A. A. Zolotykh, A. A. Mikhalev, Ranks of subalgebras of free Lie superalgebras, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1996, Number 2, 36–40

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm1989

10. Кушкулей А. Х., Размыслов Ю. П. Многообразия, порожденные неприво димыми представлениями алгебр//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 5. 4—7.

Поступила в редакцию
09.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 512.554,33,34,37,38

А. А. Золотых, А. А. Михалев

РАНГИ ПОДАЛГЕБР СВОБОДНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

Данная статья продолжает исследования, начатые в [1]. Основным результатом работы является критерий независимости подмножества свободной цветной (p-)супер態алгебры Ли, что дает удобный алгоритм для определения независимости подмножества (теорема 2). В качестве следствия получены критерий и алгоритм, определяющие, является ли эндоморфизм свободной цветной (p-)супералгебры Ли мономорфизмом.

1. Свободные цветные (р-) супералгебры Ли. Пусть K — поле, $\operatorname{char} K \neq 2$, G — абелева полугруппа, $\varepsilon: G \times G \to K^*$ — кососимметрическая билинейная форма, $G_+ = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = 1\}$, $G_- = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = -1\}$, $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ — G-градуированная K-алгебра. Алгебра R с умножением $[\ ,\ ]$ является цветной супералгеброй Ли, если

$$[a, b] = -\varepsilon(d(a), d(b))\,[b, a],$$

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + \varepsilon(d(a), d(b))\,[b, [a, c]],$$

где a, b, c — G-однородные элементы из R, $d(u) = g$ при $u \in R_g$ (в случае $\operatorname{char} K = 3$ предполагаем дополнительно, что $[v, [v, v]] = 0$ для всех G-однородных элементов v, $d(v) \in G_-$).

Пусть $\operatorname{char} K = p > 2$, R — цветная супералгебра Ли над K, тогда R — цветная p-супералгебра Ли, если на однородных компонентах R_g, $g \in G_+$, задано отображение $[p]$: $R_g \to R_{pg}$, такое, что для всех $z \in R$, $\alpha \in K$, G-однородных $x, y \in R$, $d(x) = d(y)$, выполнены следующие условия:

$$(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}, \quad (\operatorname{ad}(x^{[p]}))(z) = (\operatorname{ad} x)^p (z),$$

$$(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Sigma s_i(x, y),$$

где $js_j(x, y)$ — коэффициенты при t^{j-1} в многочлене $(\operatorname{ad}(tx + y)^{p-1})(x)$, при этом $(\operatorname{ad} a)(b) = [a, b]$.

Пусть X — G-градуированное множество, $A(X)$ — свободная G-градуированная ассоциативная K-алгебра с единицей. Рассмотрим новую операцию на $A(X)$: $[a, b] = ab - \varepsilon(d(a), d(b))\,ba$ для G-однородных элементов $a, b \in A(X)$. Тогда $A(X)$ — цветная супералгебра Ли. Пусть $L(X)$ — подалгебра в $A(X)$ с операцией $[\ ,\ ]$, порожденная множеством X. Алгебра $L(X)$ является свободной цветной K-супералгеброй Ли на X (см. [2]). Если $\operatorname{char} K = p > 2$, $a^{[p]} = a^p$ для всех G-однородных элементов $a \in A(X)$, $d(a) \in G_+$, то $A(X)$ с операциями $[\ ,\ ]$ и $[p]$ является цветной p-супералгеброй Ли, а ее подалгебра $L^p(X)$, порожденная множеством X, — свободной цветной p-супералгеброй Ли. При этом $A(X)$ является универсальной обертывающей алгеброй для $L(X)$ (в случае $\mathrm{char}\, K=p>2$ также ограниченной универсальной обертывающей алгеброй для $L^p(X)$).

Для G-однородного элемента $a\in L(X)$ ($a\in L^p(X)$) через a^0 обозначим старшую по длине компоненту элемента a. Подмножество H алгебры $L(X)$ ($L^p(X)$ соответственно), состоящее из G-однородных элементов, называется приведенным, если для любого $a\in H$ элемент a^0 не лежит в подалгебре, порожденной подмножеством $\{b^0\,|\,b\in H, b\neq a\}$, и независимым, если подмножество H является множеством свободных образующих подалгебры в $L(X)$ (в $L^p(X)$ соответственно), им порожденной.

Теорема 1 [2, 3]. *Любое приведенное подмножество в* $L(X)$ (*в* $L^p(X)$) *является независимым.*

2. Частные производные. Пусть $X=\{x_1, ..., x_n\}$. Любой элемент $u\in A(X)$ может быть записан единственным образом в виде $u=\alpha\cdot 1+ +x_1u_1+ ... +x_nu_n$, где $u_i\in A(X)$, $\alpha\in K$. Элементы $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=u_i$, $i=1, \ldots, n$, называются частными производными элемента u.

Пусть $H=\{h_1, ..., h_m\}$ — подмножество G-однородных элементов в $L(X)$ (в $L^p(X)$ соответственно). Через $J(H)$ обозначим матрицу

$$J(H)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пусть $a_1, ..., a_m\in A(X)$. Так как элементы из H не содержат свободных членов, то

$$J(H)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}=(0) \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $h_1a_1+ ... +h_ma_m=0$.

3. Основная теорема. Лемма. *Пусть* $h_1, \ldots, h_m$ — *G-однородные ненулевые элементы в* $L(X)$ (*в* $L^p(X)$ *соответственно*), $Y=\{y_1, \ldots, y_m\}$, $d(y_i)=d(h_i)$, $i=1, \ldots, m$, *и*

$$h_1a_1+\ldots+h_ma_m=0$$

для не всех одновременно равных нулю $a_i\in A(X)$, $i=1, \ldots, m$. *Тогда*:

1) *если* $f_i=h_i$ *при* $i<m$ *и* $f_m=h_m+F(h_1, \ldots, h_{m-1})$, *где* $F(y_1, \ldots \ldots, y_{m-1})\in L(Y)$ ($L^p(Y)$ *соответственно*), $d(F)=d(h_m)$, *то*

$$f_1b_1+\ldots+f_mb_m=0,$$

где $b_i=a_i-\dfrac{\partial F}{\partial y_i}\Bigg|_{\substack{y_1=h_1\\ \cdots\\ y_{m-1}=h_{m-1}}}\cdot a_m$ *при* $i<m$ *и* $b_m=a_m$; *при этом не все* b_i *равны нулю*;

2) *если* $h_1, \ldots, h_m$ — *однородные по длине элементы, то*

$$F(h_1, \ldots, h_m)=0$$

для некоторого G-однородного ненулевого элемента $F\in L(Y)$ ($L^p(Y)$).

Доказательство. Первое утверждение леммы проверяется непосредственно:

$$0=h_1a_1+\ldots+h_ma_m=\sum_{i=1}^{m-1} f_ia_i+(f_m-F(f_1,\ldots,f_{m-1}))\,a_m=$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1} f_i\left(a_i-\frac{\partial F}{\partial y_i}\Bigg|_{\substack{y_1=f_1\\ \cdots\\ y_{m-1}=f_{m-1}}}\cdot a_m\right)+f_ma_m.$$

Если все $b_i=0$, то $a_m=b_m=0$ и $a_i=b_i+\frac{\partial F}{\partial y_i}\Big|_{\substack{y_1=h_1\\ \cdots\\ y_{m-1}=h_{m-1}}}\cdot a_m=0$ для всех $i=1,\ldots,m-1$.

При доказательстве второго утверждения мы можем считать, что $a_1,\ldots,a_m$ однородны по длине и что элементы $h_1,\ldots,h_m$ линейно независимы (иначе утверждение тривиально). Тогда из обобщенного алгоритма Евклида в $A(X)$ (см. [4]) следует, что один из h_j лежит в правом идеале алгебры $A(X)$, порожденном множеством $\{h_i|i\neq j\}$. Можно считать, что

$$h_1=h_2b_2+\ldots+h_mb_m.$$

Используя теорему Пуанкаре—Биркгофа—Витта для $A(X)=U(L(X))$ ($A(X)=u(L^p(X))$ соответственно, см. [5]), считаем, что $b_i\in U(B)\subseteq\subseteq A(X)$, где B — подалгебра в $L(X)$ (в $L^p(X)$), порожденная подмножеством H.

Так как h_i, b_i, $i=1,\ldots,m$, однородны по длине, то элемент h_1 не участвует в записи $b_2,\ldots,b_m$. Таким образом, h_1 ассоциативно выражается через $h_2,\ldots,h_m$, и по теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта h_1 лежит в подалгебре, порожденной $\{h_2,\ldots,h_m\}$, что завершает доказательство леммы.

Теорема 2. *Подмножество $H=\{h_1,\ldots,h_m\}$ G-однородных элементов в $L(X)$ (в $L^p(X)$) независимо тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $J(H)$ независимы справа над $A(X)$, т. е. когда из* (1) *при $a_i\in A(X)$ следует, что $a_i=0$ для всех $i=1,\ldots,m$.*

Доказательство. Если H не является независимым подмножеством, то существует ненулевой G-однородный элемент $F\in L(Y)$ ($F\in L^p(Y)$), где $Y=\{y_1,\ldots,y_m\}$, $d(y_i)=d(h_i)$, $i=1,\ldots,m$, такой, что $F(h_1,\ldots$ $\ldots,h_m)=0$. Так как $L(Y)\subseteq A(Y)$ ($L^p(Y)\subseteq A(Y)$), то $F\in A(Y)$, $F\neq 0$. Среди всех таких ассоциативных многочленов F выбираем многочлен F_0 минимально возможной длины по Y. Ясно, что F_0 не имеет свободного члена. Дифференцируя равенство $F(h_1,\ldots,h_m)=0$ последовательно по $x_1,\ldots,x_n$, получаем, что выполнено соотношение (1), где

$$a_i=\frac{\partial F_0}{\partial y_i}\Bigg|_{\substack{y_1=h_1\\ \cdots\\ y_m=h_m}}.$$

Если $\frac{\partial F_0}{\partial y_i}\neq 0$ в $A(Y)$, то из минимальности длины F_0 в $A(Y)$ следует, что $a_i\neq 0$. Допустим, что $a_i=0$ для всех i. Тогда $\frac{\partial F_0}{\partial y_i}=0$ для всех i, и так как F_0 не имеет свободного члена, то $F_0=0$ в $A(y)$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Пусть теперь есть нетривиальная зависимость (1). Тогда

$$h_1 a_1 + \ldots + h_m a_m = 0.$$

Если

$$h_j^0 = F(h_1^0, \ldots, h_{j-1}^0, h_{j+1}^0, \ldots, h_m^0),$$

$F \in L(Y)$ ($F \in L^p(Y)$), то рассмотрим подмножество $H' = \{h_1', \ldots, h_m'\}$, такое, что $h_j' = h_j - F(h_1, \ldots, h_{j-1}, h_{j+1}, \ldots, h_m)$, $h_i' = h_i$ при $i \neq j$. По лемме

$$h_1' b_1 + \ldots + h_m' b_m = 0$$

для некоторых одновременно не равных нулю $b_1, \ldots, b_m \in A(X)$. При этом элемент h_j' имеет меньшую длину, чем h_j. Повторяя описанную процедуру, мы либо получим на некотором шаге нулевой элемент (и тогда множество H не является независимым), либо придем к приведенному подмножеству элементов $\{u_1, \ldots, u_m\}$, удовлетворяющему нетривиальному соотношению $u_1 e_1 + \ldots + u_m e_m = 0$. Выделяя старшую часть по длине, мы получаем нетривиальное однородное по длине соотношение

$$u_1^0 c_1 + \ldots + u_m^0 c_m = 0.$$

По лемме существует нетривиальный G-однородный многочлен $F \in L(Y)$ ($F \in L^p(Y)$), такой, что $F(u_1^0, \ldots, u_m^0) = 0$. Противоречие с утверждением теоремы 1 завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть φ — G-однородный эндоморфизм алгебры $L(Y)$ ($L^p(Y)$ соответственно), такой, что столбцы матрицы Якоби $J(\varphi) = J(\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\})$ правонезависимы над $A(X)$. Тогда φ — мономорфизм.*

Отметим, что если $J(\varphi)$ обратима над $A(X)$, то φ — автоморфизм [6].

Напомним, что подалгебры свободных (p-)супералгебр Ли свободны (см. [2, 3]). Этот результат непосредственно вытекает из теоремы 1; ранг такой свободной алгебры определен однозначно и не зависит от выбора свободных образующих. Любой левый (правый) идеал алгебры $A(X)$ является свободным модулем единственного ранга (см. [4]).

Следствие 2. *Пусть $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ — подмножество G-однородных элементов алгебры $L(X)$ ($L^p(X)$ соответственно). Тогда ранг подалгебры, порожденной подмножеством H, равен рангу свободного правого $A(X)$-подмодуля модуля $A(X)^n$, порожденного столбцами матрицы $J(H)$. В частности, если φ — эндоморфизм алгебры $L(X)$ ($L^p(X)$ соответственно), то ранг подалгебры $\varphi(L(X))$ ($\varphi(L^p(X))$) равен рангу свободного правого $A(X)$-подмодуля модуля $A(X)^n$, порожденного столбцами матрицы Якоби $J(\varphi)$.*

Замечание 1. Следствие 2 дает эффективный алгоритм нахождения ранга конечно-порожденной подалгебры алгебры $L(X)$ ($L^p(X)$ соответственно) над конструктивным полем. Действительно, достаточно за конечное число шагов построить канонический базис правого идеала, порожденного столбцами матрицы $J(H)$. Число элементов в этом базисе дает искомый ранг. Другой алгоритм следует из теоремы 1: необходимо, используя элементарные преобразования и отбрасывая возможно возникающие нулевые элементы, редуцировать подмножество H к приведенному подмножеству H', мощность которого $|H'|$ дает ранг рассматриваемой подалгебры. В то же время, как показал У. У. Умирбаев в [7], проблема определения независимости конечного подмножества элементов в свободной ассоциативной алгебре алгоритмически неразрешима.

Замечание 2. В настоящей статье мы рассматривали правые идеалы, порожденные столбцами матрицы Якоби. В [8] изучались левые идеалы, порожденные строками матриц $J(H)$; ранги этих идеалов совпадают с рангами систем элементов H; получен также критерий примитивности систем элементов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Международного научного фонда и INTAS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhalev A. A., Shpilrain V., Zolotykh A. A. Monomorphisms of free algebras. Preprint. University Bochum, 1994.
2. Михалев А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли//Матем. заметки. 1985. **37**, № 5. 653—661.
3. Михалев А. А. Подалгебры свободных p-супералгебр Ли//Матем. заметки. 1988. **43**, № 2. 178—191.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. М., 1975.
5. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite dimensional Lie superalgebras. Berlin, 1992.
6. Михалев А. А. О правых идеалах свободной ассоциативной алгебры, порожденных свободными цветными (p-)супералгебрами Ли//Успехи матем. наук. 1992. **47**, № 5. 187—188.
7. Умирбаев У. У. Некоторые алгоритмические вопросы ассоциативных алгебр//Алгебра и логика. 1993. **32**, № 4. 450—470.
8. Золотых А. А., Михалев А. А. Ранг элемента свободной (p-)супералгебры Ли//Докл. РАН. 1994. **334**, № 6. 690—693.

Поступила в редакцию
21.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 519.95

С. Б. Гашков

«ПРОКЛЯТИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ» ДЛЯ СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

В работах [1—7] автор исследовал сложность приближенной реализации различных классов функций схемами и формулами в базисах, состоящих из непрерывных операций. Напомним постановку задачи.

Пусть $\mathcal{K}$ — вполне ограниченное подмножество нормированного пространства и $\mathcal{A}$ всюду плотно в $\mathcal{K}$. Сложность ε-приближения элемента $x \in \mathcal{K}$ называется число

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \inf \{\mathcal{L}(y) : y \in \mathcal{A}, \ \|x-y\| \leqslant \varepsilon\},$$

а сложностью ε-приближения класса $\mathcal{K}$ — число

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}, \varepsilon) = \sup \{\mathcal{L}(x, \varepsilon) : x \in \mathcal{K}\},$$

где мера сложности $\mathcal{L}$ определяется следующим образом.

Пусть $B = \{w_k : k = 1, 2, \ldots\}$ — некоторое множество непрерывных операций $w_k : \mathbf{R}^{m_k} \to \mathbf{R}$, называемое базисом. Схема S в базисе B — это произвольная последовательность непрерывных функций $f_1(x), \ldots$