С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский, О случайном поиске глобального экстремума,
Теория вероятн. и ее примен., 1983, том 28, выпуск 1, 129–134

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXVIII 1983 Выпуск 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СЛУЧАЙНОМ ПОИСКЕ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА

ЕРМАКОВ С. М., ЖИГЛЯВСКИЙ А. А.

Проблема поиска глобального экстремума функции при достаточно широких предположениях сравнительно мало исследована. Имеющиеся содержательные результаты относятся к простейшим методам случайного поиска.

В данной работе рассматриваются более сложные вероятностные модели, с помощью которых возможен анализ ряда методов [1, 2], предложенных на основе эвристических соображений в хорошо зарекомендовавших себя при решении практических задач. Эти модели основаны на конструировании последовательности вероятностных распределений, сходящейся для широкого класса функций к предельному распределению, сосредоточенному в точке глобального экстремума. Моделирование упомянутых распределений и составляет содержание соответствующих алгоритмов.

Пусть X — компактное сепарабельное метрическое пространство, ρ — метрика на X, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X, f —неотрицательная ограниченная функция на X, непрерывная во всех точках кроме, возможно, конечного их числа, $\mu(dx)$ — вероятностная мера на $\mathscr{B}$. Рассмотрим задачу поиска точки x^*, в которой $f(x^*) = \max_{x\in X} f(x)$, по результатам измерения случайной величины $\eta(x_i) = f(x_i) + \xi(x_i)$ в точках $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots$, определяемых алгоритмом оптимизации.

Будем предполагать:

а) $\xi(x)$ для любого $x \in X$ — случайная величина, имеющая распределение $F(x, d\xi)$ с нулевым математическим ожиданием и сосредоточенное на конечном интервале $[-d, d]$, причем для любых $x_1, x_2, \ldots$ из X случайные величины $\xi(x_1), \xi(x_2), \ldots$ взаимно независимы;

б) $\eta(x) \geqslant c_1 > 0$ для всех $x \in X$ с вероятностью 1.

Для решения этой достаточно общей задачи может быть использован следующий

Алгоритм 1.

1. *Выбираем распределение* $Q(0, N_{-1}; dx) = P_0(dx)$ *на* $\mathscr{B}$, *полагаем* $s = 0$.

2. *Моделируем заданное число* N_s *раз распределение* $Q(s, N_{s-1}; dx)$, *получаем* $x_1^{(s)}, \ldots, x_{N_s}^{(s)}$.

3. *Полагаем* $Q(s+1, N_s; dx) = \sum_{i=1}^{N_s} p_i^{(s)} Q_s(x_i^{(s)}, dx)$, *где* $p_i^{(s)} = \eta(x_i^{(s)}) / \sum_{j=1}^{N_s} \eta(x_j^{(s)})$, $Q_s(y, dx)$ — *заданная переходная вероятность (т. е. вероятностная мера на* $\mathscr{B}$ *по второму аргументу при любом* $y \in X$ *и* $\mathscr{B}$*-измеримая функция по первому).*

4. *Полагаем* $s = s + 1$ *и, если* $s \leqslant s_k$, *переходим к п. 2.*

Величина x^* оценивается одним из стандартных способов по точкам последней итерации. Поведение алгоритма 1 в некоторых частных случаях было исследовано в работах [1, 3].

Распределения $Q(s+1, N_s; dx)$ являются условными распределениями случайных элементов $x_i^{(s+1)}$ $(i = 1, \ldots, N_{s+1},\ s = 0, 1, \ldots)$ при фиксированных значениях $x_1^{(s)}, \ldots, x_{N_s}^{(s)}, \xi(x_1^{(s)}), \ldots, \xi(x_{N_s}^{(s)})$. Далее в работе изучается асимптотическое (при $N_s \to \infty$, $s \to \infty$) поведение $P(s+1, N_s; dx)$ — безусловных распределений случайных элементов $x_i^{(s+1)}$ $(i = 1, \ldots, N_{s+1},\ s = 0, 1, \ldots)$. Мы покажем слабую сходимость распределений $P(s+1, N_s; dx)$ к $\varepsilon_{x^*}(dx)$ — распределению, сосредоточенному в x^*. Эта сходимость следует из того, что при больших N_s распределение $P(s+1, N_s; dx)$ является приближением к распределению $f^s(x)\,\mu(dx) \Big/ \int_X f^s(y)\,\mu(dy)$. Впервые алгоритмы оптимизации такого типа были рассмотрены в [4].

Обозначим $P(s, N_{s-1}; dx_1, \ldots, dx_{N_s})$ совместное распределение случайных элементов $x_1^{(s)}, \ldots, x_{N_s}^{(s)}$. Тогда

$$P(0, N_{-1}; dx_1, \ldots, dx_{N_0}) = P_0(dx_1) \ldots P_0(dx_{N_0}),$$

$$P(s+1, N_s; dx_1, \ldots, dx_{N_{s+1}}) = \int\limits_{X^{N_s}} \int\limits_{-d}^{d} \ldots \int\limits_{-d}^{d} P(s, N_{s-1}; dy_1, \ldots, dy_{N_s}) \times$$

$$\times F(y_1, d\xi_1) \ldots F(y_{N_s}, d\xi_{N_s}) \prod_{k=1}^{N_{s+1}} \sum_{i=1}^{N_s} [f(y_i) + \xi_i] Q(y_i, dx_k) \Big/ \sum_{j=1}^{N_s} [f(y_j) + \xi_j], \qquad (1)$$

$$P(s+1, N_s; dx) = P(s+1, N_s; dx, X, X, \ldots, X).$$

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия а), б) и*

в) $Q_s(y, dx) = q_s(y, x)\,\mu(dx)$, $\sup\limits_{x,\, y \in X} q_s(y, x) \leqslant M_s < \infty$ *для всех* $s = 0, 1, \ldots$.

Тогда для любых $s = 0, 1, \ldots$ *и* $N_s = 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$P(s+1, N_s; dx) = \left[\int\limits_X P(s, N_{s-1}; dz) f(z)\right]^{-1} \int\limits_X P(s, N_{s-1}; dy) f(y) R(s, N_s, y; dx), \qquad (2)$$

где $R(s, N_s, y; dx) = Q_s(y, dx) + \Delta(s, N_s; dx)$; *при любом* $s = 0, 1, \ldots$ *обобщенные (знакопеременные) меры* $\Delta(s, N_s; dx)$ *сходятся по вариации к 0 при* $N_s \to \infty$ *со скоростью* порядка $N_s^{-1/2}$: $\| \Delta(s, N_s; \cdot) \| = O(N_s^{-1/2})$ $(N_s \to \infty)$.

Доказательство. Используя (1), по индукции получаем, что для любых $s = 0, 1, \ldots$ случайные элементы $x_1^{(s)}, \ldots, x_{N_s}^{(s)}$ симметрично зависимы. Маргинальное распределение $P(s+1, N_s; dx)$ выразим следующим образом (для краткости положим $N = N_s$, $M = N_{s-1}$):

$$P(s+1, N; dx) = \int\limits_{X^N} \int\limits_{-d}^{d} \ldots \int\limits_{-d}^{d} P(s, M; dy_1, \ldots, dy_N) F(y_1, d\xi_1) \ldots$$

$$\ldots \times F(y_N, d\xi_N) \sum_{i=1}^{N} [f(y_i) + \xi_i] Q_s(y_i, dx) \Big/ \sum_{j=1}^{N} [f(y_j) + \xi_j] =$$

$$= \int\limits_{X^N} \int\limits_{-d}^{d} \ldots \int\limits_{-d}^{d} P(s, M; dy_1, \ldots, dy_N) F(y_1, d\xi_1) \ldots F(y_N, d\xi_N) \times$$

$$\times \left[N^{-1} \sum_{j=1}^{N} [f(y_j) + \xi_j]\right]^{-1} [f(y_1) + \xi_1] Q_s(y_1, dx).$$

Полученное соотношение можно записать в виде (2), где

$$\Delta(s, N; dx) = \int\limits_{X^N} \int\limits_{-d}^{d} \ldots \int\limits_{-d}^{d} P(s, M; dy_1, \ldots, dy_N) F(y_1, d\xi_1) \ldots F(y_N, d\xi_N) \times$$

$$\times [f(y_1) + \xi_1] Q_s(y_1, dx) \left\{ \left[N^{-1} \sum_{j=1}^{N} [f(y_j) + \xi_j]\right]^{-1} - \left[\int\limits_X P(s, M; dz) f(z)\right]^{-1} \right\} \qquad (3)$$

Покажем, что $\Delta(s, N; \cdot) \to 0$ по вариации при $N \to \infty$. В данном случае это означает [5, с. 118], что $\int\limits_X \delta(N, x)\,\mu(dx) \to 0$ при $N \to \infty$, где

$$\delta(N, x) = \Bigg| \int\limits_{X^N} \int\limits_{-d}^{d} \ldots \int\limits_{-d}^{d} P(s, M; dy_1, \ldots, dy_N) F(y_1, d\xi_1) \ldots$$

$$\ldots \times F(y_N, d\xi_N) [f(y_1) + \xi_1] q_s(y_1, x) \left\{ \left[N^{-1} \sum_{j=1}^{N} [f(y_j) + \xi_j]\right]^{-1} - \left[\int\limits_X P(s, M; dz) f(z)\right]^{-1} \right\} \Bigg|.$$

Для этого достаточно, чтобы для любого $\varepsilon_1 > 0$ и любого $x \in X$ существовало $N_* =$

$= N_* (\varepsilon_1)$ такое, что при $N \geqslant N_*$

$$\delta (N, x) < \varepsilon_1 \tag{4}$$

Это мы и докажем.

Поскольку случайные элементы $x_1^{(s)}, \ldots, x_N^{(s)}$ при любом N симметрично зависимы, то симметрично зависимы и случайные величины $\eta (x_i^{(s)}) = f (x_i^{(s)}) + \xi (x_i^{(s)})$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому [6, с. 421] случайные величины $\varkappa_N = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \eta (x_j^{(s)})$ сходятся в среднем к некоторой случайной величине $\varkappa$, независимой от всех $\varkappa_i$, $i = 1, 2, \ldots$, причем $\mathbf{E}\varkappa = \mathbf{E}\eta (x_1^{(s)}) = \int_X P (s, M; dz) f (z)$. Сформулируем это так: для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $N^* \geqslant 1$ такое, что $\mathbf{E} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid < \varepsilon_2$ при $N \geqslant N^*$. Обозначим $\zeta = [f (x_1^{(s)}) + \xi (x_1^{(s)})]\, q_s (x_1^{(s)}, x)$. Ясно, что $\operatorname{vrai\,sup} \zeta \leqslant (\max_{x \in X} f (x) + d)\, M_s = M_*$. Используя независимость $\varkappa$ от $\varkappa_N$ и ζ и условия а) — в), получаем:

$$\delta (N, x) = \left| \mathbf{E} \left(\frac{\zeta}{\varkappa_N} \right) - \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\varkappa} \right| = \frac{1}{\mathbf{E}\varkappa} \left| \mathbf{E} \left(\frac{\varkappa\zeta}{\varkappa_N} \right) - \mathbf{E}\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant [\inf \mathbf{E}\varkappa]^{-1} \left| \mathbf{E} \left(\frac{\varkappa\zeta}{\varkappa_N} - \zeta \right) \right| \leqslant c_1^{-1} \mathbf{E} \left[\left| \frac{\zeta}{\varkappa_N} \right| \mid \varkappa - \varkappa_N \mid \right] \leqslant$$

$$\leqslant c_1^{-1} \operatorname{vrai\,sup} \zeta\, [\operatorname{vrai\,sup} \varkappa_N]^{-1}\, \mathbf{E} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid \leqslant c_1^{-2} M_* \mathbf{E} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid.$$

Таким образом, если положить $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 c_1^2 M_*^{-1}$, $N_* = N^*$, то при $N \geqslant N_*$, будет выполнено (4). Кроме того, из последней цепочки неравенств следует, что $\| \Delta (s, N; \cdot) \| \leqslant c_1^{-2} M_* \mathbf{E} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid$. Из центральной предельной теоремы для симметрично зависимых случайных величин (см. [7]) и неравенства

$$\mathbf{E} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid \leqslant N^{-1/2} + \operatorname{vrai\,sup} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid \mathbf{P} \{ \mid \varkappa_N - \varkappa \mid \geqslant N^{-1/2} \},$$

вытекающего из неравенства, приведенного в [6, с. 169], следует, что $\mathbf{E} \mid \varkappa_N - \varkappa \mid = O (N^{-1/2})$ $(N \to \infty)$ и, следовательно, $\| \Delta (s, N; \cdot) \| = O (N^{-1/2})$ $(N \to \infty)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

г) x^* — *точка, в которой достигается глобальный максимум функции* f, *единственна и* f *непрерывна в некоторой окрестности этой точки;*

д) $\mu \{B_\varepsilon (x)\} > 0$ *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x \in X$, *где* $B_\varepsilon (x) = \{y \in X \mid \rho (x, y) \leqslant \varepsilon\}$;

е) *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при любом* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *множество* $A (\varepsilon) = \{x \in X \mid f (x^*) - f (x) \leqslant \varepsilon\}$ *односвязно и* $\mu \{A (\varepsilon)\} > 0$.

Тогда последовательность распределений $f^m (x)\, \mu (dx) \big/ \int_X f^m (z)\, \mu (dz)$ *слабо сходится к распределению* $\varepsilon_{x^*} (dx)$ *при* $m \to \infty$.

Доказательство. Положим $B_i = B_{\varepsilon_i} (x^*)$;

$$D_i = \overline{X \setminus B_i} = \{x \in X \mid \rho (x, x^*) \geqslant \varepsilon_i\}; \quad i = 1, 2, 4; \quad K_1 = \sup_{x \in D_1} f (x).$$

Выберем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Из условия г) вытекает, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует ε_2 $(0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1)$ такое, что $K_2 = \inf_{x \in B_2} f (x) > K_1$. Для любого $m > 0$ имеем:

$$\int_{B_1} \left(\frac{f (x)}{K_1} \right)^m \mu (dx) > \int_{B_2} \left(\frac{f (x)}{K_1} \right)^m \mu (dx) \geqslant \int_{B_2} \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^m \mu (dx).$$

Переходя к пределу (при $m \to \infty$) в неравенстве

$$\int_{D_1} \mu (dx) / \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^m \int_{B_2} \mu (dx) \geqslant \int_{D_1} \left(\frac{f (x)}{K_1} \right)^m \mu (dx) / \int_{B_1} \left(\frac{f (x)}{K_1} \right)^m \mu (dx) \geqslant 0,$$

получаем: $\int_{D_1} f^m (x)\, \mu (dx) / \int_{B_1} f^m (x)\, \mu (dx) \to 0$, откуда вытекает $\left(c_m = \left[\int_X f^m (x)\, \mu (dx) \right]^{-1} \right)$:

$$c_m \int_{D_1} f^m (x)\, \mu (dx) \to 0, \quad c_m \int_{B_1} f^m (x)\, \mu (dx) \to 1 \quad (m \to \infty). \tag{5}$$

Выберем теперь произвольную непрерывную на X функцию $\psi(x)$. Покажем, что $\lim\limits_{m\to\infty} c_m \int\limits_X f^m(x)\psi(x)\mu(dx) = \psi(x^*)$. Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon_3 > 0$ такое, что $|\psi(x) - \psi(x^*)| < \delta$ при $\rho(x, x^*) \leqslant \varepsilon_3$ и $x \in X$. Положим $\varepsilon_4 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$. Тогда

$$\left| c_m \int\limits_X \psi(x) f^m(x)\mu(dx) - \psi(x^*)\right| \leqslant c_m \int\limits_{B_4} f^m(x)|\psi(x) - \psi(x^*)|\mu(dx) +$$

$$+ c_m \int\limits_{D_4} f^m(x)|\psi(x) - \psi(x^*)|\mu(dx) \leqslant \delta c_m \int\limits_{B_4} f^m(x)\mu(dx) + 2\max_{x\in X}|\psi(x)|\, c_m \int\limits_{D_4} f^m(x)\mu(dx).$$

В силу соотношений (5) и определения слабой сходимости лемма доказана.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из леммы 1.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия а) — в). Тогда для любого $s = 0, 1, \ldots$ распределения $P(s+1, N_s; dx)$ при $N_s \to \infty$ сходятся по вариации к пределу $P_s(dx)$, причем*

$$P_{s+1}(dx) = \left[\int\limits_X P_s(dz) f(z)\right]^{-1} \int\limits_X P_s(dy) f(y) Q_s(y, dx). \tag{6}$$

Выведем условия, достаточные для того чтобы распределения, определяемые по (2) и по (6), слабо сходились при $s \to \infty$ к $\varepsilon_{x^*}(dx)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия в) — е); $Q_s(y, dx)$ (или $R(s, N_s, y; dx)$) при любом $y \in X$ слабо сходятся при $s \to \infty$ к $\varepsilon_y(dx)$;*

ж) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и натуральное s_0 такие, что $P_s(B_\varepsilon(x^*)) \geqslant \delta$ (или $P(s, N_{s-1}; B_\varepsilon(x^*)) \geqslant \delta$) при всех $s \geqslant s_0$.

Тогда последовательность распределений, определенная по (6) (или, соответственно, по (2)) слабо сходится при $s \to \infty$ к $\varepsilon_{x^*}(dx)$.

Доказательство проведем для последовательности распределений (6) (для (2) доказательство аналогично). Из последовательности распределений (6) выберем сходящуюся подпоследовательность $P_{s_k}(dx)$ (это возможно в силу теоремы Прохорова [8, с. 58]), предел обозначим $Q_0(dx)$ (Q_0 — вероятностная мера на $\mathscr{B}$). Из (6) следует, что подпоследовательность $P_{s_k+1}(dx)$ слабо сходится к распределению $Q_1(dx) = L_1 f(x) Q_0(dx)$ (L_1 — константа нормировки) и, аналогично, $P_{s_k+m}(dx)$ слабо сходится к распределению $Q_m(dx) = L_m f^m(x) Q_0(dx)$. Покажем, что существует подпоследовательность P_{s_i}, слабо сходящаяся к ε_{x^*}.

В силу теоремы 2.2 из [8] множество всех конечных пересечений открытых шаров с центрами из счетного всюду плотного в X множества и рациональными радиусами является счетным множеством, определяющим сходимость. Выделим из него подмножество $\mathfrak{A}$, состоящее из множеств Q_1-непрерывности. Занумеруем элементы множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^\infty$. Зафиксируем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=0}^\infty$, $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Поскольку $P_{s_k+m}(A) \xrightarrow[k\to\infty]{} Q_m(A)$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, то существует подпоследовательность $R_{1,m}(dx) = P_{s_{k_m}+m}(dx)$, для которой выполняется $|R_{1,m}(A_1) - Q_m(A_1)| < \varepsilon_m$ при всех $m = 0, 1, \ldots$. Из последовательности $\{R_{k-1,m}(dx)\}_{m=0}^\infty$ ($k = 2, 3, \ldots$) аналогичным образом выделим подпоследовательность $\{R_{k,m}(dx)\}_{m=0}^\infty$, для которой $|R_{k,m}(A_k) - Q_m(A_k)| < \varepsilon_m$. Диагональная подпоследовательность $R_{m,m}(dx)$ обладает свойством $|R_{m,m}(A_i) - Q_m(A_i)| < \varepsilon_m$ для любого $A_i \in \mathfrak{A}$, $i \leqslant m$. Эта подпоследовательность слабо сходится к $\varepsilon_{x^*}(dx)$. Действительно, для любого $A_i \in \mathfrak{A}$

$$|R_{m,m}(A_i) - \varepsilon_{x^*}(A_i)| \leqslant |R_{m,m}(A_i) - Q_m(A_i)| + |Q_m(A_i) - \varepsilon_{x^*}(A_i)|.$$

Первое слагаемое при $m \geqslant i$ не превосходит ε_m и поэтому при $m \to \infty$ стремится к нулю. Второе слагаемое стремится к нулю в силу условий е), ж) и леммы 2.

Таким образом, существует подпоследовательность $P_{s_i}(dx)$, сходящаяся к $\varepsilon_{x^*}(dx)$. Из (6) следует, что $P_{s_i+1}(dx)$ сходится к тому же пределу и, следовательно, любая подпоследовательность последовательности $P_s(dx)$ сходится к этому пределу. Это же верно и для самой последовательности. Теорема доказана.

В следующих двух утверждениях приведены условия, достаточные для сходимости последовательности $P_s(dx)$ к $\varepsilon_{x^*}(dx)$ для двух важных (см. [3]) частных случаев выбора переходных вероятностей $Q_s(y, dx)$.

Следствие 2. *Предположим, что функция f вычисляется без случайной ошибки,*

$$Q_s(x, A) = \int_X 1_{[z \in A, f(x) \leqslant f(z)]} P_s(x, dz) + 1_A(x) \int_X 1_{[f(z) < f(x)]} P_s(x, dz), \tag{7}$$

переходные вероятности $P_s(x, dz)$ слабо сходятся при $s \to \infty$ к $\varepsilon_x(dz)$ при всех $x \in X$, выполнены условия в) — е) и з) мера μ абсолютно непрерывна относительно меры P_0.

Тогда последовательность распределений, определенных по (6), слабо сходится к $\varepsilon_{x^*}(dx)$.

Доказательство. Из условий д) и з) следует, что $P_0(A(\delta)) > 0$, для любого $\delta > 0$, а из (7) следует, что $P_s(A(\delta)) \geqslant \ldots \geqslant P_0(A(\delta))$ для любых $\delta > 0$ и $s = 0, 1, \ldots$ Используя условия г) и е), убеждаемся в справедливости ж). Все условия теоремы 1 выполнены. Следствие доказано.

Для моделирования случайного элемента η_s с распределением $Q_s(y, d\eta_s)$, определенным по (7), нужно сначала получить независимую реализацию ζ_s случайного элемента с распределением $P_s(y, d\zeta_s)$ и положить $\eta_s = \zeta_s$, если $f(\zeta_s) \geqslant f(y)$ и $\eta_s = y$, если $f(\zeta_s) < f(y)$.

Следствие 3. *Пусть $X \subset R^n$, $n \geqslant 1$, $\mu = \mu_n |_{\mathscr{B}}$ (μ_n — мера Лебега), выполнены условия в) — е), з), меры $Q_s(y, dx)$ определены по формуле*

$$Q_s(y, dx) = c_s(y) \beta_s^{-n} \varphi(\beta_s^{-1}(x - y)) \mu_n(dx), \tag{8}$$

где φ — непрерывная симметричная финитная плотность распределения в R^n, $\beta_s > 0$,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s < \infty, \quad c_s(y) = \left[\beta_s^{-n} \int_X \varphi(\beta_s^{-1}(x - y)) \mu_n(dx)\right]^{-1}.$$

Тогда последовательность распределений $P_s(dx)$, определенных по (6), слабо сходится к $\varepsilon_{x^*}(dx)$.

Доказательство. При сделанных предположениях у распределений $P_s(dx)$, $s \geqslant 1$, существуют непрерывные плотности по мере Лебега. Обозначим их $p_s(x)$. Из (8) следует, что $p_s(x) > 0$ для любого $s \geqslant 0$ и тех $x \in X$, для которых $f(x) \neq 0$. Покажем, что выполняется предположение ж). Зафиксируем $\delta > 0$. Из (6) и финитности φ следует, что для любых s и ε имеет место неравенство

$$P_{s+1}(A(\varepsilon + \varepsilon_s)) \geqslant P_s(A(\varepsilon)), \tag{9}$$

где величина $\varepsilon_s \geqslant 0$ определяется через размеры носителя плотности φ, $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \mathrm{const} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s < \infty$. Выберем s_0 таким, что $\sum_{s=s_0}^{\infty} \varepsilon_s < \delta/2$ и положим $\delta_1 = P_{s_0}(A(\delta/2))$. При любом $s \geqslant s_0$

$$P_s(A(\delta)) \geqslant P_{s_0}\left(A\left(\delta/2 + \sum_{t=s_0}^{s} \varepsilon_t\right)\right) \geqslant P_{s_0}(A(\delta/2)) = \delta_1 \tag{10}$$

и поэтому условие ж) выполняется. Следствие доказано.

Для моделирования случайного вектора η_s с распределением $Q_s(y, d\eta_s)$, определенным по (8), нужно получить независимую реализацию ζ_s случайного вектора, распределенного с плотностью φ, проверить принадлежность $y + \beta_s \zeta_s \in X$ (в противном случае получить новую реализацию ζ_s) и принять $\eta_s = y + \beta_s \zeta_s$.

Так же, как и теорема 1, следствия 2 и 3 могут быть переформулированы для последовательности (2). Переформулируем следствие 3.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия, сформулированные в лемме 1 и следствии 3. Тогда существует последовательность натуральных чисел N_s ($N_s \to \infty$ при $s \to \infty$) такая, что последовательность распределений $P(s + 1, N_s; dx)$, определенных по формуле (2), слабо сходится к $\varepsilon_{x^*}(dx)$.*

Доказательство. Повторим доказательство следствия 3, изменим лишь формулы (9) и (10). Потребуем, чтобы N_s были настолько большими, чтобы при любом s вместо (9) выполнялось неравенство $P_{s+1}(A(\varepsilon + \varepsilon_s)) \geqslant P_s(A(\varepsilon))(1 - \delta_s)$, где $0 < \delta_s <$

< 1 и чтобы $\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s < \infty$ (это возможно в силу леммы 1). Вместо (10) будем иметь неравенства:

$$P_s(A(\delta)) \geqslant P_{s_0}\left(A\left(\delta/2 + \sum_{t=s_0}^{s} \delta_t\right)\right) \prod_{t=s_0}^{s} (1-\delta_t) \geqslant \delta_1 \prod_{t=s_0}^{\infty} (1-\delta_t).$$

Для завершения доказательства осталось использовать известный факт: если $0 < \delta_s < 1$ при всех $s = 0, 1, \ldots$ и $\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s < \infty$, то $\prod_{s=0}^{\infty} (1-\delta_s) > 0$.

В заключение заметим, что об эффективности рассмотренных в работе алгоритмов свидетельствуют также проведенные авторами расчеты с целью нахождения экстремума некоторых функций, описанных в литературе в качестве тестовых. ∎

Авторам представляется, что основным результатом работы является аппарат, позволяющий конструировать и исследовать алгоритмы глобального поиска экстремума, основанные на модели последовательности мер, сходящихся к δ-мере, сосредоточенной в точке глобального экстремума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Солнцев В. Н.* Об одной общей схеме случайного поиска экстремума функции.— В сб.: Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике. т. 1, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979, с. 17—24.
2. *Сушков Ю. А.* Об одном способе организации случайного поиска.— В сб.: Исследование операций и статистическое моделирование. в. 1, Л.: ЛГУ, 1972, с. 180—186.
3. *Ермаков С. М., Жиглявский А. А.* Об одном вероятностном методе поиска глобальной оптимизации и планирования экстремальных экспериментов.— В сб.: Вопросы кибернетики. в. 73, М.: Научный совет по компл. проблеме «Кибернетика», 1981, с. 3—24.
4. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975, 472 с.
5. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1973, с. 118.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 720 с.
7. *Blum J. R., Chernoff H., Rosenblatt M., Teicher H.* Central limit theorems for interchangeable process.— Canadian J. Math., 1958, v. 10, p. 222—229.
8. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.

Поступила в редакцию
6.IV.1981

ON A RANDOM SEARCH OF A GLOBAL EXTREMUM

ERMAKOV S. M., ŽIGLJAVSKIĬ A. A. (LENINGRAD)

(Summary)

The problem of a global optimization of a function defined on a compact metric space is studied. We propose algorithms for the construction of sequences of probability distributions converging to the distribution concentrated at the point of global extremum.