Усиление теоремы Ландау для голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками

А. П. Солодов

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолистности.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12876

1. Обозначим через $\mathscr{B}$ совокупность голоморфных функций, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя. Изучение свойств отображения $f \in \mathscr{B}$ тесно связано с анализом его неподвижных точек. Внутренняя точка z_0, $|z_0| < 1$, является *неподвижной точкой* для f, если $f(z_0) = z_0$. Граничная точка a, $|a| = 1$, является *неподвижной точкой* для f, если $\angle\lim_{z\to a} f(z) = a$. Если $f \in \mathscr{B}$ и $f(z) \not\equiv z$, то в силу леммы Шварца–Пика (см. [1; гл. 1, § 1.2]) функция f может иметь не более одной внутренней неподвижной точки. Пусть функция $f \in \mathscr{B}$ с внутренней неподвижной точкой имеет дополнительную неподвижную точку a. Без ограничения общности будем полагать $a = 1$. Согласно теореме Жюлиа–Каратеодори (см. [1; гл. 1, § 1.4]) всегда существует положительный (конечный или бесконечный) угловой предел, называемый *угловой производной*:

$$f'(1) = \angle\lim_{z\to 1} \frac{f(z) - 1}{z - 1} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \cdot \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}\,. \tag{1}$$

2. Обозначим через $\mathscr{B}[0]$ совокупность функций f из $\mathscr{B}$, для которых $z_0 = 0$ является внутренней неподвижной точкой:

$$\mathscr{B}[0] = \{f \in \mathscr{B} : f(0) = 0\}.$$

Если $f \in \mathscr{B}[0]$ и $f'(0) \neq 0$, то f однолистна в некотором круге с центром в нуле, радиус которого зависит от функции. Разнообразные результаты, связанные с оценкой величины этого радиуса, приведены в обзоре [2]. Для того чтобы радиус однолистности не зависел от функции, необходимо рассматривать более узкие классы, чем класс $\mathscr{B}[0]$. Для произвольного $N > 1$ выделим в $\mathscr{B}[0]$ подкласс $\mathscr{B}_N[0]$, состоящий из функций, у которых модуль производной в точке $z_0 = 0$ отделен от нуля числом $1/N$:

$$\mathscr{B}_N[0] = \left\{f \in \mathscr{B}[0] : |f'(0)| \geqslant \frac{1}{N}\right\}.$$

Ландау (см. [3]) показал, что при каждом $N > 1$ функция $f \in \mathscr{B}_N[0]$ однолистна в круге $\mathscr{L}(N) = \{z \in \mathbb{D} : |z| < R(N)\}$, где $R(N) = N - \sqrt{N^2 - 1}$, причем значение $R(N)$ точное.

3. Обозначим через $\mathscr{B}\{1\}$ совокупность функций f из $\mathscr{B}$, оставляющих неподвижной граничную точку $a = 1$:

$$\mathscr{B}\{1\} = \{f \in \mathscr{B} : \angle\lim_{z\to 1} f(z) = 1\}.$$

Если $f \in \mathscr{B}\{1\}$ и $f'(1) < +\infty$, то, как показал Валирон (см. [4]), f однолистна в некотором секторе с центром в единице, раствор которого может быть выбран сколь угодно близким к π, а радиус зависит от угла раствора и функции. Беккеру и Поммеренке (см. [5]) принадлежит один из последних результатов, связанных с оценкой размера этого сектора.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-01-00584.

Для произвольного $\alpha > 1$ выделим в классе $\mathscr{B}\{1\}$ подкласс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$, состоящий из функций, имеющих ограничение на значение угловой производной в неподвижной точке:

$$\mathscr{B}_\alpha\{1\} = \{f \in \mathscr{B}\{1\} : f'(1) \leqslant \alpha\}.$$

Как показано в [6], в отличие от $\mathscr{B}_N[0]$ класс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ слишком обширен с точки зрения выделения на этом классе областей однолистности. Горяйнов в [7] рассмотрел подкласс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$, состоящий из функций этого класса, имеющих дополнительную внутреннюю точку:

$$\mathscr{B}_\alpha[0,1] = \mathscr{B}_\alpha\{1\} \cap \mathscr{B}[0]$$

и обнаружил существование на этом классе нетривиальных областей однолистности. Классы голоморфных отображений круга в себя с несколькими неподвижными точками рассматриваются в обзорной статье [8]. Разработанный в [7] метод был применен в [6] для нахождения более широких областей однолистности. В данной работе задача поиска области однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,4]$, решена полностью.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, то f однолистна в области*

$$\mathscr{D}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-2z+|z|^2|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}. \tag{2}$$

Какова бы ни была область $\mathscr{U}$, $\mathscr{D}(\alpha) \subset \mathscr{U} \subset \mathbb{D}$, $\mathscr{U} \neq \mathscr{D}(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, неоднолистная в области $\mathscr{U}$.

4. Скажем несколько слов о доказательстве теоремы. Фиксируем $\alpha \in (1,4]$. Предположим, что некоторая функция f из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ неоднолистна в области $\mathscr{D}(\alpha)$, т.е. найдутся две различные точки $a, b \in \mathscr{D}(\alpha)$ со свойством $f(a) = f(b) = c$, $c \in \mathbb{D}$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1-\overline{c}}{1-c} \cdot \frac{f(z)-c}{1-\overline{c}f(z)} \tag{3}$$

также отображает круг $\mathbb{D}$ в себя, причем $g(a) = g(b) = 0$ и $g \in \mathscr{B}\{1\}$. В силу леммы Шварца–Пика функция g допускает следующее представление:

$$g(z) = \frac{1-\overline{a}}{1-a} \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \cdot \frac{1-\overline{b}}{1-b} \cdot \frac{z-b}{1-\overline{b}z} \cdot h(z), \qquad \text{где} \quad h \in \mathscr{B}. \tag{4}$$

Замечая, что отображение $\lambda(z) = -z(1-\overline{z})/(1-z)$ является инволюцией круга $\mathbb{D}$, выводим из (3) и (4), что $h \in \mathscr{B}\{1\}$, причем

$$h(0) = \frac{\lambda(c)}{\lambda(a)\lambda(b)}\,, \qquad h'(1) = \alpha\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \frac{1-|a|^2}{|1-a|^2} - \frac{1-|b|^2}{|1-b|^2}\,. \tag{5}$$

Применяя к функции h теорему Жюлиа–Каратеодори (см. (1)), получаем из (5) оценку

$$\frac{|1-h(0)|^2}{1-|h(0)|^2} \leqslant h'(1),$$

откуда следует

$$\frac{|1-\lambda(c)/(\lambda(a)\lambda(b))|^2}{1-|\lambda(c)/(\lambda(a)\lambda(b))|^2} \leqslant \alpha\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \frac{1-|a|^2}{|1-a|^2} - \frac{1-|b|^2}{|1-b|^2}\,. \tag{6}$$

Учитывая некоторые особенности инволюции λ, показываем, что для выполнения оценки (6) должны существовать комплексные числа u, v и w с положительной вещественной частью, причем модули u и v меньше $1/\sqrt{\alpha-1}$, со свойством:

$$\frac{|1-L(u)|^2}{1-|L(u)|^2} + \frac{|1-L(v)|^2}{1-|L(v)|^2} + \frac{|1-L(w)|^2}{1-|L(w)|^2} \leqslant \alpha\frac{|1-L(u)L(v)L(w)|^2}{1-|L(u)L(v)L(w)|^2}\,, \qquad L(\zeta) = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}\,. \tag{7}$$

Получая оценку, противоположную (7), приходим к противоречию, которое доказывает первую часть теоремы. Семейство примеров, устанавливающих точность области (2), строится на основе произведений Бляшке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. **[2]** Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, *УМН*, **30**:4(184) (1975), 3–60. **[3]** E. Landau, *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1926, 467–474. **[4]** Ж. Валирон, *Аналитические функции*, ГИТТЛ, М., 1957. **[5]** J. Becker, Ch. Pommerenke, *Comput. Methods Funct. Theory*, **17**:3 (2017), 487–497. **[6]** О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов, *Матем. сб.*, **210**:7 (2019), 120–144. **[7]** В. В. Горяйнов, *Матем. сб.*, **208**:3 (2017), 54–71. **[8]** В. В. Горяйнов, *УМН*, **67**:6 (408) (2012), 5–52.

А. П. Солодов
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: apsolodov@mail.ru

Поступило
06.05.2020
Принята к публикации
14.05.2020