УДК 519.2

О некоторых классах случайных величин на циклах подстановок

Ю. В. Болотников, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов (Москва)

§ 1. Введение

Предельные распределения случайных величин, зависящих от числа циклов определенной длины в подстановке степени n при $n\to\infty$, изучались различными авторами. В. Л. Гончаров [1] показал, что общее число циклов случайной подстановки степени n асимптотически нормально, если все подстановки равновероятны. В последующих работах (см., например, [2]—[5]), с одной стороны, рассматривались более общие случайные величины (произвольные линейные комбинации чисел циклов определенной длины), с другой стороны, снималось требование равновероятности всех подстановок.

В настоящей работе также изучается случай неравномерного распределения на множестве S_n всех подстановок степени n. Пусть $\{m_1, m_2, \ldots, m_a\}$ — конечное множество натуральных чисел, каждое из которых больше единицы и не делится ни на какое из остальных. При $a>3$ будем предполагать, что эти числа попарно взаимно просты. Выделим из S_n следующие множества: $S_n^{(1)}$ — это совокупность всех подстановок степени n, у которых длины циклов не кратны ни одному из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_a$; $S_n^{(2)}$ — совокупность всех подстановок степени n, у которых, напротив, длина любого цикла кратна одному из чисел m_1, $m_2, \ldots, m_a$; $S_n(m, \beta)$ — совокупность подстановок степени n, у которых длины циклов сравнимы с β по модулю m. В дальнейшем будем предполагать, что на каждом из этих множеств подстановок задано равномерное распределение. Пусть $\alpha_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(2)}$, $\alpha_k^{(3)}$ — число циклов длины k в случайной подстановке из $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ $S_n(m, \beta)$ соответственно.

Положим

$$\xi_s^{(1)} = \sum_{k=1}^{s} c_k\alpha_k^{(1)}, \quad \xi_s^{(2)} = \sum_{k=1}^{s} c_k\alpha_k^{(2)}, \tag{1}$$

где c_k — действительное число, а $s=s(n)$ — некоторая функция, принимающая целые положительные значения. Будем предполагать, что при $n\to\infty$ и $s\to\infty$. При $c_1=c_2= \ldots =c_s=1$ величина $\xi_s^{(1)}$ (соответственно $\xi_s^{(2)}$) равна числу всех циклов в случайной подстановке из $S_n^{(1)}$ $(S_n^{(2)})$, длины которых не превосходят s.

Положим также

$$\xi_n(m, \beta) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(3)}.$$

В § 2 находятся выражения для производящих функций величин $\xi_s^{(1)}$ и $\xi_s^{(2)}$. В § 3 доказывается асимптотическая нормальность $\xi_s^{(1)}$ и $\xi_s^{(2)}$ при $s = O(n^{1-\alpha})$, $\alpha > 0$, и при некоторых ограничениях на последовательность $\{c_k\}$. В § 4 находятся предельные распределения величины $\xi_n(m, \beta)$ при $\beta = m$ и $\beta = m/2$ и различных соотношениях между n и m.

§ 2. Производящие функции величин $\xi_s^{(1)}$, $\xi_s^{(2)}$

Итак, будем считать, что на множествах $S_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, задано равномерное распределение вероятностей. Число подстановок из $S_n^{(i)}$, имеющих k_1 единичных циклов, k_2 циклов длины 2, ..., k_s циклов длины s, обозначим через $M_n^{(i)}(k_1, k_2, \ldots, k_s)$. Число подстановок из S_n с цикловой структурой $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ обозначим через $M_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Экспоненциальная производящая функция чисел $M_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ имеет вид (см., например, [6], стр. 84)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \widetilde{\sum} M_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k}\right\}, \tag{2}$$

здесь $\widetilde{\sum}$ означает суммирование по всевозможным наборам неотрицательных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, удовлетворяющих соотношению $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$. Положим

$$f_{n,s}^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \widetilde{\sum} M_n^{(i)}(k_1, k_2, \ldots, k_s) \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_s^{k_s}, \tag{3}$$

$$F_s^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,s}^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Функция $F_s^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z)$ получается из (2), если положить $x_{km_i} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, a)$ и положить $x_j = 1$ при $j > s$, $j \neq km_i$. Функция $F_s^{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z)$ получается из (2), если положить $x_j = 0$ $(j \neq km_i,\ k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, a)$, $x_{km_i} = 1$ $(km_i > s)$.

Для простоты изложения подробный вывод производящих функций проведем для $a = 2$. В этом случае

$$F_s^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{*} x_k \frac{z^k}{k} + \sum_{k=s+1}^{\infty}{}^{*} \frac{z^k}{k}\right\},$$

$$F_s^{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{**} x_k \frac{z^k}{k} + \sum_{k=s+1}^{\infty}{}^{**} \frac{z^k}{k}\right\},$$

где $\sum_{k=a}^{b}{}^{*}$ означает суммирование по всем значениям k в отрезке $[a, b]$, не кратным ни m_1, ни m_2 (в общем случае — ни одному из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_a$); $\sum\limits_{k=a}^{b}{}^{**}$ означает, напротив, суммирование по всем значениям k из $[a, b]$, кратным либо m_1, либо m_2 (в общем случае — хотя бы одному из $m_1, \ldots, m_a$). Преобразуем выражение для $F_s^{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z)$:

$$F_s^{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{**} (x_k - 1)\frac{z^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}{}^{**} \frac{z^k}{k}\right\}.$$

Пусть m — общий наибольший делитель m_1 и m_2, $m_1 = m\overline{m}_1$, $m_2 = m\overline{m}_2$, $M = m\overline{m}_1\overline{m}_2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{**} \frac{z^k}{k} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{rm_1}}{rm_1} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{rm_2}}{rm_2} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{rM}}{rM} =$$
$$= -\frac{1}{m_1}\ln(1 - z^{m_1}) - \frac{1}{m_2}\ln(1 - z^{m_2}) + \frac{1}{M}\ln(1 - z^M).$$

Окончательно получаем

$$F_s^{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z) = \sqrt[M]{\frac{1 - z^M}{(1 - z^{m_1})^{\overline{m}_2}(1 - z^{m_2})^{\overline{m}_1}}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{**} (x_k - 1)\frac{z^k}{k}\right\}. \quad (5)$$

Аналогично получается равенство

$$F_s^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_s, z) = \frac{1}{1 - z}\sqrt[M]{\frac{(1 - z^{m_1})^{\overline{m}_2}(1 - z^{m_2})^{\overline{m}_1}}{1 - z^M}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{*} (x_k - 1)\frac{z^k}{k}\right\}. \quad (6)$$

Теперь нетрудно получить производящие функции интересующих нас величин $\xi_s^{(1)}$ и $\xi_s^{(2)}$, определенных в (1). Обозначим эти производящие функции через $g_{n,s}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$. Ясно, что

$$g_{n,s}^{(i)}(x) = \frac{1}{M_n^{(i)}} f_{n,s}^{(i)}(x^{c_1}, x^{c_2}, \ldots, x^{c_s}),$$

где $M_n^{(i)} = f_{n,s}^{(i)}(1, 1, \ldots, 1)$ — мощность множества $S_n^{(i)}$. Из (4) видно, что $g_{n,s}^{(i)}(x)$ равна отношению коэффициентов при z^n в разложении по степеням z функций $G_s^{(i)}(x, z) = F_s^{(i)}(x^{c_1}, x^{c_2}, \ldots, x^{c_s}, z)$ и $G_s^{(i)}(1, z)$, $i = 1, 2$. Учитывая (5) и (6), имеем

$$G_s^{(1)}(x, z) = \frac{1}{1 - z}\sqrt[M]{\frac{(1 - z^{m_1})^{\overline{m}_2}(1 - z^{m_2})^{\overline{m}_1}}{1 - z^M}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{*} (x^{c_k} - 1)\frac{z^k}{k}\right\}, \quad (7)$$

$$G_s^{(2)}(x, z) = \sqrt[M]{\frac{1 - z^M}{(1 - z^{m_1})^{\overline{m}_2}(1 - z^{m_2})^{\overline{m}_1}}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{**} (x^{c_k} - 1)\frac{z^k}{k}\right\}. \quad (8)$$

При произвольном a совершенно аналогично получаем следующие выражения для функций $G_s^{(1)}$, $G_s^{(2)}$:

$$G_s^{(1)}(x, z; a) =$$

$$= \frac{1}{1-z}\left[\prod_{t=1}^{a}\prod_{i_1<i_2<\ldots<i_t}\left(1-z^{m^{i_1i_2\ldots i_t}}\right)^{(-1)^{t+1}M/m^{i_1i_2\ldots i_t}}\right]^{1/M}\exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{*}(x^{c_k}-1)\frac{z^k}{k}\right\}, \tag{9}$$

$$G_s^{(2)}(x, z; a) =$$

$$= \left[\prod_{t=1}^{a}\prod_{i_1<i_2<\ldots<i_t}\left((1-z)^{m^{i_1i_2\ldots i_t}}\right)^{(-1)^{t}M/m^{i_1\ldots i_t}}\right]^{1/M}\exp\left\{\sum_{k=1}^{s}{}^{**}(x^{c_k}-1)\frac{z^k}{k}\right\}, \tag{10}$$

где $m^{i_1i_2\ldots i_t}$ — общее наименьшее кратное чисел m_{i_1}, m_{i_2}, $\ldots$, m_{i_t}; $M = m^{12\ldots a}$.

§ 3. Асимптотическая нормальность величин $\xi_s^{(1)}$, $\xi_s^{(2)}$

Пусть $a_s = \sum_{k=1}^{s}{}^{*}\frac{c_k}{k}$, $d_s^2 = \sum_{k=1}^{s}{}^{*}\frac{c_k^2}{k}$.

Теорема 1. *Если при $n\to\infty$ выполняются следующие условия:*

1) *$s\to\infty$, причем $s\leqslant Cn^{1-\alpha}$, где C — константа, $\alpha>0$,*

2) *$d_s^2\to\infty$,*

3) *$c_k/d_s\to 0$ при $s\to\infty$ равномерно по k,*

то распределение случайной величины $\theta_s^{(1)} = (\xi_s^{(1)} - a_s)/d_s$ стремится к нормальному распределению с параметрами (0, 1).

Доказательство. Пусть $A_s^{(1)}(t)$—характеристическая функция величины $\theta_s^{(1)}$. Она легко выражается через производящую функцию $g_{n,s}^{(1)}(x)$:

$$A_s^{(1)}(t) = e^{-ita_s/d_s}\, g_{n,s}^{(1)}(e^{it/d_s}). \tag{11}$$

Как уже упоминалось, $g_{n,s}^{(1)}(x)$ равна отношению коэффициентов при z^n в разложении по степеням z функций $G_s^{(1)}(x, z; a)$ и $G_s^{(1)}(1, z; a)$. Перейдем к изучению асимптотики этих коэффициентов при $x = e^{it/d_s}$. Обозначим их через A_n и B_n соответственно.

Покажем, что при $n\to\infty$

$$A_n \sim \rho\,\frac{\varphi_s(1)}{\Gamma(\delta)\,n^{1-\delta}}, \tag{12}$$

где ρ — константа, $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция,

$$\varphi_s(z) = \exp\{P_s(z)\},\quad P_s(z) = \sum_{k=1}^{s}{}^{*}(x^{c_k}-1)\frac{z^k}{k}, \tag{13}$$

$$\delta = 1 - \sum_{i=1}^{a}\frac{1}{m_i} + \sum_{i_1<i_2}\frac{1}{m^{i_1i_2}} - \ldots + (-1)^a\frac{1}{M}$$

(напомним, что $m^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ и M обозначают общие наименьшие кратные чисел $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k}$ и $m_1, m_2, \ldots, m_a$ соответственно). Нетрудно показать, что $0<\delta<1$. Действительно, δM есть количество целых чисел в интервале $(1, M)$, которые не делятся ни на одно из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_a$.

Запишем A_n по формуле Коши:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{G_s^{(1)}(x, z; a)}{z^{n+1}} dz.$$

Функцию $G_s^{(1)}(x, z; a)$ можно представить в следующем виде:

$$G_s^{(1)}(x, z; a) = \sqrt[M]{\prod_{k=1}^{M} (1 - z\zeta^{-k})^{\beta_k}} \cdot \varphi_s(z), \qquad (14)$$

где ζ — первообразный корень степени M из единицы, а β_k — целые числа, причем $\beta_M = -\delta M$. Положим

$$R(z) = \prod_{k=1}^{M-1} (1 - z\zeta^{-k})^{\beta_k};$$

ясно, что $R(z)$ — дробно-рациональная функция с целыми коэффициентами. В этих обозначениях

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma} (1 - z)^{-\delta} \sqrt[M]{R(z)} \frac{\varphi_s(z)}{z^{n+1}} dz.$$

За контур интегрирования γ возьмем окружность переменного радиуса $r_n > 1$ с M разрезами по радиальным лучам от $z = \zeta^k$ до $z = r_n \zeta^k$. Точки ζ^k, $k = 1, 2, \ldots, M$, можно включить в контур интегрирования, поскольку особенности подынтегральной функции определяются степенями биномов $(1 - z\zeta^{-k})^{\beta_k/M}$, а $\beta_k/M > -1$ для всех k, что будет показано ниже. Обход контура производим против часовой стрелки. Подынтегральная функция является M-значной. Мы выбираем ту ветвь этой функции, у которой при $0<z<1$ как $(1-z)^{-\delta}$, так и $[R(z)]^{1/M}$ принимают положительные значения. Представим A_n в виде суммы $M+1$ интеграла:

$$A_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_M, \qquad (15)$$

где

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_n} \frac{G_s^{(1)}(x, z; a)}{z^{n+1}} dz,$$

а I_k — результат интегрирования по обоим берегам k-го разреза.

Рассмотрим сначала I_M — интеграл по нижнему и верхнему берегам разреза на действительной оси (от 1 до r_n). Так как $(1-z)^{-\delta}>0$ при $0<z<1$ (в силу выбора ветви подынтегральной функции), то при $z>1$ имеем:

$$(1 - z)^{-\delta} = (z - 1)^{-\delta} e^{-i\delta \arg(1-z)}.$$

При переходе из точки $1-\varepsilon$ в точку $1+\varepsilon$ на верхнем берегу разреза аргумент подынтегральной функции уменьшается на π, а при переходе из той же точки на нижний берег разреза, тоже в точку $1+\varepsilon$, аргумент увеличивается на π. Поэтому

$$I_M = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_n}^{1} (z-1)^{-\delta} e^{-i\delta\pi} [R(z)]^{1/M} \frac{\varphi_s(z)}{z^{n+1}}\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{r_n} (z-1)^{-\delta} e^{i\delta\pi} [R(z)]^{1/M} \frac{\varphi_s(z)}{z^{n+1}}\, dz =$$

$$= \frac{\sin(-\delta\pi)}{\pi}\int_{r_n}^{1} (y-1)^{-\delta} [R(y)]^{1/M} \frac{\varphi_s(y)}{y^{n+1}}\, dy.$$

Аналогично можно показать, что

$$I_k = \frac{\sin(\delta_k\pi)}{\pi}\int_{r_n\zeta^k}^{\zeta^k} |(1-z\zeta^{-k})^{\delta_k}| \, [R_k(z)]^{1/M} \frac{\varphi_s(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$

где

$$\delta_k = \frac{\beta_k}{M}, \quad R_k(z) = \prod_{i=1, i\neq k}^{M} (1-z\zeta^{-i})^{\beta_i}, \quad k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Перейдем к оценке этих интегралов.

1. В интеграле I_M положим $r_n = 1+\varepsilon_n$, $\varepsilon_n = (2^{a-1}+1)\ln n/n$, и произведем замену переменной: $y = 1+(u/n)$. Тогда

$$I_M = \frac{\sin\delta\pi}{\pi n^{1-\delta}}\int_{0}^{n\varepsilon_n} \frac{\left[R\left(1+\frac{u}{n}\right)\right]^{1/M} \varphi_s\left(1+\frac{u}{n}\right)}{u^{\delta}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{n+1}}\, du.$$

Легко видеть, что

$$\left[R\left(1+\frac{u}{n}\right)\right]^{1/M} = [R(1)]^{1/M}(1+o(1)).$$

Функцию $\varphi_s(1+\frac{u}{n})$ можно представить в следующем виде:

$$\varphi_s\left(1+\frac{u}{n}\right) = \varphi_s(1) + \varphi_s'(1+\omega)\frac{u}{n} = \varphi_s(1)\,[1+q_n],$$

где

$$q_n = \frac{\varphi_s'(1+\omega)}{\varphi_s(1)}\frac{u}{n}, \qquad 0 < \omega < \frac{u}{n} \leqslant \varepsilon_n.$$

Так как по условиям теоремы величины c_k/d_s стремятся к нулю равномерно по k и $s = o(n)$, то при $x = e^{it/d_s}$ имеем

$$(1+\varepsilon_n)^s \sim 1, \qquad |x^{c_k}-1| \sim t\left|\frac{c_k}{d_s}\right| \leqslant t\lambda_s, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda_s \to 0$ при $s \to \infty$. Поэтому

$$|q_n| \leqslant \varepsilon_n \left| \frac{\exp\{P_s(1+\omega)\} \cdot P_s'(1+\omega)}{\exp\{P_s(1)\}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \exp\{|P_s(1+\omega)| + |P_s(1)|\} \cdot \left| \sum_{k=1}^{s}{}^{*} (x^{c_k} - 1)(1+\omega)^{k-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \exp\{t\lambda_s (1+\varepsilon_n)^s \ln s + t\lambda_s \ln s\} \cdot t\lambda_s s (1+\varepsilon_n)^s \sim$$

$$\sim ts\varepsilon_n \lambda_s \exp\{2t\lambda_s \ln s\} = t\varepsilon_n \lambda_s s^{1+2t\lambda_s} = o(n^{-\frac{\alpha}{2}}), \quad \alpha > 0.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$I_M \sim \frac{\sin \delta\pi}{\pi n^{1-\delta}} [R(1)]^{1/M} \varphi_s(1) \int_0^{n\varepsilon_n} u^{-\delta} e^{-u}\, du \sim$$

$$\sim [R(1)]^{1/M} \frac{\sin \delta\pi}{\pi n^{1-\delta}} \varphi_s(1) \Gamma(1-\delta) = \frac{[R(1)]^{1/M}}{\Gamma(\delta)} \frac{\varphi_s(1)}{n^{1-\delta}}. \tag{16}$$

2. В каждом из интегралов I_k, $k=1, 2, \ldots, M-1$, произведем замену переменной: $z = \zeta^k \left(1 + \frac{v}{n}\right)$. Тогда

$$|I_k| \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_0^{n\varepsilon_n} \left(\frac{v}{n}\right)^{\delta_k} \left| \left[R_k \left(\zeta^k + \zeta^k \frac{v}{n}\right)\right]^{1/M} \right| \frac{\left| \varphi_s \left(\zeta^k + \zeta^k \frac{v}{n}\right) \right|}{\left(1 + \frac{v}{n}\right)^{n+1}} dv.$$

Ясно, что $\left| \left[R_k \left(\zeta^k + \zeta^k \frac{v}{n}\right)\right]^{1/M} \right|$ является ограниченной величиной. Так же, как в п. 1, можно показать, что при $n \to \infty$

$$\varphi_s \left(\zeta^k + \zeta^k \frac{v}{n}\right) = \varphi_s(\zeta^k)[1 + o(1)].$$

Таким образом, получаем

$$|I_k| \leqslant \frac{T}{n^{1+\delta_k}} |\varphi_s(\zeta^k)| \int_0^{n\varepsilon_n} v^{\delta_k} e^{-v}\, dv \sim T \cdot \frac{\Gamma(1+\delta_k) |\varphi_s(\zeta^k)|}{n^{1+\delta_k}},$$

где T — константа.

Отсюда следует, что

$$|I_k| \leqslant |I_M| \cdot \frac{|\varphi_s(\zeta^k)|}{|\varphi_s(1)|} \frac{T^*}{n^{\delta+\delta_k}},$$

T^* — константа.

Как и при выводе (15), имеем

$$\frac{|\varphi_s(\zeta^k)|}{|\varphi_s(1)|} \leqslant \exp\{|P_s(\zeta^k)| + |P_s(1)|\} \leqslant \exp\{2t\lambda_s \ln s\} < n^{2t\lambda_s},$$

поэтому асимптотика I_k/I_M зависит от величины $\delta + \delta_k$. При $a=2$ из (7) видно, что величины $\beta_k = \delta_k M$ могут принимать лишь следующие значения: $\overline{m}_1+\overline{m}_2-1$, $\overline{m}_1-1$, $\overline{m}_2-1$, -1, откуда $\delta M+\beta_k>0$ и $\delta+\delta_k>0$. В случае $a=3$ также нетрудно установить, что $\delta+\delta_k>0$ для $k=1, 2, \ldots, M-1$. При произвольном a и произвольных $m_1, m_2, \ldots, m_a$ доказательство этого соотношения представляет определенные трудности. Однако в случае, когда $m_1, m_2, \ldots, m_a$ попарно взаимно просты, легко видеть, что β_k $(k\neq M)$ могут принимать лишь значения $\pm(m_{i_1}-1)(m_{i_2}-1)\ldots(m_{i_r}-1)$, $r<a$, в то время как $\delta M=(m_1-1)(m_2-1)\ldots(m_a-1)$, т. е. $\delta M+\beta_k>0$ и $\delta+\delta_k>0$. Итак, при $n\to\infty$

$$I_k=o(|I_M|), \qquad k=1, 2, \ldots, M-1. \tag{17}$$

3. Наконец, оценим I_0 — интеграл по окружности. При $|z|=1+\varepsilon_n$ справедливы следующие оценки:

$$|(1-z)^{-\delta}\sqrt[M]{R(z)}|\leqslant(2+\varepsilon_n)^{2^{a-1}}\varepsilon_n^{-2^{a-1}}, \qquad |\varphi_s(z)|\leqslant s^{2t\lambda_s}$$

(как при выводе формулы (16)). Поэтому

$$|I_0|\leqslant(2+\varepsilon_n)^{2^{a-1}}\varepsilon_n^{-2^{a-1}}(1+\varepsilon_n)^{-n}s^{2t\lambda_s}<$$
$$<3^{2^{a-1}}\left[\frac{(2^{a-1}+1)\ln n}{n}\right]^{-2^{a-1}}n^{-2^{a-1}-1+2t\lambda_s}=O\left(\frac{1}{n^{1-2t\lambda_s}(\ln n)^{2^{a-1}}}\right)=o\left(\frac{1}{n^{1-\delta'}}\right),$$

где δ' — положительное число. Отсюда следует, что при $n\to\infty$

$$I_0=o(|I_M|). \tag{18}$$

Из (15)—(18) получаем

$$A_n\sim\frac{[R(1)]^{1/M}\varphi_s(1)}{\Gamma(\delta)\,n^{1-\delta}},$$

т. е. (12) с $\rho=\sqrt[M]{R(1)}$.

Совершенно аналогично доказывается, что при $n\to\infty$

$$B_n\sim\frac{[R(1)]^{1/M}}{\Gamma(\delta)\,n^{1-\delta}}. \tag{19}$$

Теперь возвратимся к характеристической функции (11):

$$A_n^{(1)}(t)=e^{-ita_s/d_s}\frac{A_n}{B_n}\sim\exp\left\{-it\frac{a_s}{d_s}+\sum_{k=1}^{s}{}^*\frac{1}{k}(e^{itc_k/d_s}-1)\right\}=$$
$$=\exp\left\{-it\frac{a_s}{d_s}+\sum_{k=1}^{s}{}^*\frac{itc_k}{d_s}-\sum_{k=1}^{s}{}^*\frac{t^2c_k^2}{2d_s^2}+T(s)\right\}=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+T(s)\right\},$$

где $T(s)=\sum\limits_{k=1}^{s}{}^*\frac{1}{k}\sum\limits_{m=3}^{\infty}\left(it\frac{c_k}{d_s}\right)^m\frac{1}{m!}$.

В предположениях теоремы

$$|T(s)|<\sum_{k=1}^{s}{}^*\frac{1}{k}\sum_{m=3}^{\infty}\left|t\frac{c_k}{d_s}\right|^m<\sum_{k=1}^{s}{}^*\frac{1}{k}2\left|t\frac{c_k}{d_s}\right|^3\leqslant 2t^3\sum_{k=1}^{s}{}^*\frac{1}{k}\frac{c_k^2}{d_s^2}\lambda_s=2t^3\lambda_s,$$

так как $\left|\frac{c_k}{d_s}\right| \leqslant \lambda_s$, причем $\lambda_s \to 0$ при $s \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$A_n^{(1)}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Теорема доказана.

Перейдем к изучению случайной величины $\xi_s^{(2)}$, заданной на $S_n^{(2)}$ (см. (1)). Пусть

$$b_s = \sum_{k=1}^{s}{}^{**} \frac{c_k}{k}, \quad h_s^2 = \sum_{k=1}^{s}{}^{**} \frac{c_k^2}{k}.$$

Теорема 2. *Если при* $n \to \infty$:

1) $s \to \infty$, *причем* $s \leqslant Cn^{1-\alpha}$, C — *константа*, $\alpha > 0$,

2) $h_s^2 \to \infty$,

3) $c_k/h_s \to 0$ *при* $s \to \infty$ *равномерно по* k,

то распределение случайной величины $\theta_s^{(2)} = (\xi_s^{(2)} - b_s)/h_s$ *асимптотически нормально с параметрами* (0, 1).

Доказательство. Характеристическая функция величины $\theta_s^{(2)}$ равна

$$A_n^{(2)}(t) = e^{-itb_s/h_s} g_n^{(2)}(e^{it/h_s}).$$

Функция $g_n^{(2)}(x)$ равна отношению коэффициентов при z^n в разложении по степеням z функций $G_s^{(2)}(x, z; a)$ и $G_s^{(2)}(1, z; a)$, определенных в (10).

Заметим, что если числа $m_1, m_2, \ldots, m_a$ имеют общий наибольший делитель $m > 1$, то функция $G_s^{(2)}(x, z; a)$ является фактически функцией от x и $v = z^m$. Таким образом, задача сводится к изучению коэффициентов при v^p, $p = n/m$, в разложении по степеням v функций

$$H_s(x, v; a) = \left[\prod_{t=1}^{a} \prod_{i_1 < i_2 < \ldots \leq i_t} \left(1 - v^{\overline{m}^{i_1 i_2 \ldots i_t}}\right)^{(-1)^t M/\overline{m}^{i_1 \ldots i_t}}\right]^{1/M} \times$$
$$\times \exp\left\{\sum_{l=1}^{s/m}{}'' (x^{c_{ml}} - 1)\frac{v^l}{ml}\right\}$$

и $H_s(1, v; a)$, где $\overline{m}^{i_1 i_2 \ldots i_t} = \text{о. н. к.}\left(\frac{m_{i_1}}{m}, \frac{m_{i_2}}{m}, \ldots, \frac{m_{i_t}}{m}\right)$, $M = \text{о. н. к.}$ $(m_1, m_2, \ldots, m_a)$, а $\sum''$ означает суммирование только по числам, кратным хотя бы одному из $\frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_a}{m}$.

Обозначим эти коэффициенты соответственно через C_p и D_p. Точно так же, как при доказательстве (12) и (19), устанавливается, что при $x = e^{it/h_s}$ имеем:

$$C_p \sim \frac{R^* \psi_s(1)}{\Gamma(\delta^*) p^{1-\delta^*}}, \quad D_p \sim \frac{R^*}{\Gamma(\delta^*) p^{1-\delta^*}},$$

где R^* — константа, $0 < \delta^* < 1$, $\psi_s(v) = \exp\left\{\sum_{l=1}^{s/m}{}'' (x^{c_{ml}} - 1)\frac{v^l}{ml}\right\}$.

Следовательно,

$$A_n^{(2)}(t) = e^{-itb_s/h_s}\frac{C_p}{D_p} \sim \exp\left\{-it\frac{b_s}{h_s} + \sum_{l=1}^{s/m}{}'' \frac{1}{ml}\left(e^{itc_{ml}/h_s} - 1\right)\right\}.$$

Легко видеть, что $A_n^{(2)}(t) \to e^{-t^2/2}$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

§ 4. Предельные распределения ξ_n (m, β)

Рассмотрим $S_n(m, \beta)$ — совокупность подстановок степени n, у которых длины циклов сравнимы с β по модулю m. Если $C_{nk}(m, \beta)$ — число подстановок в $S_n(m, \beta)$ с k циклами и

$$C_n(x;\ m,\ \beta) = \sum_{k=0}^{n} C_{nk}(m,\ \beta)\, x^k,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x;\ m,\ \beta)\frac{t^n}{n!} = e^{xa(t;m,\beta)}, \tag{20}$$

где

$$a(t;\ m,\ \beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{mj+\beta}}{mj+\beta}.$$

С помощью корней степени m из единицы можно записать

$$a(t;\ m,\ \beta) = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} e^{-\frac{2\pi\beta ki}{m}} \ln\left(1 - te^{\frac{2\pi ki}{m}}\right), \tag{21}$$

здесь имеется в виду главное значение логарифма. Общее число подстановок в $S_n(m, \beta)$ выражается следующим образом:

$$C_n(m,\ \beta) = C_n(1;\ m,\ \beta). \tag{22}$$

Зададим на $S_n(m, \beta)$ равномерное вероятностное распределение и рассмотрим случайную величину $\xi_n(m, \beta)$, равную числу циклов в случайно выбранной подстановке. Производящая функция этой величины записывается следующим образом:

$$P_n(x;\ m,\ \beta) = C_n(x;\ m,\ \beta)/C_n(m,\ \beta). \tag{23}$$

Мы будем рассматривать два случая: 1) $\beta = m$; 2) $\beta = m/2$, m — четное. Частный случай $m = 2$ рассматривался в работе [5].

Из (20) и (21) имеем

$$C_n(x;\ m,\ m) = n!\binom{\frac{x+n}{m} - 1}{n/m}, \quad m \mid n, \tag{24}$$

$$C_n\left(x;\ m,\ \frac{m}{2}\right) = n!\sum_{j=0}^{2n/m}\binom{x/m}{2n/m - j}\binom{x/m + j - 1}{j}, \quad \frac{m}{2}\,\Big|\, n. \tag{25}$$

Учитывая (22) и (23), из этих формул легко получаются выражения для производящих функций величин $\xi_n(m, m)$ и $\xi_n(m, m/2)$. Важную роль в дальнейшем играет следующая

Лемма. *Для функций $C_n(x; m, m)$ и $C_n(x; m, m/2)$ при $n\to\infty$ имеют место следующие асимптотические представления*:

$$C_n(x; m, m) = \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{1-\frac{x}{m}}}(1+o(1)), \quad m\,|\,n, \tag{26}$$

$$C_n\left(x; m, \frac{m}{2}\right) = \frac{n!\,2^{\frac{2x}{m}-1}}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{1-\frac{x}{m}}}(1+o(1)), \quad \frac{m}{2}\,\Big|\,n, \tag{27}$$

где $\Gamma(y)$ — гамма-функция, а $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю равномерно по x в интервале $[1-\delta, 1+\delta]$, $\delta>0$.

Доказательство. Используя формулу Стирлинга для гамма-функции, при $k\to\infty$ можно получить следующие оценки:

$$\binom{y+k-1}{k} = \frac{1}{\Gamma(y)\,k^{1-y}}(1+o(1)), \tag{28}$$

$$\binom{y}{k} = \frac{(-1)^k y(y-1)}{\Gamma(2-y)\,k^{1+y}}(1+o(1)), \tag{29}$$

равномерные по y в интервале $[1-\delta, 1+\delta]$, $\delta>0$.

Формула (26) сразу следует из (28). Поэтому остается доказать (27). Выберем число ν, $0<\nu<{}^1/_2$, и разобьем сумму из (25) на три части:

$$\frac{1}{n!}C_n\left(x; m, \frac{m}{2}\right) = S_1 + S_2 + S_3, \tag{30}$$

где

$$S_1 = \sum_{j=0}^{[(n/m)^\nu]} \binom{x/m}{(2n/m)-j}\binom{(x/m)+j-1}{j},$$

а S_2 и S_3 — соответствующие суммы в пределах от $[(n/m)^\nu]+1$ до $\frac{2n}{m} - [(n/m)^\nu] - 1$ и от $\frac{2n}{m} - \left[\left(\frac{n}{m}\right)^\nu\right]$ до $\frac{2n}{m}$.

Применяя формулу (28), находим, что

$$S_3 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\left(\frac{2n}{m}\right)^{1-(x/m)}} \sum_{k=0}^{[(n/m)^\nu]} \binom{x/m}{k}(1+o(1)),$$

откуда следует, что

$$S_3 = \frac{2^{2x/m-1}}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{1-x/m}}(1+o(1)) \tag{31}$$

при $n\to\infty$ равномерно по x.

Используя формулу (29), получаем

$$S_1=\frac{(-1)^{2n/m}(x/m)((x/m)-1)}{\Gamma\left(2-\frac{x}{m}\right)\left(\frac{2n}{m}\right)^{1+x/m}}\sum_{j=0}^{[(n/m)^{\nu}]}\binom{-x/m}{j}(1+o(1)).$$

Из этого равенства вытекает следующая оценка:

$$S_1=S_3\cdot O\left(\frac{1}{n^{2x/m}}\right), \tag{32}$$

равномерная по x.

Сумму S_2 разобьем, в свою очередь, на две суммы $S_2^{(1)}$ и $S_2^{(2)}$ с пределами суммирования соответственно от $\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\nu}\right]+1$ до $\frac{n}{m}-1$ и от $\frac{n}{m}$ до $\frac{2n}{m}-\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\nu}\right]-1$.

С помощью формул (28) и (29) получаем

$$|S_2^{(1)}|\leqslant\frac{\frac{x}{m}\left|\frac{x}{m}-1\right|}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(2-\frac{x}{m}\right)}\frac{1+o(1)}{\left(\frac{2n}{m}\right)^{1+(x/m)}}\sum_{j=[(n/m)^{\nu}]+1}^{(n/m)-1}\frac{1}{j^{1-(x/m)}},$$

$$|S_2^{(2)}|\leqslant\frac{\frac{x}{m}\left|\frac{x}{m}-1\right|}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(2-\frac{x}{m}\right)}\frac{1+o(1)}{\left(\frac{n}{m}\right)^{1-(x/m)}}\sum_{k=[(n/m)^{\nu}]+1}^{n/m}\frac{1}{k^{1+(x/m)}}.$$

Из этих неравенств следует, что $S_2^{(1)}=S_3\cdot O((n/m)^{-x/m})$, $S_2^{(2)}=$ $=S_3\cdot O((n/m)^{-x\nu/m})$, т. е.

$$S_2=S_3\cdot O\left(\frac{1}{(n/m)^{x\nu/m}}\right),\quad n\to\infty, \tag{33}$$

равномерно по x в указанной области. Справедливость формулы (27) следует теперь из (30)—(33). Лемма доказана.

Положив в (26) и (27) $x=1$ и приняв во внимание (22), получаем

Следствие 1. *При $n\to\infty$ справедливы асимптотические формулы*

$$C_n(m,m)=\frac{n!}{\Gamma(1/m)(n/m)^{1-(1/m)}}(1+o(1)),\quad m\,|\,n,$$

$$C_n(m,m/2)=\frac{n!\,2^{(2/m)-1}}{\Gamma(1/m)(n/m)^{1-(1/m)}}(1+o(1)),\quad \frac{m}{2}\,\Big|\,n.$$

Из леммы, следствия 1 и формулы (23) получаем

Следствие 2. *При $n\to\infty$ для производящих функций случайных величин $\xi_n(m,m)$ и $\xi_n(m,m/2)$ имеют место асимптотические представления*

$$P_n(x;m,m)=\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(x/m)}\left(\frac{n}{m}\right)^{(x-1)/m}(1+o(1)),\quad m\,|\,n, \tag{34}$$

$$P_n(x;m,m/2)=\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(x/m)}\left(\frac{4n}{m}\right)^{(x-1)/m}(1+o(1)),\quad \frac{m}{2}\,\Big|\,n, \tag{35}$$

равномерно для всех x, $1-\delta\leqslant x\leqslant1+\delta$, $\delta>0$.

Теперь мы можем найти предельные распределения случайной величины $\xi_n(m, m/2)$.

Теорема 3. *Пусть $m=m(n)$ — функция, значения которой — натуральные четные числа, причем $m/2 \mid n$.*

а) *Если* $\frac{1}{m}\ln\frac{n}{m}\to\lambda<\infty$ *при* $n\to\infty$, *то случайная величина* $\xi_n(m, m/2)$ *в пределе распределена по закону Пуассона с параметром* λ.

б) *Если* $\frac{1}{m}\ln\frac{n}{m}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то случайная величина* $\xi_n'(m, m/2)=$ $=\left(\xi_n(m, m/2)-\frac{1}{m}\ln\frac{n}{m}\right)\left(\frac{1}{m}\ln\frac{n}{m}\right)^{-1/2}$ *распределена асимптотически нормально с параметрами* $(0, 1)$.

Точно такие же утверждения справедливы и для случайной величины $\xi_n(m, m)$ *с условием, что* $m=m(n)$ *принимает натуральные значения и* $m \mid n$.

Доказательство. Рассмотрим $M_n(t;\ m,\ m/2)$ — производящую функцию моментов случайной величины $\xi_n(m, m/2)$. Из формулы (35) следует, что при $n\to\infty$

$$M_n(t;\ m,\ m/2)=\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}e^t\right)}\left(\frac{4n}{m}\right)^{\frac{1}{m}(e^t-1)}(1+o(1)),$$

равномерно для всех t, $-\delta'\leqslant t\leqslant\delta'$, $\delta'>0$. Отсюда в случае а) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t;\ m,\ m/2)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

для любого фиксированного t в интервале $[-\delta',\ \delta']$. Так как в правой части последнего равенства стоит производящая функция моментов распределения Пуассона с параметром λ, то справедливость пункта а) доказываемой теоремы вытекает из теоремы Куртисса (см. [7]).

Из формулы (35) нетрудно получить асимптотическое представление производящей функции моментов величины $\xi_n'(m, m/2)$:

$$M_n'(t;\ m,\ m/2)=e^{-t\sigma}\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}e^{t/\sigma}\right)}\left(\frac{4n}{m}\right)^{\frac{1}{m}(e^{t/\sigma}-1)}(1+o(1)),$$

равномерное по $t\in[-\delta',\ \delta']$ при $n\to\infty$; здесь $\sigma^2=\frac{1}{m}\ln\frac{n}{m}$.

Из этого представления вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} M_n'(t;\ m,\ m/2)=e^{t^2/2}$$

для любого фиксированного t из $[-\delta',\ \delta']$.

Справедливость пункта б) теоремы 3 следует теперь из упомянутой теоремы Куртисса.

Доказательство соответствующих утверждений теоремы относительно случайной величины $\xi_n(m, m)$ проводится точно так же, с использованием формулы (34). Теорема 3 доказана.

Поступила в редакцию
14/IV 1978 г.

Литература

1. **В. Л. Гончаров,** Из области комбинаторики, Изв. АН СССР, серия матем., **8** (1944), 3—48.
2. **В. Н. Сачков,** Об экстремальных точках пространства симметричных стохастических матриц, Матем. сб., **96** (138) (1975), 447—457.
3. **В. Е. Тараканов, В. П. Чистяков,** О цикловой структуре случайных подстановок, Матем. сб., **96** (138) (1975), 594—600.
4. **В. Ф. Колчин, В. П. Чистяков,** К цикловой структуре случайных подстановок, Матем. заметки, **18**, вып. **6** (1975), 929—938.
5. **Ю. В. Болотников, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов,** Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок, Матем. сб., **99 (141)** (1976), 121—133.
6. **Дж. Риордан,** Введение в комбинаторный анализ, Москва, ИЛ, 1963.
7. **J. H. Curtiss,** A note on the theory of moment generating functions, Ann. Math. Statist., **13, № 3** (1942), 430—433.