции $a(x, y, p)$ сосредоточен в некоторой малой конической по p окрестности точки (x_0, y_0, p_0) множества c_Φ:

$$c_\Phi = \{(x, y, p)\colon \nabla_p \Phi(x, y, p) = 0, \operatorname{Im} \Phi(x, y, p) = 0\}, \quad (0.2)$$

где $\nabla_p = (\partial/\partial p_1, \partial/\partial p_2, \ldots, \partial/\partial p_n)$. Ясно, что если носитель $a(x, y, p)$ не пересекается с конической окрестностью множества c_Φ, то оператор $I(\Phi, a)$ является сглаживающим в пространствах Соболева $H_s(\mathbf{R}^n)$ (см. [2]). Положим $\operatorname{Re} \Phi(x, y, p) = \Phi_1(x, y, p)$, $\operatorname{Im} \Phi(x, y, p) = \Phi_2(x, y, p)$, $b(x, y, p) = \exp(-\Phi_2(x, y, p)) a(x, y, p)$. В силу результатов [1] $b(x, y, p) \in \int S^m_{\rho\delta}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. Поэтому исследование операторов вида (0.1) с комплексной фазовой функцией при сделанных предположениях сводится к исследованию операторов вида

$$I(\Phi_1, b)\, u = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\Phi_1(x, y, p)}\, b(x, y, p)\, u(y)\, dy\, dp, \quad (0.3)$$

где Φ_1 — вещественная операторная фазовая функция $b \in S^m_{\rho\delta}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ и носитель функции b сосредоточен в малой конической по p окрестности точки (x_0, y_0, p_0) такой, что $\nabla_p \Phi_1(x_0, y_0, p_0) = 0$.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. *При приведенных выше предположениях для любого s оператор $I(\Phi, a)$ (0.1) удовлетворяет оценке*

$$\| I(\Phi, a)\, u \|_s \leqslant c_s \| u \|_{s+m},$$

где константа c_s не зависит от функции $u(x)$.

Как мы уже отмечали выше, оценки для оператора $I(\Phi, a)$ с комплексной фазой получаются из оценок для оператора вида (0.3) с вещественной фазовой функцией, к изучению которого мы переходим.

§ 1. Оценки в L_2 для и.о.ф. с вещественной фазовой функцией. В этом параграфе мы докажем следующую теорему для операторов вида (0.3).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\Phi(x, y, p)$ — операторная фазовая функция, а функция $a(x, y, p)$ принадлежит про-*

странству $S^0_{1/2,\,1/2}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, *т. е. удовлетворяет соотношениям*

$$|D^\alpha_{x,y}D^\beta_p a(x,y,p)|\leqslant c_{\alpha,\beta}(1+|p|)^{\alpha/2-\beta/2}, \tag{1.1}$$

где $c_{\alpha,\beta}$ *— некоторые константы. Предположим, что носитель функции* $a(x,y,p)$ *принадлежит малой конической по* p *окрестности точки* $(x_0,y_0,p_0)\in c_\Phi$. *Тогда для оператора* I, *определенного на функциях из* $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbf{R}^n)$ *равенством*

$$I(\Phi,a)u=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta}a(x,y,p)\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp \tag{1.2}$$

справедлива оценка

$$\|I(\Phi,a)u\|_{L_2}\leqslant c\|u\|_{L_2}, \tag{1.3}$$

где константа c *не зависит от функции* $u(x)$.

ЛЕММА 1.1. *Если функция* $a(x,y,p)$ *обращается в нуль в некоторой окрестности* Ω *множества* c_Φ, *то справедливо неравенство* (1.3).

Доказательство очевидно (см. [2]).

Не ограничивая общности, будем считать, что носитель функции $a(x,y,p)$ сосредоточен в малой конической по p окрестности Ω множества c_Φ. Так как $\Phi(x,y,p)$ — операторная фазовая функция, то существуют $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, что на носителе функции $a(x,y,p)$

$$\delta_1|p|\leqslant|\Phi_y(x,y,p)|\leqslant\delta_2|p|. \tag{1.4}$$

ЛЕММА 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для оператора* I_{M_0}, *действующего на функции из* $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbf{R}^n)$ *по формуле*

$$I_{M_0}(\Phi,a)u=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{|p|\geqslant M_0|\eta|}e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta}\cdot a(x,y,p)\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp, \tag{1.5}$$

где $M_0=2/\delta_1$, *справедливо неравенство*

$$\|I_{M_0}(\Phi,a)u\|_{L_2}\leqslant c\|u\|_{L_2}, \tag{1.6}$$

где константа c *не зависит от функции* $u(x)$.

Доказательство. Пусть $|p|\geqslant 2|\eta|/\delta_1$, тогда справедлива цепочка неравенств

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\eta\right|\geqslant\left|\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|-|\eta|\right|\geqslant|\delta_1|p|-|\eta||\geqslant|\eta|. \tag{1.7}$$

Предположим, что $|\eta| \leqslant 1$, и воспользуемся равенством

$$e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta} = \left(1 + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right|^2 - i\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j \partial y_k}\right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \left\langle -i\frac{\partial}{\partial y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\right) e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta}.$$

Подставим это выражение для экспоненты в (1.5) и проинтегрируем по частям по y. Проделав это M раз, получим сумму выражений вида

$$I_{M_0}^{\alpha\beta}(\Phi, a)\, u = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{|p|\geqslant M_0|\eta|} e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_\alpha(x,y,p)\, G_\beta(p)\, \tilde{u}(\eta)}{\left(1 - i\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j \partial y_k} + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right|^2\right)^{M+\beta}}\, dy\, d\eta\, dp,$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 2M$, $\alpha + \beta \leqslant 2M$, $|G_\beta(p)| \leqslant c\,|p|^{2\beta}$ и $a_\alpha(x,y,p) = (\partial/\partial y)^\alpha a(x,y,p)$.

Оценим подынтегральное выражение в последнем равенстве, для этого воспользуемся неравенством Питре

$$(1 + |y|)/(1 + |x - y|) \leqslant 1 + |x| \qquad (1.8)$$

и соотношениями (1.1), (1.4), (1.7), тогда, выбирая $M \geqslant n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, получим

$$\left|\frac{e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta} a_\alpha(x,y,p)\, G_\beta(p)\, \tilde{u}(\eta)}{\left(1 - i\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j \partial y_k} + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right|^2\right)^{M+\beta}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \frac{\varphi(x,y)\, |\tilde{u}(\eta)|\, (1 + |p|)^{2\beta+\alpha/2}}{\left(1 + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right|\right)^{2M+2\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \frac{\varphi(x,y)\, |\tilde{u}(\eta)|\, \left(1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^{\alpha/2+2\beta+n+\varepsilon}}{(1 + |p|)^{n+\varepsilon}\left(1 + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right|\right)^{2M+2\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \frac{\varphi(x,y)\, |\tilde{u}(\eta)|\, (1 + |\eta|)^{\alpha/2+2\beta+n+\varepsilon}}{(1 + |p|)^{n+\varepsilon}\left(1 + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right|\right)^{2M-n-\varepsilon-\alpha/2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \frac{\varphi(x,y)\, /\tilde{u}(\eta)|\, (1 + |\eta|)^{\alpha/2+2\beta+n+\varepsilon}}{(1 + |p|)^{n+\varepsilon}(1 + |\eta|)^{M-n-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \frac{\varphi(x,y)\, |\tilde{u}(\eta)|\, (1 + |\eta|)^{4M+2n+2\varepsilon}}{(1 + |p|)^{n+\varepsilon}},$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — некоторые константы, а $\varphi(x, y)$ — неотрицательная функция с компактным носителем. Согласно неравенству Коши — Буняковского при $|\eta| \leqslant 1$

$$\| I_{M_0}^{\alpha\beta}(\Phi, a) u \|_{L_2}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int_{\mathrm{R}^n} \int_{\mathrm{R}^n} \int_{|p| \geqslant M_0 |\eta|} c_5 (|\tilde{u}(\eta)| \varphi(x, y) (1 + |\eta|)^{4M+2n+2\varepsilon}/(1 + \right.$$
$$\left. + |p|)^{n+\varepsilon}) \, dy \, dp \, d\eta \right\|_{L_2}^2 \leqslant c_6 \| u \|_{L_2}^2, \quad (1.9)$$

где c_6 — константа, не зависящая от функции $u(x)$.

Пусть $|\eta| \geqslant 1$, воспользуемся равенством

$$e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} =$$
$$= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \eta, -i \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \Big/ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \eta \right|^2.$$

Подставим это выражение для экспоненты в (1.5) и проинтегрируем по частям по y. Проделав это M раз, получим сумму выражений вида

$$I_{M_0}^{\alpha\beta}(\Phi, a) u = \int_{\mathrm{R}^n} \int_{\mathrm{R}^n} \int_{|p| \geqslant M_0 |\eta|} (e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} a_\alpha(x, y, p) \cdot$$
$$\cdot G_\beta(p) \tilde{u}(\eta) / |\partial \Phi / \partial y - \eta|^{M+\beta}) \, dy \, dp \, d\eta, \quad (1.10)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, M, \alpha + \beta = M$, $a_\alpha(x, y, p) = (\partial/\partial y)^\alpha \cdot a(x, y, p)$ и $G_\beta(p) \leqslant c |p|^\beta$, c — некоторая константа.

Справедливо равенство

$$e^{i\Phi(x, y, p)} = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^{-2} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}, -i \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle e^{i\Phi(x, y, p)}.$$

Подставим это выражение для экспоненты в (1.10) и проинтегрируем по частям по y. Проделав это N раз, получим сумму выражений вида

$$I_{M_0}^{\alpha\beta ijk}(\Phi, a) u = \int_{\mathrm{R}^n} \int_{\mathrm{R}^n} \int_{|p| \geqslant M_0 |\eta|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \cdot$$
$$\cdot \frac{\eta^k a_{i+j}(x, y, p) G_{\beta+j}(p)}{|\partial \Phi / \partial y - \eta|^{M+\beta+j} |\partial \Phi / \partial y|^N} \tilde{u}(\eta) \, d\eta \, dy \, dp,$$

где $i, j, k = 0, 1, \ldots, N$ и $i + j + k = N$. Воспользуемся неравенствами (1.1), (1.4), (1.7) и неравенством

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \Big/ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} - |\eta| \right| \leqslant |\eta|,$$

справедливом при условиях (1.7) и $|\eta| \geqslant 1$. Тогда

$$\frac{|\eta|^k a_{i+\alpha}(x, y, p)\, G_{\beta+j}(p)|}{|\partial\Phi/\partial y - \eta|^{M+\beta+j}\, |\partial\Phi/\partial y|^N} \leqslant c_1 \frac{|\eta|^k (1+|p|)^{(i+\alpha)/2}\, |p|^{j+\beta}}{|\partial\Phi/\partial y - \eta|^{M+\beta+j}\, |\partial\Phi/\partial y|^N} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \frac{|\eta|^{k+j+\beta/2} (1+|p|)^{(i+\alpha)/2+n+\varepsilon}}{|\partial\Phi/\partial y - \eta|^{M+\beta/2}\, |\partial\Phi/\partial y|^{N-\beta/2} (1+|p|)^{n+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \frac{|\eta|^{k+j+(\beta+i)/2} (1+|p|)^{-n-\varepsilon}}{|\partial\Phi/\partial y - \eta|^{M+(\beta-i)/2}\, |\partial\Phi/\partial y|^{N-(\beta+\alpha)/2-n-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 (1+|p|)^{-n-\varepsilon} |\eta|^{-n-\varepsilon}$$

при $N = 3(n+1)$ и $M = 4(n+1)$, где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые константы. Из этой оценки следует, что

$$\| I(\Phi, a) u \|_{L_2} \leqslant c \| u \|_{L_2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что оператор

$$I_1(\Phi, a) u \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|p|<2|\eta|/\delta_1} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \cdot$$

$$\cdot a(x, y, p)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta\, dy\, dp \qquad (1.11)$$

удовлетворяет оценке $\| I_1(\Phi, a) u \|_{L_2} \leqslant c \| u \|_{L_2}$ для любой функции $u(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем константа c не зависит от функции $u(x)$. Воспользуемся равенством

$$e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} =$$

$$= \Big(1 + \Big(-i \sum_{k, j} \partial^2\Phi/\partial y_k \partial y_j + |\partial\Phi/\partial y - \eta|^2\Big) \Big/ 1 + |p|\Big)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \Big(1 + \Big\langle -i \frac{\partial}{\partial y}, -i \frac{\partial}{\partial y} \Big\rangle \Big/ 1 + |p|\Big) e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta}.$$

Подставим это равенство в 1.11 и проинтегрируем полученное выражение по частям по y, проделав это r раз, получим сумму выражений вида

$$I_{ij}(\Phi, a) u = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|p| \leqslant 2|\eta|/\delta_1} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_i(x, y, p)\, |\partial\Phi/\partial y - \eta|^j\, \tilde{u}(\eta)}{\left(1 + \dfrac{-i \sum_{k, j} \partial^2\Phi/\partial y_k \partial y_j + |\partial\Phi/\partial y - \eta|^2}{1 + |p|}\right)^{r+j}} dy\, d\eta\, dp,$$

где $i + j = 2r$, $i, j = 0, 1, \ldots, 2r$, $|a_i(x, y, p)| \leqslant \text{const}$.

Следуя [5], рассмотрим семейство операторов, зависящих от параметра p:

$$I_{ij}^{p}(\Phi, a)u = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{|p|\leqslant 2|\eta|/\delta_1} \mathrm{e}^{i\Phi(x, y, p)-y\eta}\cdot$$
$$\cdot\frac{a_i(x, y, p)\,|\,\partial\Phi/\partial y - \eta\,|^j\,\tilde{u}(\eta)}{\left(\dfrac{-i\sum_{k,j}\partial^2\Phi/\partial y_k\partial y_j + |\,\partial\Phi/\partial y - \eta\,|^2}{1+|\,p\,|}+1\right)^{r+j}}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y. \qquad (1.12)$$

Очевидно, что $I_{ij}(\Phi, a) = \int_{\mathbf{R}^n} I_{ij}^{p}(\Phi, a)\,\mathrm{d}p$. Докажем, что семейство операторов $I_{ij}^{p}(\Phi, a)$ равномерно ограничено по p. Для этого воспользуемся известной леммой об оценке интегральных операторов.

ЛЕММА 1.3. *Пусть измеримая функция* $K(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$ *удовлетворяет оценкам*

$$\int_{\mathbf{R}^n}|\,K(x, y)\,|\,\mathrm{d}x \leqslant c, \quad \int_{\mathbf{R}^n}|\,K(x, y)\,|\,\mathrm{d}y \leqslant c,$$

где $c = \mathrm{const}$. *Тогда интегральный оператор* $\widehat{K}$ *с ядром* $K(x, y)$ *ограничен в* $L_2(\mathbf{R}^n)$, $\|\widehat{K}\|_{L_2\to L_2} \leqslant c$.

Ядро оператора $I_{ij}^{p}(\Phi, a)$ *имеет вид*

$$K_p(x, \eta) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{i\Phi(x, y, p)-y\eta} a(x, y, p)\,|\,\partial\Phi/\partial y - \eta\,|^j}{\left(1+\dfrac{-i\sum_{k,j}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y_k\partial y_j}+\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}-\eta\right|^2}{1+|\,p\,|}\right)^{r+j}}\,\mathrm{d}y,$$

причем $K_p(x, \eta) = 0$ *при* $|\,p\,| \geqslant 2\,|\,\eta\,|/\delta_1$.

Так как проекция носителя функции $a_i(x, y, p)$ на $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_y^n$ есть компакт, то справедливо неравенство (1.1) и $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - \eta\right| \geqslant \delta_1\,|\,p\,|/2$ при $|\,p\,| \leqslant 2\,|\,\eta\,|/\delta_1$, то при $r \geqslant n+1$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbf{R}^n}|\,K_p(x, \eta)\,|\,\mathrm{d}x \leqslant c_1(1+|\,p\,|)^{-n-1}, \qquad (1.13)$$

где c_1 — некоторая константа.

Оценим интеграл $\int_{\mathbf{R}^n}|\,K_p(x, \eta)\,|\,d\eta$. Переходя к переменным

$$\xi = (\Phi_y - \eta)/(1+|\,p\,|)^{1/2},$$

получим

$$\int_{\mathbf{R}^n} | K_p(x, \eta) | \, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|\eta| \geqslant \delta_1 |p|/2} \frac{a_i(x, y, p) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \eta \right|^j}{\left(1 + \frac{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \eta \right|^2}{1 + |p|} \right)^{r+j}} \, dy \, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|\eta| \geqslant \delta_1 |p|/2} \frac{| a_i(x, y, p) |}{\left(1 + \frac{| \partial\Phi/\partial y - \eta |^2}{1 + |p|} \right)} \, dy \, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|\xi| \geqslant M} \frac{(1 + |p|)^{n/2} | a_i(x, y, p) |}{(1 + |\xi|^2)^r} \, dy \, d\xi,$$

где $M = \delta_1 \, | p |/(2 (1 + | p |)^{1/2})$. Учитывая, что проекция носителя функции $a_i(x, y, p)$ на $\mathbf{R}_y^n$ есть компакт, и неравенство $1 + | \xi |^2 \geqslant (1 + | \xi |)^2/2$, получим

$$\int_{\mathbf{R}^n} | K_p(x, \eta) | \, d\eta \leqslant c \int_{|\xi| \geqslant M} \frac{(1 + |p|)^{n/2}}{(1 + |\xi|)^{2r}} \, d\xi \leqslant c \, \frac{1 + |p|^{n/2}}{(1 + M)^{2r - M}},$$

где c — некоторая константа, или, иначе,

$$\int_{\mathbf{R}^n} | K_p(x, \eta) | \, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{(1 + |p|)^{n/2 + n + \varepsilon}}{(1 + |p|)^{n + \varepsilon} \left(1 + \frac{\delta_1 |p|}{2(1 + |p|)^{1/2}} \right)^{2r - n}} \leqslant \frac{c}{(1 + |p|)^{n + \varepsilon}} \qquad (1.14)$$

при $r \geqslant 2n + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое число. Из леммы 1.3 следует, что последовательность операторов $I_{ij}^p(\Phi, a)$ равномерно ограничена по p для любых $i, j = 0, 1 \ldots, 2r$.

$$I_{ij}^{p_1}(\Phi, a) \, [I_{kl}^{p_2}(\Phi, a)]^* \, u =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|\eta| \geqslant \delta_1 \frac{|p_1|}{2}} \int_{|\xi| \geqslant \delta_1 \frac{|p_2|}{2}} \Big\{ \exp(i\Phi(x, y, p_1) -$$

$$- i\Phi(z, \xi, p_2) - iy\eta - iz\zeta + i\eta\xi) \cdot a_i(x, y, p_1) \, a_k(z, \zeta, p_2) /$$

$$/ \left[\left(1 + \left(-i \sum\nolimits_{l, j} \frac{\partial^2 \Phi(x, y, p_1)}{\partial y_l \partial y_j} + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, p) - \eta \right|^2 \right) \right/ \right.$$

$$\left. / (1 + |p_1|) \right)^r \cdot \left(1 + \left(-i \sum\nolimits_{l, j} \frac{\partial^2 \Phi(z, \zeta, p_2)}{\partial \zeta_l \partial \zeta_j} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(z, \zeta, p_2) - \eta \right|^2 \right) \Big/ (1 + |p_2|) \right)^r \Big] \Big\} \cdot d\xi \, dz \, d\zeta \, d\eta \, dy. \qquad (1.15)$$

Ядро $Q_{p_1p_2}(x, \xi)$ интегрального оператора (1.15) имеет вид

$$Q_{p_1p_2}(x,\xi)=\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{|\eta|\geqslant\delta_1|p_1|/2}\Big\{\exp\big(i\Phi(x,y,p_1)-$$

$$-i\Phi(z,\zeta,p_2)-iy\eta-iz\zeta+i\eta\zeta\big)\cdot a_i(x,y,p_1)\,a_k(z,\zeta,p_2)/$$

$$\Big/\Big[\Big(1+\Big(-i\sum_{l,\,j}\frac{\partial^2\Phi(x,y,p_1)}{\partial y_l\partial y_j}+$$

$$+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,p_1)-\eta\right|^2\Big/(1+|p_1|)\Big)^r\times$$

$$\times\Big(1+\Big(-i\sum_{l,\,j}\frac{\partial^2\Phi(z,\zeta,p_2)}{\partial\zeta_l\partial\zeta_j}+$$

$$+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(z,\zeta,p_2)-\eta\right|^2\Big)\Big/(1+|p_2|)\Big)^r\Big]\Big\}\cdot\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\eta,\qquad(1.16)$$

причем $Q_{p_1p_2}(x,\zeta)=0$ при $|\zeta|\leqslant\delta_1|p_2|/2$.

Заметим, что интегрирование по y, ζ, z в (1.16) ведется по компакту. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что в силу леммы 1.3 справедливо неравенство

$$\|I_{ij}^{p_1}(\Phi,a)[I_{kl}^{p_2}(\Phi,a)]^*\|_{L_2\to L_2}\leqslant c(1+|p_1|)^{-n-\varepsilon}(1+|p_2|)^{-n-\varepsilon},$$

где c — некоторая константа, $i, j, k, l=0, 1,\ldots, 2r$.

$$h^2(p_1,p_2)\overset{\text{def}}{=}(1+|p_1|)^{-n-\varepsilon}(1+|p_2|)^{-n-\varepsilon},$$

тогда

$$\|I^{p_1}(\Phi,a)[I^{p_2}(\Phi,a)]^*\|_{L_2\to L_2}\leqslant ch^2(p_1,p_2).$$

Аналогичная оценка справедлива и для оператора $[I^{p_1}(\Phi,a)]^*I^{p_2}(\Phi,a)$, причем

$$\|[I^{p_1}(\Phi,a)]^*I^{p_2}(\Phi,a)\|_{L_2\to L_2}\leqslant ch^2(p_1,p_2)$$

и $h(p_1,p_2)$ является ядром ограниченного в L_2 оператора. Выполнены условия леммы [5]. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции* $a(x,y,p)$ *и* $\Phi(x,y,p)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда для оператора* $I(\Phi,a)$, *определенного на функциях из* $C_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ *равенством*

$$I(\Phi,a)u=$$

$$=\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}e^{i\Phi(x,y,p)-iy\eta}a(x,y,p)\,\tilde{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\qquad(2.1)$$

справедлива оценка $\|I(\Phi,a)u\|_{H_s}\leqslant c\|u\|_{H_s}$, *где константа* c *не зависит от функции* $u(x)$.

Как и в теореме 1, не ограничивая общности, можно считать, что носитель функции $a(x, y, p)$ сосредоточен в малой конической по p окрестности Ω множества c_Φ.

ЛЕММА 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *тогда операторы* $I_1(\Phi, a)$ *и* $I_2(\Phi, a)$, *действующие в* H_s *по формулам*

$$I_1(\Phi, a)u = \\ = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{|p|\geqslant 2|\eta|/\delta_1} e^{i\Phi(x, y, p)-iy\eta} a(x, y, p)\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp, \qquad (2.2)$$

$$I_2(\Phi, a)u = \\ = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{|p|\leqslant|\eta|/2\delta_1} e^{i\Phi(x, y, p)-iy\eta} a(x, y, p)\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp \qquad (2.3)$$

ограничены.

Доказательство этой леммы проведем позднее.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, тогда

$$\| I(\Phi, a)u \|_{H_s} = \Big\| \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big)^{s/2} \cdot \\ \cdot \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\delta_1|p|/2\leqslant|\eta|\leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(x, y, p)-iy\eta} a(x, y, p)\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp \Big\|_{L_2}. \qquad (2.4)$$

По формуле коммутации гамильтониана с экспонентой (см. [6, 3]) получим

$$\| I(\Phi, a)u \|_{H_s} = \Big\| \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\delta_1|p|/2\leqslant|\eta|\leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(x, y, p)-iy\eta} \cdot \\ \cdot \Big(1 + \Big(-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)^2\Big)^{s/2} a(x, y, p)\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp \Big\|_{L_2}. \qquad (2.5)$$

Рассмотрим оператор

$$f\Big(-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big) = \Big[1 + \Big(-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)^2\Big]^{s/2}. \qquad (2.6)$$

В этом равенстве оператор дифференцирования $-i\dfrac{\partial}{\partial x}$ и оператор умножения на функцию $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y, p)$ действуют одновременно, т. е. $f\Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y, p)\Big)$ есть функция от оператора $\Big[-i\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y, p)\Big]$. По формулам операторного исчисления [1, 6] он может быть представлен в виде разложения по степеням оператора $-i\dfrac{\partial}{\partial x}$:

$$f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y, p)\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{\gamma=0}^{m} L^{f}_{m\gamma}+R^{f}_{M}, \qquad (2.7)$$

где

$$L^{f}_{m\gamma}=\sum_{k=0}^{m-|\gamma|}\sum_{\substack{|\beta|=m-|\gamma|\\ \beta_l>1\\ l=1,\ldots,k}}\sum_{i^s_j=1}^{M} D_k(\beta,\gamma,m)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^{m+k} f\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y, p)\right)}{\partial p_{i^1_1}\ldots\partial p_{i_k^{\beta_k-1}}\,\partial p^{\gamma}_{k}}\;\frac{\partial^{\beta_1+1}\Phi(x, y, p)}{\partial x_{i^1_1}\ldots\partial x_{i_1^{\beta_1+1}}}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{\partial^{\beta_k+1}\Phi(x, y, p)}{\partial x_{i^1_k}\ldots\partial x_{i_k^{\beta_k+1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma},$$

$D_k(\beta, \gamma, m)$ — некоторые числовые коэффициенты,

$$R^{f}_{M}=\int_0^1 d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{M-1}} d\tau_M\,\overset{1}{[\mathscr{P}(\tau_M)\ldots\mathscr{P}(\tau_1)]}\cdot$$

$$\cdot f\left(\overset{3}{\left[-i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]}\tau_M+\overset{2}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]}(1-\tau_M)\right), \qquad (2.8)$$

где

$$\mathscr{P}(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\hat p_k}\right)_f\frac{\partial}{\partial x}+$$

$$+\tau\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x, y, p)}{\partial x_i\,\partial x_k}\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat p_i\,\partial\hat p_k}\right)_f$$

$\hat p_k=-i\partial/\partial x$ и символ $(\;)_f$ означает, что оператор в скобках применяется только к функции f. Таким образом,

$$f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y, p)\right)a(x, y, p)=$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{\gamma=0}^{m}L^{f}_{m\gamma}a(x, y, p)+R^{f}_{M}a(x, y, p). \qquad (2.9)$$

Подставим это разложение в (2.5), тогда

$$\|I(\Phi, a)u\|_{H_s}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{\gamma=0}^{m}\left\|\int_{R^n}\int_{R^n}\int_{\frac{\delta_1}{2}|p|\leqslant|\eta|\leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(x, y, p)-iy\eta}\,.\right.$$

$$\cdot L^f_{m\gamma} a(x, y, p)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta\, dy\, dp \Big\|_{L_2} +$$

$$+ \Big\| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\frac{\delta_1}{2} |p| \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1 |p|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} R^f_M a(x, y, p) \cdot$$

$$\cdot \tilde{u}(\eta)\, d\eta\, dy\, dp \Big\|_{L_2}. \qquad (2.10)$$

Оценим каждое из слагаемых. Обозначим

$$b_{m\gamma}(x, y, p) \stackrel{\text{def}}{=} L^f_{m\gamma}\, a(x, y, p). \qquad (2.11)$$

Так как $L^f_{m\gamma}$ — дифференциальные операторы и функция $a(x, y, p) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ имеет компактный носитель по x и по y, то и функция $b_{m\gamma}(x, y, p)$ принадлежит пространству $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ и имеет компактный носитель по x и по y. Докажем, что

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta+\sigma} b_{m\gamma}(x, y, p)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial p^\sigma} \right| \leqslant (1 + |p|)^{s + \frac{\gamma - 2m}{2} + \frac{\alpha+\beta-\sigma}{2}}. \qquad (2.12)$$

Так как $f\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, p)\right) = \left[1 + \left(\frac{\partial \Phi(x, y, p)}{\partial x}\right)^2\right]^{s/2}$ и $\Phi(x, y, p)$ — невырожденная операторная фазовая функция, то на любом компакте $\mathscr{K} \subset \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_y$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{m+k} f\left(\frac{\partial \Phi(x, y, p)}{\partial x}\right)}{\partial_{i_1^1} \ldots \partial p_{i_k^{\beta_k - 1}}\, \partial p_k^\gamma} \right| \leqslant c_k (1 + |p|)^{s-(m+k)}$$

и

$$\left| \frac{\partial^{m+k} f\left(\frac{\partial \Phi(x, y, p)}{\partial x}\right)}{\partial p_{i_1^1} \ldots \partial p_{i_k^{\beta_k-1}}\, \partial p_k^\gamma} \cdot \frac{\partial^{\beta_1+1} \Phi(x, y, p)}{\partial x_{i_1^1} \ldots \partial x_{i_1^{\beta_1+1}}} \cdot \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \cdot \frac{\partial^{\beta_k+1} \Phi(x, y, p)}{\partial x_{i_k^1} \ldots \partial x_{i_k^{\beta_k+1}}} \right| \leqslant c'_k (1 + |p|)^{s-m},$$

где c_k, c'_k — некоторые константы.

Заметим, что дифференцирование по x и по y не меняет их роста по p, а каждое дифференцирование по p дает убывание роста по p на единицу. Учитывая явный вид оператора $L^f_{m\gamma}$ (2.7), неравенство (1.1) и что функция $a(x, y, p)$ принадлежит пространству $S^0_{1/2,\, 1/2}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, получаем неравенство (2.12). Таким образом, мы показали, что функция $b_{m\gamma}(x, y, p) \in S_{1/2,\,1/2}^{s-m+\gamma/2}(\mathbf{R}^n \times \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Пусть $\widetilde{v}(\eta)$ такая функция, что

$$\widetilde{v}(\eta) = (1 + |\eta|^2)^{s/2}\, \widetilde{u}(\eta), \tag{2.13}$$

тогда

$$\| I_{m\gamma}(\Phi, a) u \|_{H_s} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\ = \left\| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\frac{\delta_1}{2}|p| \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1 |p|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} b_{m\gamma}(x, y, p) \cdot \right. \\ \left. \cdot\, \widetilde{u}(\eta)\, d\eta\, dy\, dp \right\|_{L_2} = \left\| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\frac{\delta_1}{2}|p| \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1 |p|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \right. \\ \left. \cdot\, b_{m\gamma}(x, y, p) \frac{\widetilde{v}(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}}\, d\eta\, dy\, dp \right\|_{L_2}. \tag{2.14}$$

Так как интегрирование ведется по множеству $\delta_1 |p|/2 \leqslant \leqslant |\eta| \leqslant 2|p|\delta_1$, то справедлива оценка

$$\| I_{m\gamma}(\Phi, a) u \|_{H_s} \leqslant \left\| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\frac{\delta_1 |p|}{2} \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1 |p|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{b_{m\gamma}(x, y, p)}{\left(1 + \frac{\delta_1^2}{4} |p|^2\right)^{s/2}}\, \widetilde{v}(\eta)\, d\eta\, dy\, dp \right\|_{L_2}.$$

Очевидно, что функция $\dfrac{b_{m\gamma}(x, y, p)}{(1 + \delta_1^2 |p|^2/4)^{s/2}}$ принадлежит пространству $S_{1/2,\,1/2}^{-m+\gamma/2}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. Учитывая, что $\gamma \leqslant m$ и $S_{\rho,\,\delta}^k \subset S_{\rho,\,\delta}^{k+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$, получим, что

$$\frac{b_{m\gamma}(x, y, p)}{(1 + \delta_1^2 |p|^2/4)^{s/2}} \in S_{1/2,\,1/2}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$$

и, согласно теореме 1 и равенству (2.13),

$$\| I_{m\gamma}(\Phi, a) u \|_{H_s} \leqslant c \| \widetilde{v}(\eta) \|_{L_2} \leqslant c \| \widetilde{u}(\eta) \|_{\widetilde{H}_s} \leqslant c \| u \|_{H_s} \tag{2.15}$$

Оценим остаточный член (ср. [3]). Согласно (2.8), (2.11) и 2.13) он имеет вид

$$\int_{n} \int_{n} \int_{\frac{\delta_1 |p|}{2} \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1 |p|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} [R_M^f a(x, y, p)] \cdot \\ \cdot \frac{\widetilde{v}(\eta)\, d\eta\, dy\, dp}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}} =$$

$$= \int_{R^n}\int_{R^n}\int_{\frac{\delta_1|p|}{2}\leqslant|\eta|\leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(x,\,y,\,p)-iy\eta}\int_0^1 d\tau_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{M-1}} d\tau_M \Big\{\prod_{j=1}^{M}\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial \hat p_k}\Big)_f \frac{\partial}{\partial x_k} +$$

$$+ \tau_M \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_k}\Big(\frac{\partial^2}{\partial \hat p_i\,\partial \hat p_k}\Big)_f\Big]^{1} f\Big(\Big[-i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big]^{3}\tau_M +$$

$$+\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big]^{2}(1-\tau_M)\Big)\, a(x,y,p)\Big\}\frac{\tilde v(\eta)}{(1+|\eta|^2)^{s/2}}\, d\eta\, dy\, dp =$$

$$= \int_{R^n}\int_{R^n}\int_{R^n}\int_{R^n}\int_{\frac{\delta_1|p|}{2}\leqslant|\eta|\leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(\zeta,\,y,\,p)-iy\eta+i\xi(x-\zeta)}\,\cdot$$

$$\cdot \int_0^1 d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{M-1}} d\tau_M f\Big(\xi\tau_M + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big)\,\cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{M}\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial \hat p_k}\Big)_f\frac{\partial}{\partial\zeta_k} + \tau_M\sum_{i,\,k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta_i\,\partial\zeta_k}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\hat p_k\,\partial\hat p_i}\Big)_f\Big]\,\cdot$$

$$\cdot\, a(\zeta,y,p)\frac{\tilde v(\eta)}{(1+|\eta|^2)^{s/2}}\, d\eta\, dy\, dp\, d\xi\, d\zeta. \qquad (2.16)$$

Номера над квадратными скобками указывают порядок действия операторов. В последнем равенстве мы воспользовались формулой коммутации [6], прокоммутировав экспоненту и оператор $f\Big(\Big[-i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big]^{3}\tau_M + \Big[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big]^{2}(1-\tau_M)\Big)$. Введем обозначение

$$f_\beta\Big(\tau_M\xi + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^{\beta} f\Big(\tau_M\xi + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big). \quad (2.17)$$

Тогда для оценки остаточного члена в L_2 достаточно показать, что в L_2 будет ограничено выражение

$$\int_{R^n}\int_{R^n}\int_{R^n}\int_{R^n}\int_{\delta_1|p|/2\leqslant|\eta|\leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(x,\,y,\,p)-iy\eta+i\xi(x-\zeta)}\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{M-1}} d\tau_M f_\beta\Big(\tau_M\xi + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big)\,\cdot$$

$$\cdot\, |\tau_M|^{\beta}\, d_j(\zeta,y,p)\frac{\tilde v(\eta)}{(1+|\eta|^2)^{s/2}}\, d\eta\, dy\, dp\, d\zeta\, d\xi, \quad (2.18)$$

где $\beta = 2M - j$, $j = 0, 1, \ldots, M$, и $\mathrm{d}_j(\zeta, y, p)$ — функция с компактным носителем по ζ и y, удовлетворяющая оценке

$$\left| \frac{\partial^{m+k+l} \mathrm{d}_j(\zeta, y, p)}{\partial \zeta^m \, \partial y^k \, \partial p^l} \right| \leqslant c_j (1 + |p|)^{M - \frac{j+|l|}{2} + \frac{|m|+|k|}{2}} \tag{2.19}$$

для любых m, k, l и некоторой константы c_j.

Для любого $q > 0$ справедливо равенство

$$e^{i\xi(x-\zeta)} = (1 + |x|^{2q})^{-1} \left(1 + \left(i \frac{\partial}{\partial \xi} - \zeta\right)^{2q}\right) e^{i\xi(x-\zeta)}.$$

Подставим это равенство в (2.18) и проинтегрируем по частям по ξ, тогда выражение (2.18) примет вид

$$\frac{1}{1 + |x|^{2q}} \int_{R^n} \int_{R^n} \int_{R^n} \int_{R^n} \int_{\frac{\delta_1|p|}{2} \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(\zeta, y, p) - iy\eta + i\xi(x-\zeta)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^1 \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{M-1}} \mathrm{d}\tau_M |\tau_M|^\beta \mathcal{F}_{\beta q} \left(\tau_M \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} (1 - \tau_M)\right) \cdot$$
$$\cdot \mathrm{d}_j(\zeta, y, p) \frac{\tilde{v}(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}} \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\zeta \, \mathrm{d}\xi, \tag{2.20}$$

где функция $\mathcal{F}_{\beta q}$, согласно соотношениям (2.8) и (2.7), удовлетворяет оценке

$$\left| \mathcal{F}_{\beta q}\left(\tau_M \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(1 - \tau_M)\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant c_{\beta q} \frac{1 + |\zeta|^{2q}}{\left(1 + \left|\tau_M \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(1 - \tau_M)\right|^2\right)^{\beta - s/2}}. \tag{2.21}$$

Справедлива

ЛЕММА 2.2. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2, тогда для функции* $\nu^j_{\beta q}(x, \eta)$, *заданной равенством*

$$\nu^j_{\beta q}(x, \eta) =$$
$$= \frac{1}{1 + |x|^{2q}} \int_{R^n} \int_{R^n} \int_{R^n} \int_{\frac{|\eta|}{2\delta_1} \leqslant |p| \leqslant \frac{2|\eta|}{\delta_1}} e^{i\Phi(\zeta, y, p) - iy\eta + i\xi(x-\zeta)} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}} \int_0^1 \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{M-1}} \mathrm{d}\tau_M |\tau_M|^\beta \mathcal{F}_{\beta q} \cdot$$
$$\cdot \left(\tau_M \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(1 - \tau_M)\right) \mathrm{d}_j(\zeta, y, p) \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\zeta \, \mathrm{d}\xi, \tag{2.22}$$

где $\beta = 2M - j$, $j = 0, 1, \ldots, M$ *и* q — *любое положительное число, справедливы неравенства*

$$\int_{\mathbf{R}^n} | \nu^j_{\beta q}(x, \eta) | \,\mathrm{d}x \leqslant c^j_{\beta q}, \quad \int_{\mathbf{R}^n} | \nu^j_{\beta q}(x, \eta) | \,\mathrm{d}\eta \leqslant c^j_{\beta q}, \quad (2.23)$$

где $c^j_{\beta q}$ — *некоторая константа.*

Из этой леммы, лемм 1.3 и 2.1 следует, что

$$\Big\| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\frac{\delta_1|p|}{2} \leqslant |\eta| \leqslant 2\delta_1|p|} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} [R^f_M a(x, y, p)] \cdot$$

$$\cdot \tilde{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p \Big\|_{L_2} \leqslant c \| v \|_{L_2} \leqslant c \| u \|_{H_s}.$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 2.1. Рассмотрим $\| I_j(\Phi, a)u \|_{H_s}$, где $j = 1, 2$ и операторы I_j определены равенствами (2.2) и (2.3). Заметим, что соболевские пространства вложены друг в друга, поэтому существует такое целое число λ_0, что $H_{2\lambda_0} \subset H_s \subset H_{2\lambda_0 - 2}$ и $\| \;\|_{H_{2\lambda_0-2}} \leqslant \| \;\|_{H_s} \leqslant \| \;\|_{H_{2\lambda_0}}$, тогда

$$\| I_j(\Phi, a) u \|_{H_s} \leqslant \| I_j(\Phi, a) u \|_{H_{2\lambda_0}} = \| (1 - \Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u \|_{L_2}.$$

По формуле коммутации гамильтониана с экспонентой (см. [3, 6]), получаем

$$\| (1 - \Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u \|_{L_2} = \\ = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\Omega_j} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} \left(1 + \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right)^{\lambda_0} \cdot \\ \cdot a(x, y, p)\, \tilde{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p \|_{L_2},$$

где $i, j = 1, 2$ и $\Omega_1 = \{\eta : |\eta| \leqslant \delta_1 |p| / 2\}$, $\Omega_2 = \{\eta : |\eta| \geqslant 2\delta_1 |p|\}$.

Для оператора $\left(1 + \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right)^{\lambda_0}$ справедливо разложение (2.7), причем остаток (2.8) равен нулю при $M \geqslant 2\lambda_0$, поэтому справедлива оценка

$$\| (1 - \Delta) \;\; I_j(\Phi, a) u \|_{L_2} \leqslant \\ \leqslant c \Big\| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\Omega_j} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} b_{\lambda_0}(x, y, p)\, \tilde{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p \Big\|_{L_2},$$

где $b_{\lambda_0}(x, y, p)$ принадлежит пространству $S^{2\lambda_0}_{\rho\delta}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Заметим, что на области Ω_1 справедливо соотношение

$$|\partial\Phi/\partial y - \eta| \geqslant |\eta|$$

и на области Ω_2 — соотношение

$$|\partial\Phi/\partial y - \eta| \geqslant |\eta|/2.$$

Повторяя рассуждения леммы 1.2, получим, что при $|\eta| \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(1-\Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\Omega_j} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} H(x, y, p, \eta)\,\tilde{v}(\eta)\,dy\,d\eta\,dp \right\|_{L_2},$$

где $\tilde{v}(\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1+|\eta|^2)^{\lambda_0-1}\tilde{u}(\eta)$, а функция $H(x, y, p, \eta)$ имеет компактный носитель по x и по y, а по p и по η при $M \geqslant 2\lambda_0 + n + \varepsilon$ удовлетворяет оценке

$$|H(x, y, p, \eta)| \leqslant c\,\frac{(1+|\eta|)^{4M+n+\varepsilon+6\lambda_0}}{(1+|p|)^{n+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$, c — некоторая константа. По неравенству Коши—Буняковского при $|\eta| \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(1-\Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u\|_{L_2}^2 \leqslant c\,\|\tilde{v}\|_{L_2}^2.$$

Аналогично лемме 1.2 при $|\eta| \geqslant 1$ получим, что

$$\|(1-\Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant c \left\| \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\Omega_j} e^{i\Phi(x, y, p) - iy\eta} H(x, y, p, \eta)\,\tilde{v}(\eta)\,d\eta\,dy\,dp \right\|_{L_2},$$

где $\tilde{v}(\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1+|\eta|^2)^{\lambda_0-1}\tilde{u}(\eta)$, а функция $H(x, y, p, \eta)$ имеет компактный носитель по x и по y, а по p и η при $M \geqslant 8\lambda_0 + 4n$ и $N \geqslant 6\lambda_0 + 3n + 1$ удовлетворяет оценке

$$|H(x, y, p, \eta)| \leqslant c(1+|p|)^{-n-\varepsilon}(1+|\eta|)^{-n-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$, c — некоторая константа; с учетом неравенства Коши—Буняковского получаем, что при $|\eta| \geqslant 1$ $\|(1-\Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u\|_{L_2}^2 \leqslant c\,\|\tilde{v}\|_{L_2}^2$. Таким образом,

$$\|I_j(\Phi, a) u\|_{H_s}^2 \leqslant c_1 \|(1-\Delta)^{\lambda_0} I_j(\Phi, a) u\|_{L_2}^2 \leqslant c_2 \|\tilde{v}\|_{L_2}^2 =$$
$$= c_2 \|(1+|\eta|^2)^{\lambda_0-1} u\|_{L_2}^2 \leqslant c_3 \|u\|_{H_s}^2,$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство леммы 2.2. Пусть

$$\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|,$$

тогда

$$\left|\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right|\geqslant\left|\left|\tau_M\left(\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)\right|-\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|\right|\geqslant$$
$$\geqslant\left|\frac{\tau_M}{2}-1\right|\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|.$$

Мы воспользовались тем, что $0\leqslant\tau_M\leqslant 1$. Согласно соотношениям (2.19), (2.21) и (1.5) справедливы неравенства

$$\left|\frac{1}{1+|x|^{2q}}\mathcal{F}_{\beta q}\left(\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right)\mathrm{d}_j(\zeta,y,p)(1+|\eta|^2)^{-s/2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant(1+|\zeta|^{2q})(1+|p|)^{M-j/2}\varphi(\zeta,y)\Big/\Big[(1+|x|^{2q})\cdot$$
$$\cdot(1+|\eta|^2)^{s/2}\left(1+\frac{1}{4}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^2\right)^{\frac{\beta-s-n-1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left|\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant(1+|\zeta|^{2q})\varphi(\zeta,y)|\psi_M^q(x,\zeta,y,p,\xi,\eta)|\Big/\Big((1+|x|^{n+1})\cdot$$
$$\cdot(1+|\eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}(1+|p|^2)^{\frac{n+1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left|\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}\Big),$$

где $\varphi(\zeta,y)$ — неотрицательная функция с компактным носителем, а для функции $\psi_M^q(x,\zeta,y,p,\xi,\eta)$ справедлива оценка

$$|\psi_M^q(x,\zeta,y,p,\xi,\eta)|\leqslant\mathrm{const}$$

при $M\geqslant 6(n+1)$, $q>[(n+1)/2]$.

Считая, что $M\geqslant 6(n+1)$ и $q>[(n+1)/2]$, получим доказательство утверждения леммы 2.2 в случае $\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|$. Пусть теперь $\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|$. Рассмотрим оператор

$$L_\xi\overset{\mathrm{def}}{=}\left(1+\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^2\right)^{-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right).$$

Имеем $e^{i\Phi(\zeta, y, p)+i\xi(x-\zeta)} = L_\xi e^{i\Phi(\zeta, y, p)+i\xi(x-\zeta)}$. Подставим это равенство в (2.23) и проинтегрируем по частям. Повторяя эту операцию m раз, получим

$$v^j_{\beta q}(x, \eta) = \\ = \int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\frac{|\eta|}{2\delta_1}\leqslant|p|\leqslant\frac{2|\eta|}{\delta_1}} e^{i\Phi(\zeta, y, p)-iy\eta-i\xi(x-\zeta)} \cdot \\ \cdot\int_0^1 d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{M-1}} d\tau_M\,|\tau_M|^\beta\cdot\frac{(1+|\eta|^2)^{-s/2}}{1+|x|^{2q}}(L_\xi)^m\Big\{\mathcal{F}_{\beta q}\Big(\tau_M\xi + \\ + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big)d_j(\zeta, y, p)\Big\}\,dp\,dy\,d\xi\,d\zeta.$$

Учитывая, что $\Phi(\zeta, y, p)$ — операторная фазовая функция, получим, что для оценки функции $v^j_{\beta q}(x, \eta)$ достаточно оценить интегралы

$$\mathcal{T}_m \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n}\int_{\frac{|\eta|}{2\delta_1}\leqslant|p|\leqslant\frac{2|\eta|}{\delta_1}} e^{i\Phi(\zeta, y, p)-iy\eta-i\xi(x-\zeta)} \cdot \\ \cdot\int_0^1 d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{M-1}} d\tau_M\,\frac{|\tau_M|^\beta\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^m\frac{\partial^{m-\alpha}d_j(\zeta, y, p)}{\partial\zeta^{m-\alpha}}}{(1+|x|^{2q})(1+|\eta|^2)^{s/2}\left(1+\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^2\right)^m}\cdot \\ \cdot\mathcal{F}^\alpha_{\beta q}\Big(\xi\tau_M+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big)(1-\tau_M)^\alpha\,dp\,d\xi\,d\zeta\,dy,$$

где $\alpha = 0, 1, \ldots m$, а функция $\mathcal{F}^\alpha_{\beta q}$ удовлетворяет оценке

$$\left|\mathcal{F}^\alpha_{\beta q}\Big(\xi\tau_M+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\Big)\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{c^\alpha_{\beta q}}{\left(1+\left|\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right|^2\right)^{(\beta+\alpha-s)/2}},$$

где $c^\alpha_{\beta q}$ — некоторая константа.

Из последнего неравенства и соотношений (2.19), (2.22) и (1.5) следуют следующие неравенства:

$$\left|\frac{\left(\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)^m\frac{\partial^{m-\alpha}d_j(\zeta, y, p)}{\partial\zeta^{m-\alpha}}\mathcal{F}^\alpha_{\beta q}\left(\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right)}{(1+|\eta|^2)^{s/2}(1+|x|^{2q})\left(1+\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^2\right)^m}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+|p|)^{\frac{m-\alpha-j}{2}+M}\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^m \varphi(\zeta,y)\cdot c_{\beta q}^{\alpha}\Big/\Big[(1+|\eta|^2)^{s/2}\cdot$$
$$\cdot(1+|x|^{2q})\left(1+\left|\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right|^2\right)^m\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left|\tau_M\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)\right|^2\right)^{\frac{\beta+\alpha-s}{2}}\Big]\leqslant$$
$$\leqslant \varphi(\zeta,y)\,|\psi_{Mq}^m(x,y,\eta,p,\xi,\zeta)|\Big/\Big[(1+|\eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}\cdot$$
$$\cdot(1+|p|^2)^{\frac{n+1}{2}}(1+|x|^{n+1})\Big(1+\Big|\tau_M\xi+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(1-\tau_M)^2\Big)^{\frac{n+1}{2}}\Big],\qquad (2.24)$$

где $\varphi(\zeta, y)$ — неотрицательная функция с компактным носителем, а для функции $\psi_{Mq}^m(x, y, \eta, p, \xi, \zeta)$ при $q > [(n+1)/2]$, $M \geqslant s+n+1$ и $m \geqslant 2(n+1)$

$$|\psi_{Mq}^m(x, y, \eta, p, \xi, \eta)| \leqslant \text{const}.$$

Выбираем $M \geqslant s+n+1$, $m \geqslant 2(n+1)$, $q > [(n+1)/2]$, тогда из соотношений (2.24) и (2.25) получаем неравенства 2.23). Лемма доказана.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
7.I.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Хёрмандер Л., Интегральные операторы Фурье, Математика, 16, № 1—2 (1972).
[2] Данилов В. Г., Ле Ву Ань, Об интегральных операторах Фурье, Матем. сб., 110, № 3 (1979), 323—368.
[3] Данилов В. Г., Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Соболева, Тр. Моск. ин-та электронного машиностроения, № 38 (1974), 3—10.
[4] Данилов В. Г., Оценки для канонических псевдодифференциальных операторов с комплексной фазой, Докл. АН СССР, 244, № 4 (1979), 800—804.
[5] Kalderon, Vaillancourt, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185—1187.
[6] Карасев М. В., Исчисление почти производящих упорядоченных операторов, Тр. Моск. ин-та электронного машиностроения, № 38 (1974).