I. V. Pavlov, On extreme rays and integral representation in a supermartingale's cone, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 1980, Volume 25, Issue 3, 602–605

[5] **B. Maurey,** Théorèmes de Nikishin: théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace L^0, Sémin. Maurey—Schwartz, 1972—73, exp. X—XI.

[6] **D. Mouchtari,** Sur l'existence d'une topologie du type Sazonov sur un espace de Banach, Sémin. Maurey—Schwartz, 1975—76, exp. XVII.

UNE RÉMARQUE SUR LES TOPOLOGIES NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES

D. H. MUŠTARI (KAZAN)

(*Resume*)

On definit la notion des topologies nécessaires et suffisantes pour les fonctionelles aléatoires linéaires à valeurs dans un L^p. Pour $p < 1$ on établit son équivalence à celle pour $p = 0$ [6].

О КРАЙНИХ ЛУЧАХ И ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ В КОНУСЕ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ

И. В. ПАВЛОВ

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ вместе со стандартной системой * $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$. Под этим (см. [1], стр. 165) понимается возрастающий поток σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

а) всякое измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ есть стандартное борелевское пространство (см. [2], стр. 133), т. е. $\mathscr{F}_t$ σ-изоморфна σ-алгебре борелевских множеств некоторого полного сепарабельного метрического пространства;

б) для всякой возрастающей последовательности $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ положительных чисел и всякой убывающей последовательности $A_i \subset \Omega$ такой, что A_i — атом в $\mathscr{F}_{t_i}$, множество $\bigcap\limits_i A_i \neq \varnothing$.

Мы будем предполагать, что $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty = \bigvee\limits_{t\geqslant 0} \mathscr{F}_t$. Тогда $(\Omega, \mathscr{F})$ — тоже стандартное борелевское пространство (см. [2], V, теорема 4.1.). Заметим также, что в произвольном борелевском пространстве $(\Omega, \mathscr{B})$ (и даже во всяком измеримом пространстве со счетно-порожденной σ-алгеброй) для всякого $\omega \in \Omega$ существует единственный атом e_ω, содержащий ω, и если $B \in \mathscr{B}$, то $B = \bigcup\limits_{\omega\in B} e_\omega$ (см. [2], V, теорема 2.1).

Пусть S — конус неотрицательных супермартингалов $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, \mathbf{P}\}$ таких, что функция $\mathbf{E}[X_t]$ непрерывна справа на $[0, \infty)$. Точнее, S — множество классов эквивалентности супермартингалов (супермартингалы $\{X_t, \mathscr{F}_t, \mathbf{P}\}$ и $\{Y_t, \mathscr{F}_t, \mathbf{P}\}$ называются эквивалентными, если $X_t = Y_t$ $\mathbf{P}$-п.н. для всякого $t \geqslant 0$). В теореме 5.2 из [1] показано, что существует взаимно однозначное соответствие (с точностью до постоянного положительного множителя) между такими классами и мерами Фельмера $\mathbf{P}^X$. Вероятностные меры $\mathbf{P}^X$ определены на измеримом пространстве $(\Omega \times [0, \infty], \mathscr{P})$, где $\mathscr{P}$ — σ-алгебра предсказуемых множеств (она порождена полуполосами вида

* В [1] аналогичная стандартная система обозначена через $(\mathscr{F}_t^0)$, а супермартингалы, адаптированные к ней, помечены ноликами.

$A \times (t, \infty]$, $t \geqslant 0$, $A \in \mathscr{F}_t$), а $\mathbf{P}^X$ задана так:

$$\mathbf{P}^X[A \times (t, \infty]] = \frac{1}{\mathbf{E}[X_0]} \int\limits_A X_t d\mathbf{P}.$$

Положим $S_1 = \{X \in S \mid \mathbf{E}[X_0] = 1\}$, а множество крайних точек этого выпуклого множества обозначим через ∂S_1. Теорема Фельмера (см. [1], теорема 5.5) утверждает, что $X \in \partial S_1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}^X$ принимает лишь два значения: 0 и 1.

Нашей задачей является описание всех элементов множества ∂S_1 и исследование возможности интегрального представления Шоке супермартингалов из S_1 через элементы множества ∂S_1.

2. Характеристика множества ∂S_1. Пусть $X \in \partial S_1$. Так как $\Omega \times [s, t] \in \mathscr{P}$ для любых $s < t$, то при любом n существует единственный отрезок $[i/2^n, (i+1)/2^n]$, $0 \leqslant i \leqslant \infty$, для которого

$$\mathbf{P}^X[\Omega \times [i/2^n, (i+1)/2^n]] = 1.$$

Отсюда легко следует, что существует t $(0 < t \leqslant \infty)$ такое, что

$$\mathbf{P}^X[\Omega \times \{t\}] = 1.$$

Далее, известно (см. [3], доп. 1), что след $\mathscr{P}$ на $\Omega \times \{t\}$ есть σ-алгебра $\mathscr{F}^*_{t-} = \mathscr{F}_{t-} \times \{\varnothing, \{t\}\}$, так что $\mathbf{P}^X$ на $(\Omega \times \{t\}, \mathscr{F}^*_{t-})$ принимает только значения 0 и 1. Так как $(\Omega \times \{t\}, \mathscr{F}^*_{t-})$ — стандартное борелевское пространство (см. [1], (6.1)), то существует множество A_t, являющееся атомом в $\mathscr{F}_{t-}$ и такое, что $\mathbf{P}^X[A_t \times \{t\}] = 1$.

Обратно, пусть $0 < t \leqslant \infty$ и A_t — атом в $\mathscr{F}_{t-}$; очевидно, $A_t \times \{t\}$ — атом в $\mathscr{P}$. Рассмотрим такую вероятностную меру $\overline{\mathbf{P}}$ на $(\Omega \times [0, \infty], \mathscr{P})$, что $\overline{\mathbf{P}}[A_t \times \{t\}] = 1$. Замечая, что A_t единственным образом представляется в виде $A_t = \bigcap\limits_{s<t} A_s$, где $A_s \supset A_t$ и A_s — атом в $\mathscr{F}_s$, рассмотрим два случая:

1) Пусть $\mathbf{P}[A_s] > 0$ для всякого $s < t \leqslant \infty$. Тогда рассмотрим супермартингал $X = \{X_s, \mathscr{F}_s, \mathbf{P}\}$, где

$$X_s(\omega) = \begin{cases} 1/\mathbf{P}[A_s], & \omega \in A_s, \\ 0, & \omega \in A_s^c, \end{cases} \text{ при } s < t, \quad X_s(\omega) = 0 \text{ при } s \geqslant t \text{ (если } t < \infty).$$

Очевидно, $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^X$ и $X \in \partial S_1$. Заметим, что если при этом и $\mathbf{P}[A_t] > 0$, то X — супермартингал класса (D). Если же $\mathbf{P}[A_t] = 0$, то X — локальный мартингал.

2) Пусть существует $u < t$ такое, что $\mathbf{P}[A_s] = 0$ при $u < s < t$. Тогда из $A_t \times \{t\} \subset A_s \times (s, \infty]$ следует, что $\mathbf{P}^X[A_t \times \{t\}] = 0$ для всякого $X \in S_1$ и, следовательно, не существует $X \in S_1$ такого, что $\mathbf{P}^X = \overline{\mathbf{P}}$.

Итак, мы получили взаимно однозначное соответствие между ∂S_1 и множеством атомов $A_t \times \{t\}$ в $\mathscr{P}$, у которых A_t является пересечением атомов положительной $\mathbf{P}$-вероятности.

3. Критерий существования представления Шоке. Разложим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}_{t-}, \mathbf{P})$ на не более чем счетную совокупность атомов $A_t^n \in \mathscr{F}_{t-}$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых $\mathbf{P}[A_t^n] > 0$, и на множество $\Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_t^n\right) \in \mathscr{F}_{t-}$, на котором вероятность $\mathbf{P}$ распределена непрерывно (см. [4], стр. 37, доп. 4.3).

Рассмотрим объединение M_t тех атомов $A_t \in \mathscr{F}_{t-}$, которые являются пересечениями атомов положительной $\mathbf{P}$-вероятности. Тогда $M_t = \bigcap\limits_{s<t} \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_s^n\right)$ и $M_t \in \mathscr{F}_{t-}$, так как множества $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_s^n$ вложены и поэтому внешнее пересечение можно считать счетным. Следовательно, и $N_t = \Omega \setminus M_t$, являющееся объединением атомов, которые представляются пересечением атомов нулевой $\mathbf{P}$-вероятности, принадлежит $\mathscr{F}_{t-}$. Рассмотрим множество $\overline{N} = \bigcup\limits_{0<t\leqslant\infty} N_t \times [t, \infty]$. Легко видеть, что $\overline{N} = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} N_{p/q} \times (p/q, \infty]$, и, следовательно, $\overline{N} \in \mathscr{P}$.

Предложение 1. *Супермартингал $X \in S_1$ допускает представление Шоке через элементы ∂S_1 тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}^X$ не нагружает множество $\overline{N}$.*

Доказательство. Всякому множеству $\overline{A} \in \mathscr{P}$ поставим в соответствие множество $\tilde{\overline{A}} \in \partial S_1$ следующим образом:

$$\tilde{\overline{A}} = \{Z \in \partial S_1 \mid \mathbf{P}^Z[\overline{A}] = 1\}.$$

Очевидно, множество таких $\tilde{\overline{A}}$ образует σ-алгебру на ∂S_1, которую мы обозначим через $\mathscr{K}$.

1) Пусть $X \in S_1$ является барицентром некоторой вероятностной меры $\widetilde{\mathbf{P}}^X_{\mathscr{B}}$ на $(\partial S_1, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ — некоторая σ-алгебра. Используя следствие 5.7 из [1], заключаем, что σ-алгебры с мерами $(\mathbf{P}^X, \mathscr{P})$ и $(\widetilde{\mathbf{P}}^X, \mathscr{B})$ изоморфны и изоморфизм осуществляется отображением $\overline{A} \to \tilde{\overline{A}}$. Теперь имеем $\mathbf{P}^X[\overline{N}] = \widetilde{\mathbf{P}}^X[\tilde{\overline{N}}] = 0$, так как $\tilde{\overline{N}} = \varnothing$.

2) Обозначим $\overline{M} = (\Omega \times (0, \infty]) \setminus \overline{N}$. Пусть $X \in S_1$ и $\mathbf{P}^X[\overline{N}] = 0$. Учитывая это и тот факт, что отображение $\overline{A} \to \tilde{\overline{A}}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между атомами измеримого пространства $(\overline{M}, \mathscr{P}|_{\overline{M}})$ и элементами множества ∂S_1, заключаем, что формула $\widetilde{\mathbf{P}}^X[\tilde{\overline{A}}] = \mathbf{P}^X[A]$ корректно определяет вероятностную меру $\widetilde{\mathbf{P}}^X$ на $(\partial S_1, \mathscr{K})$. Теперь имеем при $A \in \mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$:

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{E}[Z_t; A]\, \widetilde{\mathbf{P}}^X(dZ) = \int_{\partial S_1} \mathbf{P}^Z[A \times (t, \infty]]\, \widetilde{\mathbf{P}}^X(dZ) = \int_{\widetilde{A \times (t, \infty]}} \widetilde{\mathbf{P}}^X(dZ) =$$
$$= \widetilde{\mathbf{P}}^X[\widetilde{A \times (t, \infty]}] = \mathbf{P}^X[A \times (t, \infty]] = \mathbf{E}[X_t; A].$$

Для всех $t \geqslant 0$, $A \in \mathscr{F}_t$ получили равенство

$$\mathbf{E}[X_t; A] = \int_{\partial S_1} \mathbf{E}[Z_t; A]\, \widetilde{\mathbf{P}}^X(dZ),$$

которое представляет X в виде барицентра меры $\widetilde{\mathbf{P}}^X$.

Следствие 1. *Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого t $(0 < t < \infty)$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_t^n) = 1.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть существует t $(0 < t < \infty)$ такое, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_t^n) = 1$. Обозначив $\Omega_s = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_s^n\right)$, заметим, что из $s < s'$ вытекает $\Omega_s \subset \Omega_{s'}$. Получаем, что $\mathbf{P}(\Omega_s) > 0$ для всякого $s \geqslant t$. Зафиксируем некоторое $s > t$. Очевидно, $\lim_{u \uparrow s} \uparrow \Omega_u = N_s$ и, следовательно, $\mathbf{P}[N_s] > 0$. Рассмотрим вероятностную меру $\overline{\mathbf{P}}$ на $(\Omega \times [0, \infty], \mathscr{P})$, заданную так: если $A \subset N_s$ и $A \in \mathscr{F}_{s-}$, то $\overline{\mathbf{P}}[A \times \{s\}] = \mathbf{P}[A]/\mathbf{P}[N_s]$. Очевидно, что $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^X$, где X — положительный супермартингал, задающийся формулой:

$$X_u = \begin{cases} \mathbf{P}[N_s \mid \mathscr{F}_u]/\mathbf{P}[N_s], & u < s, \\ 0, & u \geqslant s. \end{cases}$$

Имеем: $\overline{\mathbf{P}}[\overline{N}] = \overline{\mathbf{P}}[N_s \times \{s\}] = \mathbf{P}[N_s]/\mathbf{P}[N_s] = 1$. Используя предложение 1, заключаем, что X не допускает представления Шоке.

Следствие 2. *Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого t $(0 < t < \infty)$ вероятностная мера $\mathbf{P}$ была дискретна на $(\Omega, \mathscr{F}_t)$.*

Это следствие доказывается применением следствия 1.

Следствие 3. *Пусть $S_1^0 = \{X \in S_1 \mid X$ — мартингал$\}$. Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1^0$ (через элементы ∂S_1^0), необходимо и достаточно, чтобы для всякого t $(0 < t < \infty)$ вероятностная мера $\mathbf{P}$ была дискретна на $(\Omega, \mathscr{F}_t)$.*

Доказывается так же, как следствие 1.

Теперь мы установим связь полученных здесь результатов с результатами работы Фельмера [5]. Сформулируем сначала в наших терминах одно утверждение из этой работы (теорему 4.4) *.

Предложение 2. *Предположим, что существует семейство* $(m_t,\ 0 < t < \infty)$ *σ-конечных мер* m_t *на* $\mathscr{F}_t$ *таких, что для всякого* t $(0 < t < \infty)$

$$\delta_\omega^t \ll m_t \text{ на } \mathscr{F}_t \text{ для P-почти всех } \omega \qquad (1)$$

(δ_ω^t *— вероятностная мера, равная* 1 *на атоме из* $\mathscr{F}_t$, *содержащем* ω). *Тогда представление Шоке существует для всякого* $X \in S_1^0$ *через элементы* ∂S_1^0.

Мы докажем более сильное утверждение.

Предложение 2′. *Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого* $X \in S_1$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство мер* $(m_t,\ 0 < t < \infty)$, *обладающих свойством* (1).

Доказательство. Докажем сначала необходимость. В силу следствия 2 получаем, что для всякого $t\,(0 < t < \infty)$ мера $\mathbf{P}$ дискретна на $(\Omega, \mathscr{F}_t)$, т. е. существует не более чем счетное множество таких атомов $\{B_t^n\}_{n=1}^\infty$ в $\mathscr{F}_t$, что $\mathbf{P}\,[B_t^n] > 0$ и $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\,[B_t^n] = 1$. Теперь очевидно, что для всякого $t\,(0<t<\infty)$ можно положить $m_t = \mathbf{P}$.

Докажем достаточность. Пусть выполняется условие (1). Его можно записать так: для всякого $t\,(0 < t < \infty)$ $\delta_\omega^t \ll m_t$ на $\mathscr{F}_t$ для всякого $\omega \in \Omega \diagdown K_t$ $(K_t \in \mathscr{F}_t,\ \mathbf{P}(K_t) = 0)$. Получаем, что m_t должна нагружать каждый атом $\mathscr{F}_t$, который входит в $\Omega \diagdown K_t$. Но это возможно только тогда, когда $\Omega \diagdown K_t$ является счетным объединением атомов $\mathscr{F}_t$. Отсюда следует, что $\mathbf{P}$ дискретна на $(\Omega, \mathscr{F}_t)$.

Поступила в редакцию
12.6.78

ЛИТЕРАТУРА

[1] **H. Föllmer**, The exit measure of a supermartingale, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., **21**, 2(1972), 154—166.
[2] **K. P. Parthasarathy**, Probability measures on metric spaces, New York—London, Acad. Press, 1967.
[3] **P. A. Meyer**, Guide détaillé de la theory «général» des processus, Lect. Notes Math., **51** (1968), 140—165.
[4] **Ж. Неве**. Математические основы теории вероятностей, М., изд-во «Мир», 1969.
[5] **H. Föllmer**, Phase transition and Martin Boundary, Lect. Notes Math., **465** (1975), 305—317.

ON EXTREME RAYS AND INTEGRAL REPRESENTATION IN A SUPERMARTINGALE'S CONE

I. V. PAVLOV (ROSTOV-NA-DONU)

(*Summary*)

We investigate the structure of the extreme points of the set S_1 of supermartingales with the unit mean at 0; the conditions for the points $x \in S_1$ may be represented in the form of the integral over the set of this extreme points are given also.

* На самом деле Фельмер в этой теореме получил более общий результат, из которого, однако, предложение 2′ не вытекает.