



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. V. Yakubovich, Linear-similar Sz.-Nagy–Foias model in a domain,
Algebra i Analiz, 2003, Volume 15, Issue 2, 190–237

<https://www.mathnet.ru/eng/aa792>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 20, 2025, 23:19:40



ЛИНЕЙНО-ПОДОБНАЯ МОДЕЛЬ СЕКЕФАЛЬВИ-НАДЯ-ФОЯША В ОБЛАСТИ

© Д. В. Якубович

§0. Введение

Целью работы является введение новой линейно-подобной функциональной модели линейных операторов и изучение ее простейших свойств. Она обобщает модель С.-Надя-Фояша как для C_0 -сжатий, так и для C_0 -диссипативных операторов. Наша модель строится не только в круге или полуплоскости, но и в достаточно произвольной области. Приведение оператора к модельному „почти диагональному“ виду выписывается напрямую через резольвенту оператора. Основное внимание уделяется C_{00} -случаю. Главные результаты работы были аннотированы в [76].

Пусть Γ — конечное объединение кусочно-гладких кривых в комплексной плоскости \mathbb{C} , множества Ω_{int} , Ω_{ext} открыты и не пересекаются, $\mathbb{C} = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}$, $\Gamma = \partial\Omega_{\text{int}} = \partial\Omega_{\text{ext}}$ (здесь мы опускаем одно техническое условие на Γ). Основой изучения являются модельные пространства $\mathcal{H}(\delta)$, сопоставляемые операторнозначным ограниченным аналитическим функциям δ в Ω_{int} с определенными свойствами.

Рассмотрим частный случай, когда $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$, причем δ^{-1} — мероморфная функция на Ω_{int} , и $\|\delta^{-1}(\lambda)\| \leq C$ п.в. на Γ . Здесь R, R_* — гильбертовы пространства, а $\mathcal{L}(R, R_*)$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов из R в R_* . Всюду в статье рассматриваются только сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ обозначает векторный класс Смирнова R -значных функций в Ω_{ext} (см. ниже §2). Предположим, что Ω_{int} и Ω_{ext} неограничены. В этом частном случае модельное пространство $\mathcal{H}(\delta)$ состоит из функций f , мероморфных в Ω_{int} и голоморфных в Ω_{ext} таких, что

$$f|_{\Omega_{\text{ext}}} \in E^2(\Omega_{\text{ext}}, R), \quad \delta \cdot f|_{\Omega_{\text{int}}} \in E^2(\Omega_{\text{int}}, R_*), \quad f_{\text{int}} = f_{\text{ext}} \text{ п.в. на } \Gamma.$$

Это гильбертово пространство. Общее определение $\mathcal{H}(\delta)$ дано в §2.

Пару линейных операторов (A, J) (возможно, неограниченных) будем называть *2-системой*, если выполнены следующие условия:

1) A — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с непустым полем регулярности $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ и областью определения $\mathcal{D}(A)$ (здесь $\sigma(A)$ — спектр оператора A);

2) $J: \mathcal{D}(J) \rightarrow R$, причем $\mathcal{D}(J) = \mathcal{D}(A) \subset H$ и J ограничен в смысле нормы графика $\|x\|_G \stackrel{\text{def}}{=} (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{1/2}$ в $\mathcal{D}(A)$. Здесь R — гильбертово пространство.

С каждой 2-системой (A, J) связывается преобразование $U_{A,J}$ из H в пространство аналитических на $\rho(A)$ функций, действующее по формуле

$$U_{A,J} x(\lambda) = J(\lambda I - A)^{-1} x, \quad x \in H, \lambda \in \rho(A).$$

В §1 даны общие свойства этого преобразования и показано, что оно в определенном смысле диагонализует оператор A .

Основным предметом статьи является нахождение критериев того, что оператор $U_{A,J}$ осуществляет изоморфизм пространства H на пространство $\mathcal{H}(\delta)$ для некоторой функции δ (этот изоморфизм не предполагается изометрическим). В этом случае будем называть δ *обобщенной характеристической функцией* оператора A . Эффективный критерий такого рода дан в §3. Если $U_{A,J}: H \rightarrow \mathcal{H}(\delta)$ — изоморфизм и $*$ -внутренняя часть функции δ — двусторонне внутренняя функция, то оператор A подобен оператору умножения на z в фактор-пространстве $E^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)/\delta \cdot E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, который, в свою очередь, подобен оператору усеченного сдвига в ортогональном дополнении $E^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \ominus \delta E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$. Тесная связь нашей модели с моделью С.-Надя-Фояша объясняется в §4 и 5. Смысл работы состоит в некотором видоизменении техники С.-Надя-Фояша с тем, чтобы расширить область ее применения.

К операторам A , укладываемым в нашу схему, применим весь хорошо разработанный аппарат модели С.-Надя-Фояша, как-то: описание коммутанта, инвариантных подпространств, функциональное исчисление, критерии базисности собственных векторов и т.д. [13, 20, 60, 61].

В §6 дан ряд примеров операторов A и их моделей, полученных этим способом. Для сжатий и диссипативных операторов показано, что при подходящем выборе J мы приходим к их модели С.-Надя-Фояша. Рассмотрены также генераторы полугрупп, связанных с динамикой роста популяций и с нейтральными линейными системами с запаздыванием (для последних модель была ранее построена С. Люнелом и автором в [56]). Вычисление обобщенных характеристических функций δ отложено до §10.

В §7 установлена связь рассматриваемой схемы с точной управляемостью линейных систем.

В §8 показано, что генератор любой c_0 -группы допускает линейно-подобную модель данного вида, в которой в качестве области Ω_{int} берется подходящая вертикальная полоса. (В отличие от символов C_{00} и C_0 мы используем символ c_0 в смысле теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов, см. [23].) Таким образом, в частности, эта схема охватывает произвольные ограниченные возмущения самосопряженных операторов.

Наша схема применима к неограниченным возмущениям самосопряженных операторов с дискретным спектром, при этом в качестве Ω_{int} берется подходящая область параболического типа. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Обобщенная характеристическая функция δ системы (A, J) часто может быть угадана как матричный „знаменатель“ выражения для $U_{A,J}$; в таких случаях легко получается включение $U_{A,J}H \subset \mathcal{H}(\delta)$. В §9 дана абстрактная схема, позволяющая установить равенство $U_{A,J}H = \mathcal{H}(\delta)$.

Важную роль играет двойственность моделей. Именно пусть $\bar{\Omega}_{\text{int}} = \{\bar{z} : z \in \Omega_{\text{int}}\}$ и $\delta^{\text{T}}(z) = \delta^*(\bar{z})$, $z \in \bar{\Omega}_{\text{int}}$. Пространства $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta^{\text{T}})$, построенные по областям Ω_{int} и $\bar{\Omega}_{\text{int}}$, оказываются двойственными друг другу относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\delta}$, определяемой в §4. Систему (A^*, J_*) назовем *двойственной системой* (A, J) относительно функции δ , если $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$, U_{A^*,J_*} — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta^{\text{T}})$, и выполнена формула двойственности

$$\langle U_{A,J}x, U_{A^*,J_*}y \rangle_{\delta} = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in H. \quad (0.1)$$

Если даны J и δ и $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$, то указанные условия определяют оператор $J_* : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow R_*$ однозначно.

Тройку операторов (A, J, J_*) назовем *3-системой*, если оператор A замкнут и плотно определен (откуда следует существование A^*) и (A, J) , (A^*, J_*) — 2-системы. Определим *передаточную функцию* Φ 3-системы (A, J, J_*) формулой

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\mu) = J[(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}]J_*^*. \quad (0.2)$$

Эта формула корректно задает функцию Φ с точностью до аддитивной постоянной (см. §9). Связь между обобщенной характеристической и передаточной функцией дана в теоремах 9.5 и 9.6. По системе (A, J) и предполагаемой обобщенной характеристической функции δ можно построить функцию Φ и двойственную систему (A^*, J_*) . В предположении, что эти объекты известны, эти теоремы дают критерии того, что δ в самом деле является обобщенной характеристической функцией, и тем самым позволяют полностью вычислить модель оператора A .

Функциональные модели недиссипативных операторов исследовались достаточно глубоко, в частности, в работах Набоко и его учеников [10, 17], Васюнина–Макарова [68] и Капустина [6]. Наш подход отличается от подхода этих статей; отличны и рассматриваемые классы операторов.

Важным отличием нашей схемы от теории С.-Надя–Фояша является неоднозначность в выборе обобщенной характеристической функции δ даже при фиксированной области Ω_{int} . При наших предположениях характеристическая функция в смысле С.-Надя–Фояша была бы $*$ -внутренней. Если система обладает обобщенной характеристической функцией, то она обладает и $*$ -внутренней характеристической функцией (в случае односвязности компонент множества Ω_{int}). Однако именно допущение невнутренних обобщенных характеристических функций δ позволяет во многих случаях их явно вычислять. Двойственность модельных пространств, которую мы вводим, приспособлена именно для такого вычисления.

Отметим, что линейно-подобные модели операторов часто определяются неоднозначным образом. Уже для конечномерных операторов нет никакого канонического однозначного выбора преобразования, приводящего их к форме Жордана. Неоднозначность рассматриваемых нами моделей обсуждается в §11.

Использование двойственности Коши между моделью оператора и его сопряженного весьма естественно при изучении оператора, не „привязанного“ к окружности или прямой, см. работы Ся [72], Кларка [33], а также предыдущие работы автора [73–77] и др. В иной форме двойственность и модельные пространства использовались также в работах Фурмана [39,40]. Несмотря на то что модельные функциональные пространства гильбертовы, мы часто реализуем сопряженные к ним пространства как другие пространства. За счет этого достигаются простота формул и симметрия в рассмотрении оператора и его сопряженного. Под сопряженным пространством в отличие от [75] мы понимаем пространство антилинейных непрерывных функционалов.

Если A — оператор, заданный некоторой формулой, и \mathcal{H} — функциональное пространство, то символом $A[\mathcal{H}]$ мы обозначаем оператор A , рассматриваемый на \mathcal{H} . В случаях, когда $A[\mathcal{H}]$ неограничен, область определения $\mathcal{D}(A[\mathcal{H}])$ — собственное подмножество пространства \mathcal{H} и будет указываться явно.

Автор выражает благодарность В. И. Васюнину, В. В. Капустину, К. ле Мерди, М. М. Маламуду и Н. К. Никольскому за обсуждение работы и критические замечания.

Добавление при корректуре.

Отметим, что совсем недавно была опубликована работа А. С. Тихонова [79], которая несомненно имеет отношение к теме настоящей работы.

В ней построена модель произвольного ядерного возмущения нормального оператора со спектром на гладкой замкнутой кривой, близкая к моделям С.-Надя-Фояша и С. Н. Набоко, и исследованы абсолютно непрерывные и сингулярные спектральные компоненты операторов этого класса.

§1. Построение резольвентной модели линейного оператора

1.1. Модельный оператор. Пусть Ω_0 — непустое открытое множество в \mathbb{C} , R — банахово пространство и \mathcal{H} — банахово пространство аналитических функций $f(z)$ на Ω_0 со значениями в R . Символом $\text{Hol}(\Omega_0, R)$ обозначим топологическое векторное пространство всех R -значных голоморфных функций на Ω_0 со стандартной топологией равномерной сходимости на компактах.

Определение. Функциональное банахово пространство \mathcal{H} будем называть *допустимым*, если

- (1) \mathcal{H} непрерывно вложено в $\text{Hol}(\Omega_0, R)$;
- (2) \mathcal{H} не содержит ненулевых констант;
- (3) $\lambda \in \Omega_0, f \in \mathcal{H} \implies \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda} \in \mathcal{H}$.

Будем предполагать \mathcal{H} допустимым. Определим (возможно, неограниченные) операторы M_z^T, j следующим образом. Положим

$$\mathcal{D}(M_z^T) = \mathcal{D}(M_z^T[\mathcal{H}]) = \{f \in \mathcal{H} : \exists c \in R : zf - c \in \mathcal{H}\}. \quad (1.1)$$

Для f из $\mathcal{D}(M_z^T)$ константа c единственна. Поэтому операторы

$$\begin{aligned} j: \mathcal{D}(j) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}(M_z^T) &\rightarrow R, & M_z^T: \mathcal{D}(M_z^T) &\rightarrow \mathcal{H}, \\ jf \stackrel{\text{def}}{=} c, & (M_z^T f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} zf(z) - c, & f \in \mathcal{D}(M_z^T) & \end{aligned} \quad (1.2)$$

корректно определены. Оператор M_z^T будем называть *модельным*.

Сопоставим допустимому пространству \mathcal{H} множество

$$\Omega(\mathcal{H}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \forall g \in \mathcal{H} \exists! c \in R : \frac{g(z) - c}{z - \lambda} \in \mathcal{H} \right\}. \quad (1.3)$$

Очевидно, $\Omega(\mathcal{H}) \supset \Omega_0$. Распространим функции из \mathcal{H} с Ω_0 на $\Omega(\mathcal{H})$ следующим образом: если $\lambda \in \Omega(\mathcal{H})$, то $g(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} c$, где c определяется из (1.3).

Предложение 1.1. 1) Оператор $(M_z^T - \lambda I)^{-1}$ существует и ограничен тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Omega(\mathcal{H})$. При этом

$$(M_z^T - \lambda I)^{-1} g(z) = \frac{g(z) - g(\lambda)}{z - \lambda}. \quad (1.4)$$

- 2) $\mathbb{C} \setminus \Omega(\mathcal{H}) = \sigma(M_z^T)$. В частности, множество $\Omega(\mathcal{H})$ открыто.
- 3) $g(\lambda) = j(\lambda I - M_z^T)^{-1}g$ при $g \in \mathcal{H}, \lambda \in \Omega(\mathcal{H})$.
- 4) Для каждого $g \in \mathcal{H}$ функция $g(\lambda)$ аналитична на $\Omega(\mathcal{H})$.

Доказательство. Легко видеть, что (1.4) выполнено при $\lambda \in \Omega_0$. Следовательно, оператор $(M_z^T - \lambda I)^{-1}$ ограничен при $\lambda \in \Omega_0$, откуда вытекает замкнутость оператора M_z^T .

Пусть $g \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение $(M_z^T - \lambda I)f = g$ равносильно равенствам $f(z) = (z - \lambda)^{-1}(g(z) - c)$, $c = -jf$. При этом третье равенство следует из второго и условия $f \in \mathcal{H}$. Отсюда вытекает утверждение 3). Применяя теорему о замкнутом графике, получаем 1), откуда сразу следует 2). При $\mu \in \Omega(\mathcal{H})$ и λ , близких к μ , из 3) получаем, что

$$g(\lambda) = j(\mu I - M_z^T)^{-1}(I - (\mu - \lambda)(\mu I - M_z^T)^{-1})^{-1}g.$$

Так как оператор $j(\mu I - M_z^T)^{-1}$ ограничен, функция g аналитична в точке μ . Это доказывает 4). •

Так как $(M_z^T - \lambda I)^{-1}$ — ограниченный оператор при некоторых λ , оператор M_z^T замкнут.

1.2. Моделирование 2-систем. Пусть H, R — банаховы пространства, (A, J) — 2-система, $\mathcal{D}(A) \subset H$, $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow H$, $J: \mathcal{D}(A) \rightarrow R$. Назовем систему (A, J) наблюдаемой, если из $U_{A,J}x \equiv 0$ вытекает, что $x = 0$.

Предложение 1.2. Пусть система (A, J) наблюдаема. Рассмотрим функциональное пространство $\mathcal{H} = U_{A,J}H$ функций на $\rho(A)$ с нормой, индуцированной из H . Тогда $U_{A,J}$ — линейный изоморфизм H на \mathcal{H} . При этом

1)

$$(U_{A,J}(A - \lambda I)^{-1}U_{A,J}^{-1}f)(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}, \quad f \in \mathcal{H}, \lambda \in \rho(A); \quad (1.5)$$

- 2) пространство \mathcal{H} допустимо;
- 3) $U_{A,J}\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(M_z^T[\mathcal{H}])$, и $U_{A,J}$ сплетает 2-систему (A, J) с 2-системой (M_z^T, j) :

$$U_{A,J}AU_{A,J}^{-1} = M_z^T[\mathcal{H}], \quad JU_{A,J}^{-1} = j; \quad (1.6)$$

- 4) $\Omega(\mathcal{H}) = \rho(A)$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из тождества Гильберта; из него прямо вытекает 2). Ввиду (1.4) и (1.5)

$$U_{A,J}(A - \lambda I)^{-1}U_{A,J}^{-1} = (M_z^T - \lambda I)^{-1}, \quad (1.7)$$

$$U_{A,J}\mathcal{D}(A) = U_{A,J}(A - \lambda I)^{-1}H = (M_z^T - \lambda I)^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{D}(M_z^T[\mathcal{H}]).$$

Из (1.7) и утверждений 1), 2) предложения 1.1 получаются утверждения 3), 4). •

Определение. Пусть A и A_1 — операторы в H и H_1 соответственно и (A, J) , (A_1, J_1) — две 2-системы с одним и тем же пространством R . Будем говорить, что изоморфизм $U: H \rightarrow H_1$ сплетает операторы A и A_1 и что операторы A и A_1 подобны, если $UD(A) = \mathcal{D}(A_1)$ и $UAU^{-1} = A_1$. Если, кроме того, $Jx = J_1Ux$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$, то будем говорить, что U сплетает 2-систему (A, J) с 2-системой (A_1, J_1) и что 2-системы (A, J) и (A_1, J_1) подобны.

Легко видеть, что 2-системы (A, J) и (A_1, J_1) подобны тогда и только тогда, когда $\rho(A) = \rho(A_1)$ и пространства $U_{A,J}H$ и $U_{A_1,J_1}H$ совпадают как множества. Отметим статью [1], где, в частности, обсуждается слабое подобие систем и его связь с передаточной функцией, а также статью [2], где обсуждается подобие всех минимальных пассивных реализаций заданной передаточной функции.

В дальнейшем мы будем использовать следующий очевидный факт (по существу уже проверенный выше). Пусть A и A_1 — замкнутые операторы и λ — фиксированная точка из $\rho(A)$. Оператор U сплетает A и A_1 тогда и только тогда, когда $\lambda \in \rho(A_1)$, и $U(A - \lambda I)^{-1}U^{-1} = (A_1 - \lambda I)^{-1}$.

§2. Пространства $\mathcal{H}(\delta)$

Пусть $\Omega_{\text{int}}, \Omega_{\text{ext}}$ — два непересекающихся непустых открытых множества в \mathbb{C} таких, что $\Gamma = \partial\Omega_{\text{int}} = \partial\Omega_{\text{ext}}$ — конечное объединение кусочно-гладких кривых и $\mathbb{C} = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}$. Мы предполагаем, что каждая из компонент связности кривой Γ гомеоморфна окружности или прямой и что в последнем случае оба конца этой компоненты уходят на бесконечность. Тогда $\Omega_{\text{int}}, \Omega_{\text{ext}}$ имеют конечное число компонент связности. Мы всегда будем предполагать, что

$$(|z| + 1)^{-1} \in L^2(\Gamma, |dz|). \quad (2.1)$$

Если область Ω_{int} связна, то класс Смирнова $E^2(\Omega_{\text{int}})$ состоит из аналитических в Ω_{int} функций f таких, что $\sup_n \int_{\partial\Omega_n} |f|^2 |dz| < \infty$ для некоторой

последовательности областей $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots$ со спрямляемой границей таких, что $\bigcup_n \Omega_n = \Omega_{\text{int}}$. Свойства классов Смирнова E^p и связанных с ними понятий изложены в [36, 16]. В общем случае мы определяем $E^2(\Omega_{\text{int}})$ как прямую сумму классов E^2 в компонентах связности Ω_{int} . Функции из $E^2(\Omega_{\text{int}})$ имеют некасательные граничные значения почти всюду на Γ . Пространство $E^2(\Omega_{\text{int}})$ — гильбертово с нормой

$$\|f\|_{E^2(\Omega_{\text{int}})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f(z)|^2 |dz|.$$

В ряде случаев будем предполагать для простоты, что все компоненты множества Ω_{int} односвязны, хотя обычно от этого условия можно избавиться.

Скалярные или операторнозначные функции в Ω_{int} будем называть внешними или внутренними, если они обладают соответствующими свойствами в каждой компоненте множества Ω_{int} .

Пусть R — вспомогательное гильбертово пространство. Нам потребуются гильбертовы пространства $L^2(\Gamma, R) = L^2(\Gamma, |dz|) \otimes R$, $E^2(\Omega_{\text{int}}, R) = E^2(\Omega_{\text{int}}) \otimes R$, $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R) = E^2(\Omega_{\text{ext}}) \otimes R$. Элементы двух последних пространств — аналитические в Ω_{int} (Ω_{ext}) R -значные функции, имеющие некасательные граничные значения п.в. [20]. Норма в $L^2(\Gamma, R)$, $E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ задается формулой

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \|f(z)\|^2 |dz|.$$

Функции из $E^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ отождествляются с их граничными значениями на Γ . Тем самым эти два пространства рассматриваются как замкнутые подпространства $L^2(\Gamma, R)$.

Пусть Ω — одна из областей Ω_{int} , Ω_{ext} . Положим $\widehat{E}^2(\Omega, R) = E^2(\Omega, R)$, если $\mathbb{C} \setminus \Omega$ — неограниченное множество, и

$$\widehat{E}^2(\Omega, R) = \{v \in E^2(\Omega, R) : v(\infty) = 0\},$$

если $\mathbb{C} \setminus \Omega$ — ограниченное множество. Ориентируем кривые, входящие в Γ , так, чтобы при движении вдоль них область Ω_{int} оставалась слева. Граничные значения на Γ функций f на Ω_{int} (Ω_{ext}) будут обозначаться f_i (f_e). Если Ω_{int} — круг или полуплоскость, то классы $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ совпадают с классическими скалярным или векторным классом Харди H^2 в области Ω_{int} [36].

Имеет место следующее легко проверяемое утверждение.

Предложение 2.1. *Пространство $L^2(\Gamma, R)$ раскладывается в прямую сумму:*

$$L^2(\Gamma, R) = \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \dot{+} \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R). \quad (2.2)$$

Параллельные проекторы на прямые слагаемые задаются соответственно интегралами Коши

$$P_{\text{int}} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \zeta}, \quad \zeta \in \Omega_{\text{int}},$$

$$P_{\text{ext}} f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \zeta}, \quad \zeta \in \Omega_{\text{ext}}$$

(так что $P_{\text{int}}^2 = P_{\text{int}}$, $P_{\text{ext}}^2 = P_{\text{ext}}$, $P_{\text{int}} + P_{\text{ext}} = I$).

Заметим, что условие (2.1) обеспечивает сходимость этих интегралов.

Рассмотрим также области $\overline{\Omega}_{\text{int}} = \{\bar{z} : z \in \Omega_{\text{int}}\}$, $\overline{\Omega}_{\text{ext}} = \{\bar{z} : z \in \Omega_{\text{ext}}\}$ и положим $\overline{\Gamma} = \partial\overline{\Omega}_{\text{int}} = \partial\overline{\Omega}_{\text{ext}}$. Мы вводим двойственность Коши между гильбертовыми пространствами $L^2(\Gamma, R)$ и $L^2(\overline{\Gamma}, R)$ по правилу

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle f(z), g(\bar{z}) \rangle dz, \quad f \in L^2(\Gamma, R), g \in L^2(\overline{\Gamma}, R). \quad (2.3)$$

Предложение 2.2. *Разложение*

$$L^2(\overline{\Gamma}, R) = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R) \dot{+} \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$$

двойственно разложению (2.2) относительно скобки (2.3). Другими словами, для аннигиляторов пространств из (2.2) имеют место соотношения

$$\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)^\perp = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R), \quad \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)^\perp = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R). \quad (2.4)$$

Согласно этому утверждению, можно отождествить

$$\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)^* = L^2(\overline{\Gamma}, R) / \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)^\perp = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R), \quad (2.5)$$

$$\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)^* = \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R), \quad (2.6)$$

т. е. пары $(\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R))$ и $(\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R), \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R))$ являются парами двойственных гильбертовых пространств относительно двойственности (2.3).

Мы определяем оператор $M_z = M_{z,\text{int}}$ умножения на независимую переменную на $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ формулами

$$\begin{aligned} (M_z f)(z) &= z f(z), \quad f \in \mathcal{D}(M_z) \subset \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \\ \mathcal{D}(M_z) &\stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) : z f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)\}. \end{aligned}$$

Аналогично определяется оператор $M_{z,\overline{\text{int}}}$ на $\widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$. Эти операторы ограничены тогда и только тогда, когда ограничена область Ω_{int} .

Пространства $E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$, $E^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R)$, очевидно, допустимы, соответствующие им операторы M_z^{T} будем обозначать $M_{z,\text{out}}^{\text{T}}$, $M_{z,\overline{\text{ext}}}^{\text{T}}$. Операторы $M_{z,\text{int}}$, $M_{z,\overline{\text{int}}}$, $M_{z,\text{out}}^{\text{T}}$, $M_{z,\overline{\text{ext}}}^{\text{T}}$ имеют плотную область определения и замкнуты.

Из легко проверяемых формул

$$((M_{z,\overline{\text{int}}} - \lambda I)^{-1})^* = M_{(z-\lambda)^{-1},\overline{\text{int}}}^* = (M_{z,\text{out}}^{\text{T}} - \lambda I)^{-1} \quad (2.7)$$

(см. (1.4)) следует, что

$$M_{z,\overline{\text{int}}}^* = M_{z,\text{out}}^{\text{T}}.$$

Замечание. Предположим, что геометрия области Ω_{ext} такова, что

$$\|(z - \lambda)^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \rightarrow 0, \quad \text{при } \lambda \in \Omega_{\text{ext}}, \text{ dist}(\lambda, \Gamma) \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Из формулы Коши следует, что $|f(\lambda)| \leq \|f\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)} \|(z - \lambda)^{-1}\|_{L^2(\Gamma)}$ для любой $f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$. Следовательно,

$$\lim_{\substack{z \in \Omega_{\text{ext}} \\ \text{dist}(z, \Gamma) \rightarrow \infty}} |f(z)| = 0, \quad f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R).$$

Из равенства (1.1), примененного к $\mathcal{H} = \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$, вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(M_{z,\text{out}}^{\text{T}}) &= \{f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R) : \\ &\exists \lim_{\substack{z \in \Omega_{\text{ext}} \\ \text{dist}(z, \Gamma) \rightarrow \infty}} z f =: j f \text{ и } M_{z,\text{out}}^{\text{T}} f = z f - j f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)\}. \end{aligned}$$

Отметим, что условие (2.8) вытекает, к примеру, из условия Карлесона

$$\text{length}(\Gamma \cap B(\lambda, r)) \leq Cr,$$

где C — абсолютная постоянная. Поэтому (2.8), как правило, выполнено в приложениях.

Определения. Пусть δ — функция класса $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_1, R_2))$.

1) Будем называть δ *допустимой*, если существует константа $\epsilon > 0$ такая, что $\|\delta(\lambda)r\| \geq \epsilon\|r\|$ для всех $r \in R_1$ и п.в. $\lambda \in \Gamma$.

2) Введем функцию $\delta^{\mathbf{T}} \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_2, R_1))$,

$$\delta^{\mathbf{T}}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^*(\bar{z}), \quad z \in \overline{\Omega}_{\text{int}}.$$

Будем δ называть **-допустимой*, если функция $\delta^{\mathbf{T}} \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_2, R_1))$ допустима, что равносильно тому, что для некоторого $\epsilon > 0$ $\delta(\lambda)\delta^*(\lambda) \geq \epsilon I$ при п.в. $\lambda \in \Gamma$.

3) Будем называть δ *двусторонне допустимой*, если она допустима и *-допустима, что означает, что δ^{-1} существует п.в. на Γ , причем $\|\delta^{-1}\| \leq C$ п.в. на Γ .

4) Будем говорить, что δ *сжимающая*, если $\|\delta(z)\| \leq 1$ для всех $z \in \Omega_{\text{int}}$.

Отметим, что функции из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_1, R_2))$ имеют некасательные пределы п.в. на Γ в смысле сильной сходимости операторов [20, §V.2].

Будем говорить, что имеет место односвязный случай, если все компоненты связности множества Ω_{int} односвязны, и многосвязный случай, если некоторые из этих компонент многосвязны. Нам потребуется следующий результат, который вытекает из теоремы Бёрлинга–Лакса–Халмоша для односвязного случая и из теоремы Войчика–Хасуми [69, 41] для многосвязного случая.

Теорема А. *Подпространство G пространства $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ — инвариантное подпространство операторов $M_{(z-\lambda)^{-1}}$, $\lambda \in \Omega_{\text{ext}}$ тогда и только тогда, когда существуют гильбертово пространство R_* и допустимая функция $\varphi \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ такие, что*

$$G = \varphi \cdot \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*). \quad (2.9)$$

В представлении (2.9) в односвязном случае достаточно ограничиться внутренними функциями φ (см. определение в §5). Однако (2.9) определяет

замкнутое инвариантное подпространство для любой φ , удовлетворяющей условиям теоремы.

Пусть δ — $*$ -допустимая функция класса $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$. Положим

$$\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta, \Omega_{\text{int}}) = \{f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R) : \delta \cdot f|_{\Gamma} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)\}.$$

Пространство $\mathcal{H}(\delta)$ — замкнутое подпространство $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$. Оно допустимо как пространство функций на Ω_{ext} . Согласно §1, определен оператор M_z^T на $\mathcal{H}(\delta)$. Он будет играть роль основного модельного оператора. Он аналогичен модельному оператору С.-Надя-Фояша (см. §3 и 5). В случае неограниченной области Ω_{int} оператор M_z^T может быть неограничен.

Определение [13]. Множество тех λ из $\text{clos } \Omega_{\text{int}}$, для которых $\delta^{-1} \notin H^\infty(\Omega_{\text{int}} \cap \mathcal{W}, \mathcal{L}(R_*, R))$ для любой окрестности \mathcal{W} точки λ , называется *спектром функции δ* . Обозначим его символом $\text{spec } \delta$.

Спектр δ содержится в $\text{clos } \Omega_{\text{int}}$ и замкнут. Он может заполнять все множество $\text{clos } \Omega_{\text{int}}$. Его пересечение с Ω_{int} совпадает с множеством тех $\lambda \in \Omega_{\text{int}}$, для которых оператор $\delta(\lambda)$ необратим.

П. 2) следующего утверждения полностью аналогичен теореме [20, VI.4.1] и в односвязном случае может быть из нее выведен.

Предложение 2.3. 1) $\Omega(\mathcal{H}(\delta)) = \mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$;

2) $\sigma(M_z^T[\mathcal{H}(\delta)]) = \text{spec } \delta$;

3) $\sigma_p(M_z^T[\mathcal{H}(\delta)]) = \{\lambda \in \Omega_{\text{int}} : \text{Ker } \delta(\lambda) \neq 0\}$. Здесь $\sigma_p(A)$ — *точечный спектр оператора A* .

Для удобства изложения мы откладываем доказательство этого предложения до §4. Здесь мы ограничимся доказательством следующего утверждения.

Лемма 2.4. $\Omega(\mathcal{H}(\delta)) \supset \mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$.

Доказательство. Пусть $g_{\text{ext}} \in \mathcal{H}(\delta)$; тогда $\delta \cdot g_{\text{ext}}|_{\Gamma} = g_{\text{int}}$ для некоторой функции $g_{\text{int}} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)$. отождествим элемент g_{ext} с функцией

$$g(z) = \begin{cases} g_{\text{ext}}(z), & z \in \Omega_{\text{ext}}, \\ \delta^{-1}(z)g_{\text{int}}(z), & z \in \Omega_{\text{int}} \setminus \text{spec } \delta. \end{cases} \quad (2.10)$$

При таком соглашении функции из $\mathcal{H}(\delta)$ аналитичны на Ω_{ext} и на $\Omega_{\text{int}} \setminus \text{spec } \delta$ и удовлетворяют условию $g_i = g_e$ на $\Gamma \setminus \text{spec } \delta$. Если $\lambda \in \Gamma \setminus \text{spec } \delta$ и \mathcal{W} — малый круг с центром в λ , то сужение g на $\mathcal{W} \setminus \Gamma$ лежит в $E^2(\Omega_{\text{ext}} \cap \mathcal{W}, R)$ и в $E^2(\Omega_{\text{int}} \cap \mathcal{W}, R)$, причем значения этих сужений Γ совпадают п.в.

Из интегральной формулы Коши легко вывести, что $g|_{\mathcal{W} \setminus \Gamma}$ — сужение аналитической функции, заданной на \mathcal{W} , что позволяет определить $g(\lambda)$ и при $\lambda \in \Gamma \setminus \text{spec } \delta$. Мы „продолжили“ функцию g_{ext} до аналитической функции g на $\mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$.

При таком доопределении очевидно, что $\frac{g(z)-g(\lambda)}{z-\lambda} \in \mathcal{H}(\delta)$, если $g \in \mathcal{H}(\delta)$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$. Отсюда вытекает наше утверждение. •

В дальнейшем всегда, когда это удобно, будем использовать продолжение (2.10) и считать функции из $\mathcal{H}(\delta)$ аналитическими на $\mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$. Будем называть это продолжение *псевдопродолжением* (обычно этот термин используется в более узком смысле). Если множество $\mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$ связно, то речь идет об обычном аналитическом продолжении.

Предложение 2.5. $\mathcal{H}(\delta) = (\delta^T \widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*))^\perp$ относительно двойственности (2.3).

Доказательство. Утверждение прямо следует из (2.3) и (2.4). •

§3. Теорема о модели

Определения. 1. Пусть (A, J) — 2-система, причем пространства H, R гильбертовы. Предположим, что $\sigma(A) \subset \text{clos } \Omega_{\text{int}}$. Оператор J будем называть *допустимым* для A , если

$$\|U_{A,J} x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)} \leq C \|x\|, \quad x \in H.$$

2. Оператор J будем называть *точным* относительно A , если имеет место двусторонняя оценка $\|U_{A,J} x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)} \asymp C \|x\|, \quad x \in H$.

Отметим, что если A — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}$ и $\Omega_{\text{int}} = \{z: \text{Re } z < 0\}$, то в силу равенства Парсеваля

$$\|U_{A,J} x_0\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)}^2 = \int_0^\infty \|JT(t)x_0\|^2 dt$$

для всех $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. Таким образом, $\|y\|_{L^2((0, \infty), R)} = \|U_{A,J} x_0\|$, где y — выход системы $\dot{x}(t) = Ax(t), y(t) = Jx(t) \quad (t \geq 0), x(0) = x_0$.

Аналогично, равенство

$$\|U_{A,J} x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, R)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|JA^n x\|^2$$

в случае $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ связывает введенные понятия с теорией дискретных систем. Допустимость и точность для случая единичного круга или полуплоскости введены и исследованы в работах [70, 71, 42, 43, 67, 51] и др. с точки зрения теории систем, в частности в связи с так называемой гипотезой Вейса.

Очевидно, из точности J следует как допустимость, так и наблюдаемость.

Теорема 3.1. Пусть $\Omega_{\text{int}}, \Omega_{\text{ext}}, \Gamma$ удовлетворяют условиям §2.

1) Пусть (A, J) — 2-система, $\sigma(A) \subset \text{clos } \Omega_{\text{int}}$. Если оператор J точен относительно A , то найдутся гильбертово пространство R_* и $*$ -допустимая функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ такие, что

$$U_{A,J}: H \rightarrow \mathcal{H}(\delta)$$

— линейный изоморфизм, причем $U_{A,J} \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(M_z^T \upharpoonright \mathcal{H}(\delta))$,

$$U_{A,J} A U_{A,J}^{-1} f = M_z^T f, \quad f \in \mathcal{D}(M_z^T \upharpoonright \mathcal{H}(\delta)).$$

2) Обратно, пусть $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow H$, где $\mathcal{D}(A) \subset H$ — линейный, возможно, неограниченный оператор в H , $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — $*$ -допустимая функция и $W: H \rightarrow \mathcal{H}(\delta)$ — линейный изоморфизм, сплетающий A с M_z^T на $\mathcal{H}(\delta)$. Тогда найдется оператор $J: \mathcal{D}(A) \rightarrow R$, точный относительно A и такой, что $W = U_{A,J}$.

Таким образом, в условиях п. 1) теоремы оператор M_z^T на $\mathcal{H}(\delta)$ служит моделью оператора A , а 2-система (A, J) подобна 2-системе (M_z^T, j) на $\mathcal{H}(\delta)$.

Доказательство теоремы 3.1. Будем использовать предложение 2.3. 1) Так как система (A, J) точна, образ $U_{A,J} H$ — замкнутое подпространство пространства $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$. Фиксируем $\lambda \in \Omega_{\text{ext}}$. Согласно предложению 1.2, $U_{A,J} H$ инвариантно относительно оператора $(M_z^T - \lambda I)^{-1} f(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}$. Будем считать $\widehat{E}^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$ двойственным к $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ (см. (2.3), (2.6)). Из (2.7) следует, что аннигилятор $(U_{A,J} H)^\perp$, являющийся подпространством $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, инвариантен относительно $M_{(z-\lambda)^{-1}}$, $\lambda \in \Omega_{\text{ext}}$. Значит, найдутся гильбертово пространство R_* и функция $\varphi \in H^\infty(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$, удовлетворяющие условиям теоремы А и такие, что

$$(U_{A,J} H)^\perp = \varphi \cdot \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*).$$

Поэтому $U_{A,J} H = (\varphi \cdot \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)^\perp) = \mathcal{H}(\delta)$, где мы ввели обозначение $\delta = \varphi^T \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$.

Покажем, что значения функций $U_{A,J}x$, $x \in H$ на $\Omega_{\text{int}} \setminus \sigma(A)$ совпадают с псевдоаналитическим продолжением их значений на Ω_{ext} (см. §2). Согласно предложению 1.2, $U_{A,J}$ сплетает A с оператором M_z^T . В частности, $\sigma(A) = \text{spec } \delta$. Пусть $x \in H$ и $g = U_{A,J}x$. Ввиду (1.5), (1.6)

$$g(\lambda) = j(\lambda - M_z^T)^{-1}g = JU_{A,J}^{-1}U_{A,J}(\lambda - A)^{-1}U_{A,J}^{-1}g = J(\lambda - A)^{-1}x = (U_{A,J}x)(\lambda)$$

при $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, функция $U_{A,J}x$ совпадает с g и на $\Omega_{\text{int}} \setminus \sigma(A)$.

2) Достаточно положить $J = jW$ и воспользоваться предложением 2.3 и утверждением 3) предложения 1.2. •

Для случая сжатия или диссипативного оператора при специальном выборе оператора J модель теоремы 3.1 становится оригинальной моделью С.-Надя-Фояша (см. §5 и 6 ниже). Различные изложения этой модели содержатся в работах [20, 14, 32, 18, 60, 19, 30] и др. Отметим также связь теоремы 3.1 с работами А. В. Штрауса (см. [22]) и с работой З. Аровой [27].

Определения. 1) Пусть оператор A подобен оператору M_z^T в пространстве $\mathcal{H}(\delta)$, построенному по области Ω_{int} . Тогда будем называть функцию δ *обобщенной характеристической функцией оператора A в области Ω_{int}* .

2) Пусть (A, J) — 2-система и $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$. Тогда будем называть функцию δ *обобщенной характеристической функцией системы (A, J) в области Ω_{int}* .

В условиях определения 2) будем называть пару (A, J) C_0 -системой в области Ω_{int} , а оператор A — C_0 -оператором. Если же δ — двусторонне допустимая функция, то будем называть (A, J) C_{00} -системой.

Наша модель позволяет определить $H^\infty(\Omega_{\text{int}})$ -исчисление для любого C_0 -оператора в Ω_{int} . Легко видеть, что это исчисление непрерывно в смысле слабой топологии в $H^\infty(\Omega_{\text{int}})$ и слабой операторной топологии в $\mathcal{L}(H)$. Поэтому оно не зависит от конкретного выбора модели. Отметим работы Макинтоша [57] и др., где исследуется связь между существованием H^∞ -исчисления и специальными квадратичными оценками для генераторов аналитических полугрупп.

Замечания. 1) Если (A, J) — C_{00} -система, то в некоторых случаях область Ω_{int} можно менять, не меняя обобщенную характеристическую функцию δ (см. ниже примеры в §6, 8). Это свойство оказывается важным.

2) Рассмотрим условия: (а) R конечномерно и $\sigma(A) \neq \text{clos } \Omega_{\text{int}}$; (б) $\sigma(A) \cap \Gamma$ имеет нулевую длину; (с) δ обладает скалярным кратным, т.е. существуют функция $\delta_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ и скалярная функция $\psi \in H^\infty(\Omega_{\text{int}})$, $\psi \neq 0$

такие, что $\delta\delta_1 \equiv \psi I$, $\delta_1\delta \equiv \psi I$. В каждом из этих случаев обобщенная характеристическая функция δ автоматически оказывается двусторонне допустимой.

3) Отметим, что в нашей конструкции можно заменить пространства $L^2(\Gamma, R)$ аналогичными взвешенными пространствами такими, что выполнены утверждения предложений 2.1 и 2.2. Теорема 3.1 для случая полуплоскости связана с работами Г.М. Губреева, посвященными квазиэкспонентам [5].

Неоднозначность выбора обобщенной характеристической функции обсуждается в §11. Задача вычисления обобщенной характеристической функции будет рассмотрена в §9. Подчеркнем, что по теореме 3.1 включение оператора в любую точную систему (A, J) дает модель оператора A . Отметим в связи с этим следующие очевидные свойства.

(1) Пусть оператор J допустим для A и $K: R \rightarrow L$ ограничен. Тогда KJ допустим для A .

(2) Если $J_k: \mathcal{D}(A) \rightarrow R_k$, $k = 1, 2$, и J_1, J_2 допустимы для A , то $J_1 \oplus J_2$ тоже допустим для A . Если J_2 допустим и J_1 точен (относительно A), то $J_1 \oplus J_2$ точен относительно A .

§4. Доказательство предложения 2.3.

Двойственность модельных пространств

Пусть $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — $*$ -допустимая функция. Рассмотрим фактор-оператор $M_{z, \delta\tau}$ оператора M_z , действующий в фактор-пространстве $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)/\delta^T E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*)$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(M_{z, \delta\tau}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \widehat{f} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)/\delta^T \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) : \exists f \in \widehat{f} : zf \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \}, \\ M_{z, \delta\tau} \widehat{f} &= \widehat{zf}, \quad \widehat{f} \in \mathcal{D}(M_{z, \delta\tau}); \end{aligned} \tag{4.1}$$

здесь $\widehat{f} = f + \delta^T E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*)$ — смежный класс функции f . Легко видеть, что $(M_{z, \delta\tau} - \lambda)^{-1} \widehat{f} = ((z - \lambda)^{-1} f)^\wedge$, например, для всех $\lambda \in \overline{\Omega}_{\text{ext}}$.

Из предложения 2.5 следует, что двойственность Коши (2.3) задает двойственность между $\mathcal{H}(\delta)$ и фактор-пространством $E^2(\Omega_{\text{int}}, R)/\delta^T E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*)$. Из (2.7) следует, что относительно этой двойственности

$$(M_z \upharpoonright \mathcal{H}(\delta))^* = M_{z, \delta\tau}. \tag{4.2}$$

Мы получаем, что в случае, когда Ω_{int} имеет несколько компонент связности $\Omega_{\text{int}}^1, \dots, \Omega_{\text{int}}^s$, основной модельный оператор M_z^T на пространстве $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta, \Omega_{\text{int}})$ подобен прямой сумме операторов M_z^T на пространствах $\mathcal{H}(\delta, \Omega_{\text{int}}^j)$.

Из (4.2) следует, что любой C_0 -оператор A в Ω_{int} удовлетворяет неравенству фон Неймана

$$\|r(A)\| \leq C \sup_{\Omega_{\text{int}}} |r|$$

для любой рациональной функции r с полюсами вне $\text{clos } \Omega_{\text{int}}$. Как известно, вопрос о том, следует ли из неравенства фон Неймана для случая $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{D}$ подобие сжатия, был недавно решен отрицательно в работе Пизье [64]. В недавней работе [45] получен отрицательный ответ на один вопрос В. Пеллера об операторах с ограниченными степенями. Положительные результаты о подобии сжатия имеются в книге [20], работах Паулсена о вполне сжимающих операторах [62] и др. Отметим также работы [18, 4, 6, 8, 9, 11, 12], где получены разнообразные критерии подобия унитарным и самосопряженным операторам.

Доказательство предложения 2.3. Для проверки 2) достаточно показать, что $\text{spec } \delta^{\text{T}} \subset \sigma(M_{z, \delta^{\text{T}}})$. Непосредственно проверяется, что $\text{spec } \delta^{\text{T}} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}} \subset \sigma(M_{z, \delta^{\text{T}}}) \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$. Докажем, что $\text{spec } \delta^{\text{T}} \cap \overline{\Gamma} \subset \sigma(M_{z, \delta^{\text{T}}}) \cap \overline{\Gamma}$. Пусть $\lambda_0 \in \overline{\Gamma}$ и $\lambda_0 \notin \sigma(M_{z, \delta^{\text{T}}})$. Пусть \mathcal{W} — окрестность точки λ_0 такая, что $\text{clos } \mathcal{W} \cap \sigma(M_{z, \delta^{\text{T}}}) = \emptyset$. Выберем произвольную функцию $y \in E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$. Тогда уравнение

$$(z - \lambda)x_\lambda = y + \delta^{\text{T}} s_\lambda \quad (4.3)$$

имеет аналитическое семейство решений $\{x_\lambda\} \subset E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R)$, $\{s_\lambda\} \subset E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}}, R_*)$, определенных при $\lambda \in \mathcal{W}$. Легко видеть, что $\|s_\lambda\| \leq C\|y\|$. Обозначим символом α_λ норму функционала $\varphi \rightarrow \varphi(\lambda)$, $\varphi \in E^2(\overline{\Omega}_{\text{int}})$. Подставляя $z = \lambda$ в (4.3), получаем, что $s_\lambda(\lambda) = -\delta^{\text{T}-1}(\lambda)y(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$ (отметим, что функция δ^{T} обратима в $\mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$). Положим теперь в (4.3) $y = y_{r, \mu}$, где $y_{r, \mu}$ удовлетворяет соотношениям $y_{r, \mu}(\lambda) = r$, $\|r\| = \alpha_\mu\|y_{r, \mu}\|$, и пусть $\{x_{r, \mu, \lambda}\}$, $\{s_{r, \mu, \lambda}\}$ — соответствующие семейства решений (4.3). Полагая $\lambda = \mu$, получаем, что

$$\|\delta^{\text{T}-1}(\lambda)r\| = \|s_{r, \lambda, \lambda}(\lambda)\| \leq \alpha_\lambda\|s_{r, \lambda, \lambda}\| \leq C\alpha_\lambda\|y_{r, \lambda}\| = C\|r\|, \quad \lambda \in \mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}},$$

что означает, что $\|\delta^{\text{T}-1}(\lambda)\| \leq C$ при $\lambda \in \mathcal{W} \cap \overline{\Omega}_{\text{int}}$. В частности, $\lambda_0 \notin \text{spec } \delta^{\text{T}}$. Таким образом, проверено утверждение 2). Утверждение 1) — его следствие. Утверждение 3) вытекает из того, что собственные векторы оператора $M_z^{\text{T}}[\mathcal{H}(\delta)]$ — это в точности векторы вида $(z - \lambda)^{-1}c$, где $\lambda \in \Omega_{\text{int}}$, $\delta(\lambda)c = 0$. •

Рассмотрим случай двусторонне допустимой функции δ . Определим линейный оператор

$$V: \mathcal{H}(\delta) \rightarrow \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) / \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R),$$

действующий по правилу

$$Vg = \delta g|_{\Gamma} + \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \quad g \in \mathcal{H}(\delta).$$

Предложение 4.1. Пусть функция δ двусторонне допустима. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) отображение V есть изоморфизм;
- 2) V сплетает оператор $M_z^T[\mathcal{H}(\delta)]$ с оператором $M_{z,\delta}$.

Доказательство. Пусть $y \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$. Уравнение $Vx = y + \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ относительно $x \in \mathcal{H}(\delta)$ имеет единственное решение $x = P_{\text{ext}}(\delta^{-1}y|_{\Gamma})$, откуда прямо следует 1).

Согласно предложению 2.3, $\mathcal{H}(\delta)$ — допустимое пространство как пространство функций на $\mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$. Следовательно, $(M_z^T - \lambda)^{-1}g$ вычисляется по формуле (1.4). Отсюда сразу вытекает утверждение 2). •

Предложение 4.2. Пусть функция δ двусторонне допустима. Тогда пространства $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta^T)$ двойственны друг другу относительно двойственности

$$\langle f, g \rangle_{\delta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle \delta(z) f_e(z), g_e(\bar{z}) \rangle dz, \quad f \in \mathcal{H}(\delta), g \in \mathcal{H}(\delta^T).$$

Доказательство. Ввиду (2.6) имеет место отождествление

$$(\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) / \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R))^* = (\delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R))^{\perp} = \mathcal{H}(\delta^T)$$

относительно двойственности Коши. Если $f \in \mathcal{H}(\delta)$ и $g \in \mathcal{H}(\delta^T)$, то

$$\langle f, g \rangle_{\delta} = \langle Vf, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle \tilde{f}(z), g(\bar{z}) \rangle dz,$$

где \tilde{f} — любой представитель смежного класса Vf . Утверждение следует из предложения 2.5, 2). •

Если δ — двусторонне допустимая функция, то $\dim R = \dim R_*$, и во многих случаях удобно считать, что $R = R_*$.

Вообще говоря, невозможно найти двусторонне внутреннюю функцию δ_1 такую, что $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$ и $\mathcal{H}(\delta^T) = \mathcal{H}(\delta_1^T)$. Таким образом, рассмотрение двойственных модельных пространств $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta^T)$ нельзя свести к случаю двусторонне внутренних функций.

Отметим, что отображение $f + \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \mapsto P_K f$ — изоморфизм фактор-пространства $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) / \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ на стандартное модельное пространство $K = \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \ominus \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ (здесь P_K — ортогональная проекция на K). Этот изоморфизм превращает фактор-оператор $M_{z, \delta}$ в оператор усеченного сдвига $\varphi \mapsto P_K(z\varphi)$ в пространстве K (для неограниченной области Ω_{int} проще говорить о резольвентах этих операторов). Это дает простую связь между нашей моделью в случае двусторонне допустимой δ и оператором усеченного сдвига. В случае круга или полуплоскости оператор усеченного сдвига — частный случай модельного оператора С.-Надя-Фояша. Исследованию операторов усеченного сдвига посвящено большое количество работ. Укажем, в частности, работы [14, 18, 30, 31, 47, 48, 60] и др. Книга Н. К. Никольского [13] специально посвящена изучению спектральных свойств этих операторов и приложениям. Операторы усеченного сдвига для многосвязных областей и других подобных ситуаций также активно изучались. Укажем, в частности, [15, 29, 58], а также теорию операторных сосудов (см. [25] и книгу [55]).

§5. Связь с моделью Секефальви-Надя-Фояша

Здесь мы обсуждаем общий случай $*$ -допустимой функции δ .

Определения [20, §V.2]. Пусть все компоненты области Ω_{int} односвязны. Функция δ называется

- 1) внутренней, если операторы $\delta(\lambda)$ изометричны при п.в. $\lambda \in \Gamma$;
- 2) $*$ -внутренней, если операторы $\delta^*(\lambda)$ изометричны при п.в. $\lambda \in \Gamma$;
- 3) двусторонне внутренней, если $\delta(\lambda)$ — унитарный оператор при п.в. $\lambda \in \Gamma$.

Очевидно, любая внутренняя функция допустима, любая $*$ -внутренняя функция $*$ -допустима и любая двусторонне внутренняя функция двусторонне допустима. Кроме того, функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ $*$ -допустима тогда и только тогда, когда она обладает факторизацией вида

$$\delta(z) = \delta^{(e)}(z)\delta^{(i)}(z), \quad z \in \Omega_{\text{int}},$$

где $\delta^{(i)} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — $*$ -внутренняя и $\delta^{(e)}, \delta^{(e)-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*))$ (это следует из результатов [20, §V.4]; данная факторизация — частный случай $*$ -канонической. Она единственна с точностью до замены $\delta^{(e)} \mapsto \delta^{(e)}u^{-1}$, $\delta^{(i)} \mapsto u\delta^{(i)}$, где u — унитарная константа). Аналогичные факты имеют место для факторизаций внутренних и двусторонне внутренних функций.

Напомним также, что сжимающая функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ называется *чистой*, если $\|\delta(0)r\| < \|r\|$ для всех $r \in R$, $r \neq 0$. Любая сжимающая функция $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ единственным образом раскладывается в прямую сумму $\delta = \delta^{(0)} \oplus w$ (относительно некоторых ортогональных разложений пространств R и R_*), где $\delta^{(0)}$ — чистая сжимающая функция и w — унитарная константа; при этом функция $\delta^{(0)}$ называется *чистой частью* функции δ ; см. [20, §V.2].

Предложение 5.1. 1) Пусть $\delta_j \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_j))$ — $*$ -допустимые функции, $j = 1, 2$. Тогда $\mathcal{H}(\delta_1) = \mathcal{H}(\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $\delta_2 = \psi \cdot \delta_1$, где функция ψ лежит в $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_1, R_2))$, причем $\|\psi^{-1}(z)\| \leq C$, $z \in \Omega_{\text{int}}$.

2) Пусть, кроме того, все компоненты связности области Ω_{int} односвязны. Пусть $\delta_1 = \delta_1^{(e)}\delta_1^{(i)}$, $\delta_2 = \delta_2^{(e)}\delta_2^{(i)}$ — $*$ -канонические факторизации функций δ_1, δ_2 . Тогда $\mathcal{H}(\delta_1) = \mathcal{H}(\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $\delta_2^{(i)}(z) \equiv u\delta_1^{(i)}(z)$, $z \in \Omega_{\text{int}}$, где u — унитарная константа.

Доказательство. Утверждение 1) легко вытекает из предложения 2.5, а утверждение 2) из утверждения 1) и единственности $*$ -канонической факторизации. •

Предположим, что компоненты связности области Ω_{int} односвязны и являются областями Смирнова [36, 16]. Пусть $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — произвольная $*$ -допустимая функция. Покажем, как можно определить аналог оператора V .

Будем считать (не умаляя общности), что δ — $*$ -внутренняя функция. Положим $\Delta = (I - \delta^*\delta)^{1/2} = I - \delta^*\delta$, тогда Δ — проекторнозначная функция на Γ класса $L^\infty(\Gamma, \mathcal{L}(R))$.

Пусть

$$\mathcal{H}_{SNF}(\delta, \Omega_{\text{int}}) = \mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}}) = \left(\begin{array}{c} \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \\ \Delta L^2(\Gamma, R) \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} \delta \\ \Delta \end{array} \right) \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$$

— модельное пространство С.-Надя-Фояша. Символом $\left(\begin{array}{c} f \\ g \end{array} \right)^\wedge$ будем обозначать смежный класс функции $\left(\begin{array}{c} f \\ g \end{array} \right) \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \oplus \Delta L^2(\Gamma, R)$. Класс Смирнова $\mathcal{N}(\Omega_{\text{int}})$ определяется как множество аналитических в Ω_{int} функций вида f/g , где $f, g \in H^\infty(\Omega_{\text{int}})$ и g — внешняя.

Если $\psi \in \mathcal{N}(\Omega_{\text{int}})$, то зададим фактор-оператор умножения $M_\psi[\mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})]$ и его область определения формулами, аналогичными (4.1), так что

$$M_\psi \left(\left(\begin{array}{c} f \\ g \end{array} \right) \right) = \left(\left(\begin{array}{c} \psi f \\ \psi g \end{array} \right) \right), \quad \text{где } \left(\begin{array}{c} f \\ g \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \psi f \\ \psi g \end{array} \right) \in \left(\begin{array}{c} \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*) \\ \Delta L^2(\Gamma, R) \end{array} \right).$$

Это плотно определенный оператор.

Определим оператор

$$\widetilde{V}: \mathcal{H}(\delta) \rightarrow \mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$$

по правилу

$$\widetilde{V}f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} \delta \\ \Delta \end{array} \right) f|_\Gamma + \left(\begin{array}{c} \delta \\ \Delta \end{array} \right) \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \quad f \in \mathcal{H}(\delta) \subset \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R).$$

Легко проверить, что \widetilde{V} — изоморфизм, причем для \widetilde{V}^{-1} справедлива формула

$$\widetilde{V}^{-1} \left(\left(\begin{array}{c} g \\ u \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \delta \\ \Delta \end{array} \right) \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \right) = P_{\text{ext}}(\delta^*g + u).$$

Оператор \widetilde{V} сплетает оператор M_z^T на $\mathcal{H}(\delta)$ с фактор-оператором M_z на $\mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$.

Конструкция модельного пространства С.-Надя-Фояша в области Ω_{int} легко обобщается на случай многосвязной области; при этом надо считать, что * -внутренняя функция δ многозначна и характер-автоморфна. Такие обобщения рассматривались в работах Болла [29], Мак-Каллоу [58], Павлова [15], Федорова [21] и др. Изоморфизм \widetilde{V} легко определяется для этого случая.

Легко видеть, что фактор-оператор M_z на $\mathcal{H}_{SNF}(\Omega_{\text{int}})$ плотно определен. Поэтому в условиях теоремы 3.1 операторы A и $M_z^T[\mathcal{H}(\delta)]$ плотно определены.

Напомним, что оператор T в гильбертовом пространстве H называется сжатием, если $\|T\| \leq 1$, и C_0 -сжатием, если, кроме того, $\lim_n \|T^n x\| = 0$ для всех $x \in H$.

Связь между моделью §2,3 и моделью С.-Надя-Фояша состоит в следующем.

Предложение 5.2. Оператор A является C_0 -оператором в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ в смысле §3 тогда и только тогда, когда он подобен C_0 -сжатию.

Предложение 5.3. *Предположим, что область Ω_{int} связна и односвязна.*

1) Пусть $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega_{\text{int}}$ — конформное отображение. Оператор A — C_0 -оператор в области Ω_{int} тогда и только тогда, когда он подобен оператору $\varphi(T)$ для некоторого C_0 -сжатия T (оператор $\varphi(T)$, вообще говоря, неограниченный, определяется в теории С.-Надя-Фояша).

2) Пусть A — C_0 -оператор в области Ω_{int} , $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$ — его обобщенная характеристическая функция, и $\delta^{(i0)}$ — чистая часть ее *-внутренней части. Тогда сжатие T можно выбрать таким образом, что $\delta^{(i0)} \circ \varphi$ — характеристическая функция оператора T в смысле С.-Надя-Фояша.

Доказательство предложений 5.2 и 5.3. В случае $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{D}$ фактор-оператор M_z на $\mathcal{H}_{SNF}(\mathbb{D})$ по существу совпадает с модельным оператором С.-Надя-Фояша. Так как, по предположению, функция δ *-внутренняя, $M_z[\mathcal{H}_{SNF}(\mathbb{D})]$ — C_0 -сжатие, и его характеристическая функция является чистой частью функции δ [20, гл.VI).

Пусть теперь Ω_{int} — произвольная односвязная область, пусть δ — *-допустимая функция в Ω_{int} и $\delta^{(i)}$ — ее *-внутренняя часть. Тогда оператор

$$W \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}^\wedge = \left(\begin{pmatrix} f \circ \varphi \\ g \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot \varphi'^{\frac{1}{2}} \right)^\wedge$$

— изоморфизм пространства $\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)}, \Omega_{\text{int}})$ на пространство $\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)} \circ \varphi, \mathbb{D})$. Положим $T = M_z[\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)} \circ \varphi, \mathbb{D})]$. Тогда T — C_0 -сжатие, и W шлетает $M_z[\mathcal{H}_{SNF}(\delta^{(i)}, \Omega_{\text{int}})]$ с оператором $\varphi(T)$. Отсюда вытекают утверждения предложения 5.3. •

Легко сформулировать утверждение, аналогичное предложению 5.3 для случая, когда Ω_{int} состоит из нескольких односвязных компонент.

Теперь очевидна связь теоремы 3.1 с теорией дилатаций С.-Надя-Фояша: в условиях теоремы оператор A обладает нормальной дилатацией с точностью до подобия, спектр которой содержится в Γ .

Подобие модельному оператору С.-Надя-Фояша, устанавливаемое теоремой 3.1, позволяет получить подавляющее большинство известных следствий модели: описание коммутанта, инвариантных и гиперинвариантных подпространств, критерии подобия нормальному оператору. Отметим в связи с этим, что как положительные, так и отрицательные результаты о подобии C_{00} -оператора в области нормальному оператору сразу получаются из результатов Бенамара-Никольского, Васюнина, Купина и Трейля [3, 31, 47, 48].

Если оператор A обладает двусторонне допустимой обобщенной характеристической функцией в Ω_{int} , то любая его обобщенная характеристическая

функция двусторонне допустима. Для односвязного случая это вытекает из предложения 5.3, а в общем случае необходимо небольшое дополнительное рассуждение.

§6. Примеры

6.1. Сжатия. Пусть T — C_0 -сжатие в гильбертовом пространстве H . Дефектным оператором сжатия T называется оператор $D_T = (I - T^*T)^{1/2} \geq 0$. Положим $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{D} = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, $J = D_T$, $R = \mathcal{D}_T \stackrel{\text{def}}{=} \text{clos } D_T H$. Хорошо известно следующее

Предложение 6.1. Система (T, J) точна относительно круга \mathbb{D} ; более того, $\|U_{T,J}x\| = \|x\|$ для любого x из H .

Доказательство содержится, к примеру, в вводной лекции к книге [13] (Теорема о модели). При данном выборе Ω_{int} и J модель, получаемая из теоремы 3.1 с применением изоморфизма \tilde{V} , совпадает с моделью С.-Надя-Фояша.

Из теоремы 3.1 и предложения 5.2 легко вытекает следующее

Предложение 6.2. 1) 2-система (A, J) является C_0 -системой в круге \mathbb{D} тогда и только тогда, когда она подобна системе (T, D_T) для некоторого C_0 -сжатия T .

2) Пусть (A, J) — C_0 -система в круге \mathbb{D} , δ — ее обобщенная характеристическая функция и $\delta_{(i0)}$ — чистая часть $*$ -внутренней части функции δ . Тогда 2-система (A, J) подобна 2-системе (T, D_T) , где T — C_0 -сжатие с характеристической функцией $\delta_{(i0)}$ (в смысле С.-Надя-Фояша). •

6.2. Диссипативные операторы. Пусть A — максимальный диссипативный оператор. Согласно [20], ему соответствует его преобразование Кэли $T = (A - iI)(A + iI)^{-1}$, являющееся сжатием, и c_0 — полугруппа сжатий $\{T(s)\}_{s \geq 0}$, генератором которой является оператор iA . Будем предполагать, что $T \in C_0$; это условие равносильно условию $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 0$ [20, гл. 3, предложение 9.1]. Предположим для простоты, что $A = A_r + iA_i$, где операторы A_r и A_i самосопряжены, $A_i \geq 0$ и $\mathcal{D}(A_r) \subset \mathcal{D}(A_i)$. Положим $J = (2 \text{Im } A)^{1/2} = (2A_i)^{1/2}$. Положим $R = \text{clos Range } J$, $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{C}_+ = \{\lambda : \text{Im } \lambda > 0\}$.

Предложение 6.3. Система (A, J) точна относительно полуплоскости \mathbb{C}_+ ; более того, $\|U_{A,J}x\| = \|x\|$ для всех x из H .

Доказательство. Воспользуемся результатами §10 главы 1 книги [20, гл. 1, §10], а также тем, что преобразованием Лапласа полугруппы $\{T(t)\}$ служит

резольвента $(\lambda - iA)^{-1}$, $\text{Re } \lambda > 0$. Мы получаем, что

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \int_0^\infty \|JT(t)x\|^2 dt + \lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(t)x\|^2 \\ &= \int_0^\infty \|JT(t)x\|^2 dt = \|J(\cdot - iA)^{-1}x\|_{E^2(\{\text{Re } \lambda > 0\}, R)}^2 = \|U_{A,J}x\|_{E^2(\mathbb{C}_+, R)}^2 \end{aligned}$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ (заметим, что $E^2(\mathbb{C}_+, R) = H^2(\mathbb{C}_+, R)$). Тем самым $U_{A,J}$ продолжим до изометрии из H в $H^2(\mathbb{C}_+, R)$, которая действует по той же формуле. •

По-видимому, имеются связи между нашими результатами, примененными к непрерывным линейным системам (см. комментариев в начале §3, а также §8, 9, 10.2) и результатами статьи [67].

6.3. Дифференцирование на интервале с недиссипативными краевыми условиями. Пусть $H = L^2([0, w] \rightarrow \mathbb{C}^n) \stackrel{\text{def}}{=} L^2$, $\rho - n \times n$ комплексная матрица, $\beta - n \times n$ матричнозначная комплексная мера на $[0, w]$ такая, что $\beta(\{0\}) = \beta(\{w\}) = 0$. Рассмотрим оператор

$$A\varphi = -\varphi', \tag{6.1}$$

$$\mathcal{D}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in W_2^1([0, w] \rightarrow \mathbb{C}^n) : L\varphi = 0\}, \tag{6.2}$$

где

$$L\varphi = \varphi(0) - \int d\beta(x)\varphi(x) - \rho \cdot \varphi(w).$$

Покажем, что теорема 3.1 позволяет построить C_{00} — модель оператора A^* . Это означает (см. §9), что существует и C_{00} — модель оператора A ; в §10 она будет вычислена явно.

Отметим, что в скалярном случае $n = 1$ исследование оператора вида $B\psi = \alpha\psi' + \gamma\psi$ в $L^2([0, l])$, где α, γ непрерывны, $\alpha < 0$, с граничным условием, как в (6.2), сводится к исследованию оператора A с помощью изоморфизма $L^2([0, l])$ на $L^2([0, w])$, заданного правилом $\psi \mapsto f \cdot (\psi \circ \tau)$, где f и τ — подходящие функции.

Положим $B(x) = \beta([0, x])$, тогда функция B непрерывна в точках 0 и w и $B(0) = 0$. Оператор A^* задан равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A^*) &= \{ \psi \in L^2 : \exists c \in \mathbb{C}^n : \\ &\quad \psi(x) + B^T(x)c \in W_2^1([0, w], \mathbb{C}^n), c = \psi(0), \psi(w) = \rho^T \cdot \psi(0) \}, \\ (A^* \psi)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (\psi(x) + B^T(x)\psi(0))'. \end{aligned}$$

Положим $\Delta(\lambda)c = Le^{-\lambda x}c$, $c \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\Delta(\lambda) = I - \int_{[0, w]} e^{-\lambda x} d\beta(x) - e^{-\lambda w} \rho. \quad (6.3)$$

Введем оператор

$$(Fr)(\lambda) = \int_{[0, w]} d\beta(x) \int_0^x e^{\lambda(t-x)} r(t) dt + \rho \int_0^w e^{\lambda(t-w)} r(t) dt, \quad r \in L^2.$$

Тогда $\sigma(A) = \{ \lambda : \det \Delta(\lambda) = 0 \}$,

$$((\lambda - A)^{-1}r)(x) = e^{-\lambda x} \Delta(\lambda)^{-1} (Fr)(\lambda) + \int_0^x e^{\lambda(t-x)} r(t) dt, \quad \lambda \notin \sigma(A). \quad (6.4)$$

Из этой формулы получаем, что

$$\begin{aligned} &((\lambda - A^*)^{-1}\psi)(t) \\ &= \int_t^w e^{\lambda(t-x)} \psi(x) dx \\ &+ \left(\int_t^w e^{\lambda(t-y)} d\beta^*(y) dy + e^{\lambda(t-w)} \rho^* \right) \Delta^T(\lambda)^{-1} \int_0^w e^{-\lambda x} \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Положим

$$J_* \psi = \psi(0), \quad \psi \in \mathcal{D}(A^*). \quad (6.6)$$

Введем функцию

$$\delta(\lambda) = e^{\lambda w} \Delta(\lambda) = e^{\lambda w} I - \int e^{\lambda(w-x)} d\beta(x) - \rho, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6.7)$$

Ввиду (6.3), (6.5) оператор U_{A^*, J^*} имеет простой вид:

$$U_{A^*, J^*} \psi(\lambda) = \delta^T(\lambda)^{-1} \int_0^w e^{\lambda(w-s)} \psi(s) ds. \quad (6.8)$$

Выберем произвольное число a такое, что $\det \Delta(z) \neq 0$ и $\|\Delta(z)^{-1}\| \leq C$ при $\operatorname{Re} z \geq a$. Положим

$$\Omega_{\text{int}} = \bar{\Omega}_{\text{int}} = \{\operatorname{Re} z < a\}, \quad \Omega_{\text{ext}} = \bar{\Omega}_{\text{ext}} = \{\operatorname{Re} z > a\}.$$

Легко видеть, что матрицы-функции δ и δ^T — (двусторонне) допустимые для области Ω_{int} . Отсюда получается следующее

Предложение 6.4. $(A^*, J^*) - C_{00}$ — система в области Ω_{int} .

Доказательство. Из равенства Парсеваля вытекает, что $\|\tilde{\psi}\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^n)} \asymp \|\psi\|_{L^2}$, где $\tilde{\psi}(\lambda) = \int_0^w e^{-\lambda s} \psi(s) ds$. Так как $U_{A^*, J^*} \psi(\lambda) = \Delta^T(\lambda)^{-1} \tilde{\psi}(\lambda)$ и функции Δ^T , $\Delta^{T^{-1}}$ принадлежат $H^\infty(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^{n \times n})$, то

$$\|U_{A^*, J^*} \psi\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^n)} \asymp \|\psi\|_{L^2}. \quad \bullet$$

Так как A^* имеет дискретный спектр, то из теоремы 3.1 вытекает, что U_{A^*, J^*} — изоморфизм L^2 на пространство $\mathcal{H}(\delta_1)$ для некоторой функции δ_1 из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathbb{C}^{n \times n})$. В §10 будет показано, что можно взять $\delta_1 = \delta^T$.

6.4. Генераторы систем с запаздыванием. Пусть $h > 0$, $H = \mathbb{C}^n \oplus L^2([-h, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n)$, и операторы $M: C([-h, 0], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $L: W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ допускают представление

$$M\varphi = \int_0^h d\mu(\theta)\varphi(-\theta); \quad L\varphi = \int_0^h \zeta(\theta)\varphi(-\theta) d\theta + \int_0^h \eta(\theta)\dot{\varphi}(-\theta) d\theta.$$

Рассмотрим неограниченный оператор A на H , заданный равенствами

$$\mathcal{D}(A) = \{(c, \varphi) \in H : \varphi \in W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n), c = M\varphi\}, \quad A(c, \varphi) = (L\varphi, \dot{\varphi}).$$

Мы предполагаем, что $\zeta, \eta \in L^2([0, h] \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n})$ и $d\mu$ — $n \times n$ -матричнозначная мера, причем $\mu(\{0\}) = I$. В этом случае A — генератор c_0 -полугруппы, связанной с нейтральной линейной системой с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu * x)(t) &= (\zeta * x)(t) + (\eta * \dot{x})(t), \\ (\mu * x)(0) &= c, \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0. \end{aligned}$$

В [56] построены функциональная модель оператора A и соответствующей полугруппы операторов. Покажем, что результат [56] легко выводится из конструкции настоящей статьи.

Как известно, функция

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= zMe^{z\cdot} - Le^{z\cdot} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} z \left(\int_0^h e^{-z\theta} d\mu(\theta) - \int_0^h e^{-z\theta} \eta(\theta) d\theta \right) - \int_0^h e^{-z\theta} \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

играет основную роль в спектральном анализе оператора A . В частности, $\sigma(A) = \{z : \det \Delta(z) = 0\}$. Существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $\|\Delta(z)^{-1}\| \leq C(1 + |z|)^{-1}$ при $\operatorname{Re} z > a$. Фиксируем это a и произвольное число b , $\operatorname{Re} b > a$. Положим $\Omega_{\text{int}} = \{\operatorname{Re} z < a\}$, $\Omega_{\text{ext}} = \{\operatorname{Re} z > a\}$. Функция

$$\delta(z) = (z - b)^{-1} e^{bz} \Delta(z)$$

— допустимая в Ω_{int} . Рассмотрим оператор

$$J_0: H \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad J_0(d, \psi) = d$$

и положим

$$\widehat{V}_1 y(z) = J_0(z - A^*)^{-1} y, \quad y \in H.$$

Легко видеть, что

$$\widehat{V}_1(d, \psi)(z) = \Delta^T(z)^{-1} \left[m^*(\bar{z})d + \int_{-h}^0 e^{zs} \psi(s) ds \right], \quad (6.9)$$

где

$$m(z) = \int_0^h e^{-z\theta} d\mu(\theta)$$

[56]. Так как $\Delta^T(z)^{-1} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \partial\Omega_{\text{int}}$, то соотношение $\|\widehat{V}_1 y\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^n)} \asymp \|y\|_H$ невозможно. Положим

$$J_* = J_0(A^* - \bar{b}), \quad J_* : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

тогда

$$U_{A^*, J_*} y(z) = (z - \bar{b}) \widehat{V}_1 y(z) - J_0 y. \quad (6.10)$$

Предложение 6.5. Система (A^*, J_*) точна.

Доказательство. Пусть $y = (d, \psi) \in H$. Предположим, что $U_{A^*, J_*} y(z) \equiv 0$ для всех $z \in \rho(A^*)$. Тогда, полагая $z = \bar{b}$ в (6.10), получаем, что $d = J_0 y = 0$. Ввиду (6.9), (6.10) преобразование Лапласа функции ψ тождественно равно нулю, следовательно $\psi \equiv 0$, $y = 0$. Таким образом, $\text{Ker } U_{A^*, J_*} = 0$.

Из (6.9) и (6.10) вытекает, что

$$U_{A^*, J_*}(d, \psi)(z) = \delta^T(z)^{-1} \left[(e^{hz} m^T(z) - \delta^T(z))d + \int_{-h}^0 e^{z(h+s)} \psi(s) ds \right]$$

(ср. с формулой (1.15) из [56]). Отсюда видно, что $U_{A^*, J_*} : H \rightarrow E^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^n)$ — ограниченный оператор. Очевидно, $\|U_{A^*, J_*}(0, \psi)\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^n)} \asymp \|\psi\|$. Так как векторы вида $(0, \psi)$ образуют подпространство конечной коразмерности в H , то система (A^*, J_*) точна. •

В §10 будет показано, что δ^T — обобщенная характеристическая функция системы (A^*, J_*) .

§7. Связь с системами управления и точной управляемостью

Связь функциональных моделей с теорией управления хорошо известна, см. [28, 30, 39, 61]. В этом разделе мы кратко поясним связь между C_0 -операторами и точной управляемостью. Для более подробного ознакомления с точной управляемостью мы отсылаем к работам [59, 78], книгам [28, 34, 46, 54, 61] и др. В книгах [54, 46, 78], в частности, изложен метод доказательства точной управляемости конкретных систем, заданных уравнениями в частных производных (так называемый HUM — метод Лионса). В [59, 61] функциональная модель С.-Надя-Фояша систематически применяется для исследования возможного „размера“ операторов управления при наличии свойств точной управляемости, нуль-управляемости и др. Отметим, что кажущееся противоречие некоторых результатов [34, 59, 61] с теоремой 7.1 связано с тем, что в этих книгах рассматриваются только ограниченные операторы управления и наблюдения (см. к примеру, [61, том 2, теор. 3.8.2]).

Пусть (A, J) — 2-система, причем оператор A плотно определен. Фиксируем точку $\lambda_0 \in \rho(A)$. Положим $A_0 = A - \lambda_0 I$. Введем формально векторы $A_0^n h$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $h \in H$ и векторные пространства $A_0^n H = \{A_0^n h : h \in H\}$. Мы считаем $A_0^n h_1 \neq A_0^n h_2$ при $h_1 \neq h_2$; тогда $A_0^n H$ — гильбертово пространство с нормой образа, изоморфное H . При $n < m$ считаем, что $A_0^n h_1 = A_0^m h_2$, если $A_0^{n-m} h_1 = h_2$. При этом соглашении мы получаем шкалу пространств

$$\dots \subset A_0^{-2} H \subset A_0^{-1} H \subset H \subset A_0 H \subset A_0^2 H \subset \dots;$$

очевидно, $A_0^{-k} H = \mathcal{D}(A_0^k)$, $k > 0$. Операторы A_0 , A и A_0^{-1} корректно определены на линейном множестве $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_0^n H$, при этом A_0 и A_0^{-1} взаимно обратны. Аналогично определяется шкала пространств $A_0^{*n} H$, $n \in \mathbb{Z}$.

Будем использовать следующую реализацию двойственного пространства: $(A_0^n H)^* = A_0^{*-n} H$, полагая $\langle A_0^n h_1, A_0^{*-n} h_2 \rangle_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle h_1, h_2 \rangle_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти определения согласованы между собой: $\langle h_1, h_2 \rangle_n = \langle h_1, h_2 \rangle_m$, если обе скобки определены. Мы будем писать $\langle h_1, h_2 \rangle$ вместо $\langle h_1, h_2 \rangle_n$.

Предположим, что $\sigma(A) \subset \{\operatorname{Re} z \leq \gamma\}$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ и что

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leq C(\operatorname{Re} z - \gamma)^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > \gamma$$

(мы не предполагаем априори, что A — генератор полугруппы). Положим

$$\Gamma = \{\operatorname{Re} z = \gamma\}, \quad \Omega_{\text{int}} = \{\operatorname{Re} z < \gamma\}, \quad \Omega_{\text{ext}} = \{\operatorname{Re} z > \gamma\}. \quad (7.1)$$

Сопоставим системе (A, J) (сопряженную) линейную систему

$$\dot{x}(t) = A^*x(t) + J^*u(t), \quad t \leq 0. \tag{7.2}$$

Здесь $x(t)$ — вектор состояния, u — управление, $u(t) \in R$, $J^*: R \rightarrow \mathcal{D}(A)^* = A_0^*H$. Равенство в (7.2) понимается в смысле равенства в гильбертовом пространстве A_0^*H . Мы ищем решения $x(t)$, в определенном смысле стремящиеся к нулю на $-\infty$.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$L_\gamma^2(\mathbb{R}_-, R) = \{ \varphi: \varphi(t) = e^{\gamma t} \psi(t), \psi \in L^2(\mathbb{R}_-, R) \}.$$

Отметим, что преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{L}u(p) = \int e^{-pt}u(t) dt$ — унитарный изоморфизм $L_\gamma^2(\mathbb{R}_-, R)$ на $L^2(\Gamma, R, \frac{|dz|}{2\pi})$. Определим отображение

$$W: u \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_-, R) \mapsto Wu \stackrel{\text{def}}{=} x(0)$$

следующим образом. Пусть сначала $u \in C^3(\mathbb{R}_-, R)$ и u имеет компактный носитель, содержащийся в \mathbb{R}_- : $u \equiv 0$ на $(-\infty, -S)$ и на $(-\epsilon, 0)$, $\epsilon, S > 0$. Используя преобразование Лапласа на $[-S, +\infty)$, получаем, что (7.2) имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} (p - A^*)^{-1} J^* \tilde{u}(p) dp, \quad t \leq 0, \tag{7.3}$$

здесь $\tilde{u}(p) = \mathcal{L}u$ и $\alpha > \gamma$ произвольно. Легко видеть, что $(p - (\gamma + 1))^3 \tilde{u} \in H^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, $e^{-Sp} (p - (\gamma - 1))^3 \tilde{u} \in H^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$, откуда вытекает, что $e^{-Sp} (p - (\gamma - 1))^3 (p - A^*)^{-1} J^* \tilde{u}$ лежит в $H^2(\{\text{Re } z > \alpha\}, R)$ для любого $\alpha > \gamma$. Поэтому $x(t) \equiv 0$ при $t < -S$. Очевидно, $x \in C^1(\mathbb{R}_-, R)$. Используя преобразование Лапласа на $(-\infty, 0)$, легко показать, что (7.3) — единственное решение (7.2) на \mathbb{R}_- с компактным носителем. Для функций $u \in C^3(\mathbb{R}_-, R)$ указанного вида мы полагаем $Wu \stackrel{\text{def}}{=} x(0)$, где x — решение (7.2), определенное формулой (7.3).

Определение. Будем называть систему (7.2) *точно γ -управляемой*, если оператор W непрерывно распространяется на все пространство $u \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_-, R)$, и образ этого распространенного оператора совпадает со всем H .

Другими словами, система (7.2) *точно γ -управляема*, если с помощью управления $u \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_-, R)$ можно достичь любого состояния $x(0)$.

Теорема 7.1. Система (7.2) точно γ -управляема тогда и только тогда, когда система (A, J) точна относительно выбора областей (7.1).

Доказательство. Заметим, что $\Omega_{\text{int}} = \bar{\Omega}_{\text{int}}$, $\Omega_{\text{ext}} = \bar{\Omega}_{\text{ext}}$. Выберем числа γ_0, γ_1 так, что $\gamma < \gamma_0 < \gamma_1$. Определим оператор $\widetilde{W}: \frac{1}{z-\gamma_1} E^2(\{\text{Re } z < \gamma_0\}, R) \rightarrow H$ по формуле

$$\widetilde{W}v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} (p - A^*)^{-1} J^* v(p) dp, \quad v \in \frac{1}{z-\gamma_1} E^2(\{\text{Re } z < \gamma_0\}, R). \quad (7.4)$$

Согласно (7.3), $\widetilde{W}\mathcal{L}u = Wu$ для функций u из $C^3(\mathbb{R}_-, R)$ с компактным носителем. Так как \mathcal{L} — унитарный изоморфизм $L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R)$ на $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, то система (7.2) точно γ -управляема тогда и только тогда, когда \widetilde{W} распространяется по непрерывности на $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$, и образ этого распространенного оператора совпадает с H . Легко видеть из (7.4) и (2.3), что $\langle U_{A,J} x, v \rangle = \langle x, \widetilde{W}v \rangle$ при $v \in \frac{1}{z-\gamma_1} E^2(\{\text{Re } z < \gamma_0, R\}) \subset \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ и $x \in H$. Поэтому если один из операторов $\widetilde{W}: \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \rightarrow H$ и $U_{A,J}: H \rightarrow \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$ ограничен, то ограничен и второй, и они сопряжены один другому. В этом случае, по теореме Банаха, соотношение $\widetilde{W}\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) = H$ для распространенного оператора \widetilde{W} равносильно условию $\exists \epsilon > 0: \|U_{A,J} x\| \geq \epsilon \|x\|, x \in H$. •

Из теоремы 3.1 следует, что в условиях теоремы 7.1 A — генератор c_0 -полугруппы.

Система (7.2) называется точно управляемой на $[-\tau, 0]$, если можно достичь любого состояния $x(0)$, применяя управления $u \in L^2([-\tau, 0], R)$ (при этом полагаем $u \equiv 0$ на $(-\infty, -\tau)$); как и раньше, понимаем решения системы (7.2) в смысле распространения W по непрерывности). Очевидно, из точной управляемости на $[-\tau, 0]$ следует точная γ -управляемость для любого γ такого, что оператор $W: L^2_\gamma(\mathbb{R}_-, R) \rightarrow H$ непрерывен.

§8. Моделирование генераторов групп

Пусть $T = \{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — c_0 -группа линейных операторов. Тогда существуют пределы

$$\alpha_0(T) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}, \quad \beta_0(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t},$$

при этом $\alpha_0(T) \leq \beta_0(T)$.

Следующая теорема показывает, что для моделирования генератора группы можно положить $J = I$.

Теорема 8.1. 1) Пусть A — генератор c_0 -группы $T = \{T(t)\}$, $\beta > \beta_0(T)$. Тогда

$$\|U_{A,I} x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z > \beta\}, H)} \asymp \|x\|, \quad x \in H. \quad (8.1)$$

Аналогично если $\alpha < \alpha_0(T)$, то $\|U_{A,I} x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z < \alpha\}, H)} \asymp \|x\|$.

В частности, A — C_{00} -оператор в любой полосе вида $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$, где $\alpha < \alpha_0(T) \leq \beta_0(T) < \beta$.

2) Обратно, пусть A — замкнутый оператор, $\sigma(A) \subset \{\alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta\}$. Если

$$\|U_{A,I} x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z < \alpha, H\})} + \|U_{A,I} x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z > \beta, H\})} \asymp \|x\|, \quad x \in H,$$

то A — генератор c_0 -группы.

Доказательство. 1) Как известно,

$$-(A - zI)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-zt} T(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > \beta.$$

Следовательно, согласно теореме Пэли-Винера,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} \|(A - zI)^{-1} x\|^2 |dz| = \int_0^{\infty} e^{-2\beta' t} \|T(t)x\|^2 dt \quad (8.2)$$

при $\beta' > \beta$. Пусть $\|T(t)x\| \geq \epsilon \|x\|$ при $t \in [0, 1]$. Из (8.2) следует, что

$$\|U_{A,I} x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z > \beta, H\})}^2 = \int_0^{\infty} e^{-2\beta t} \|T(t)x\|^2 dt \leq \left(\int_0^{\infty} e^{-2\beta t} \|T(t)\|^2 dt \right) \|x\|^2$$

при $x \in H$, причем последний интеграл сходится, так как $\beta > \beta_0(T)$. С другой стороны,

$$\|U_{A,I} x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z > \beta, H\})}^2 \geq \int_0^1 e^{-2\beta t} \|T(t)x\|^2 dt \geq \left(\epsilon \int_0^1 e^{-2\beta t} dt \right) \|x\|^2.$$

Второе утверждение из 1) доказывается аналогично.

2) Положим $\Omega_{\text{int}} = \{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$, $\Omega_{\text{ext}} = \{\alpha < \operatorname{Re} z\} \cup \{\operatorname{Re} z < \beta\}$. Согласно теореме 3.1, оператор A подобен оператору M_z^T на пространстве $\mathcal{H}(\delta, \Omega_{\text{int}})$ для некоторой $*$ -внутренней функции δ в Ω_{int} . Из представления С.-Надя-Фояша модельного оператора (см. §5) видно, что A — генератор c_0 -группы линейных операторов $\{M_{e^{zt}}[\mathcal{H}_{SNF}(\delta, \Omega_{\text{int}})]\}_{t \in \mathbb{R}}$. •

Из теоремы 8.1, в частности, вытекает существование H^∞ -исчисления для генераторов групп в полосах вида $\{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$, где $\alpha < \alpha_0(T) \leq \beta_0(T) < \beta$. Техника Макинтоша построения H^∞ -исчисления с помощью квадратичных оценок [57] вместе с техникой вполне ограниченных сжатий [62] систематически применяется в работах Ле Мерди [49–53] в связи с моделированием полугрупп линейных операторов, коммутирующих семейств полугрупп и операторов со спектром в единичном круге. Пример работы [52] показывает, что существует компактная c_0 -полугруппа такая, что ее генератор не является C_{00} -оператором ни в одной полуплоскости $\Omega_{\text{int}} = \{\operatorname{Re} z < a\}$.

Отметим, что теорема 1.1 работы [53] весьма близка теореме 8.1, но доказывается в этой работе совершенно другими (менее явными) методами.

Интересно было бы разработать функциональную модель генераторов групп в полосе $\alpha_0(T) < \operatorname{Re} z < \beta_0(T)$.

Из теоремы Датко [35] вытекает, что если $\|U_{A,T}x\|_{E^2(\{\operatorname{Re} z > \beta, H\})} \geq C\|x\|$, $x \in H$, то выполнено строгое неравенство $\beta > \beta_0(T)$.

§9. Воспроизводящие ядра. Вычисление обобщенной характеристической функции с помощью двойственности

Пусть даны Ω_{int} , Ω_{ext} , Γ , R , R_* , имеющие тот же смысл, что и в §2. Введем пространство

$$\begin{aligned} \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(R_*, \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)) \\ &= \{f \in \operatorname{Hol}(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R)) : f(\cdot)r \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R), \text{ при } r \in R_*\}. \end{aligned}$$

Это банахово пространство с нормой $\|f\| = \sup_{r \in R_*, \|r\|=1} \|f(\cdot)r\|_{\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)}$. Аналогично вводятся $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ и $L^2(\Gamma, \mathcal{L}(R_*, R))$. Если f — функция из $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ (или $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathcal{L}(R_*, R))$), то отображение $r \mapsto fr|_\Gamma$ непрерывно из R_* в $L^2(\Gamma, R)$, что означает, что оно является элементом пространства $L^2(\Gamma, \mathcal{L}(R_*, R)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(R_*, L^2(\Gamma, R))$. Будем называть это отображение граничными значениями функции f .

Введенные классы — прямые обобщения классов сильных H^2 -функций в терминологии книги [13]. Отметим, что граничные значения сильных H^2 -функций нельзя понимать в смысле некасательной сильной сходимости операторов.

Определение проекторов P_{int} , P_{ext} легко переносится на $\mathcal{L}(R)$ -значные функции; в этом смысле эти проекторы также ограничены.

Определение. Пусть δ — двусторонне допустимая функция, принадлежащая классу $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, R_*))$. Будем говорить, что $\mathcal{L}(R_*, R)$ -значная функция $\Phi(z)$, голоморфная в Ω_{ext} соответствует функции $\delta(z)$, если для некоторых (а тогда и любых) $\lambda_{\text{int}} \in \Omega_{\text{int}}$, $\lambda_{\text{ext}} \in \Omega_{\text{ext}}$ и некоторой функции $\tau \in (z - \lambda_{\text{ext}})\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \Phi|_{\Omega_{\text{ext}}} &\in (z - \lambda_{\text{int}})\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathcal{L}(R_*, R)); \\ \Phi_e &= (\delta^{-1} + \tau)_i \quad \text{п.в. на } \Gamma \end{aligned} \tag{9.1}$$

(последнее означает, что $(\Phi r)_e = \delta^{-1}r + (\tau r)_i$ п.в. на Γ для всех $r \in R_*$).

Предложение 9.1. Условия (9.1) определяют Φ однозначно с точностью до замены $\Phi \mapsto \Phi + \Phi_0$, $\Phi_0 = \text{const} \in \mathcal{L}(R_*, R)$. Одну из функций Φ можно вычислить по правилу

$$\Phi(z) = (z - \lambda_{\text{ext}}) \left(P_{\text{ext}} \frac{\delta^{-1}}{z - \lambda_{\text{ext}}} \right) (z), \tag{9.2}$$

при этом

$$\tau(z) = -(z - \lambda_{\text{ext}}) \left(P_{\text{int}} \frac{\delta^{-1}}{z - \lambda_{\text{ext}}} \right) (z), \quad z \in \Omega_{\text{int}}. \tag{9.3}$$

Здесь λ_{ext} — произвольная фиксированная точка из Ω_{ext} .

Доказательство. Пусть Φ_1, Φ_2 удовлетворяют (9.1), $\Phi_0(z) = \Phi_1(z) - \Phi_2(z)$, $\Phi_{00}(z) = (z - \lambda_{\text{ext}})^{-1}(\Phi_0(z) - \Phi_0(\lambda_{\text{ext}}))$. Тогда $(\Phi_{00})_i = (\Phi_{00})_e$ п.в. на Γ , $\Phi_{00}|_{\Omega_{\text{int}}} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$, $\Phi_{00}|_{\Omega_{\text{ext}}} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, \mathcal{L}(R_*, R))$. Следовательно, $\Phi_{00} \equiv 0$, $\Phi_0 = \text{const}$. Возможность вычисления Φ и τ по формулам (9.2), (9.3) очевидна. •

Если Φ соответствует δ , условимся продолжать функцию Φ на $\Omega_{\text{int}} \setminus \text{spec } \delta$ по формуле

$$\Phi(\lambda) = \delta^{-1}(\lambda) + \tau(\lambda), \quad \lambda \in \Omega_{\text{int}} \setminus \text{spec } \delta; \tag{9.4}$$

очевидно, при этом $\Phi_e = \Phi_i$ п.в. на $\Gamma \setminus \text{spec } \delta$. При этом определении Φ становится голоморфной функцией на $\mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$. Вскоре мы убедимся в естественности такого продолжения.

Сопоставим также функции δ семейство функций

$$\tilde{g}_{\mu,m}(z) = -\frac{\Phi(z) - \Phi(\mu)}{z - \mu} m, \quad \tilde{h}_{\nu,l}(z) = -\frac{\Phi^T(z) - \Phi^T(\nu)}{z - \nu} l; \quad (9.5)$$

здесь $\mu \in \mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta$, $\nu \in \mathbb{C} \setminus \text{spec } \delta^T$, $m \in R_*$, $l \in R$. Эти функции однозначно определяются по δ .

Предложение 9.2. *Функции $\tilde{g}_{\mu,m}$ лежат в $\mathcal{H}(\delta)$. Функции $\tilde{h}_{\nu,l}$ лежат в $\mathcal{H}(\delta^T)$. Имеют место формулы воспроизведения*

$$\langle \varphi, \tilde{h}_{\bar{\nu},l} \rangle_{\delta} = \langle \varphi(\nu), l \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{H}(\delta), \quad (9.6)$$

$$\langle \psi, \tilde{g}_{\bar{\mu},m}(z) \rangle_{\delta^T} = \langle \psi(\nu), m \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}(\delta^T). \quad (9.7)$$

Доказательство. Из (9.1) легко вытекает, что $\tilde{g}_{\mu,m} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$, $\delta \tilde{g}_{\mu,m} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)$, откуда заключаем, что $\tilde{g}_{\mu,m}|_{\Gamma} \in \mathcal{H}(\delta)$. Аналогично $\tilde{h}_{\nu,l} \in \mathcal{H}(\delta^T)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}(\delta)$, $\nu \in \mathbb{C} \setminus (\text{spec } \delta \cup \Gamma)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \tilde{h}_{\bar{\nu},l} \rangle_{\delta} &= \int_{\Gamma} \left\langle \delta(z) \varphi_e(z), \frac{\Phi^*(\nu)l}{\bar{z} - \bar{\nu}} \right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left\langle \delta(z) \varphi_e(z), \frac{\Phi^*(z)l}{\bar{z} - \bar{\nu}} \right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Используя теорему Коши для Ω_{int} , Ω_{ext} , условия $\delta \cdot \varphi_e|_{\Gamma} \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R_*)$, $\varphi_e \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$, и формулы (9.4), (2.10), получаем, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \left\langle \frac{\Phi(\nu) \delta(z) \varphi_e(z)}{z - \nu}, l \right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \begin{cases} ((\delta^{-1}(\nu) + \tau(\nu)) \delta(\nu) \varphi(\nu), l), & \nu \in \Omega_{\text{int}} \setminus \text{spec } \delta, \\ 0, & \nu \in \Omega_{\text{ext}}; \end{cases} \\ I_2 &= \int_{\Gamma} \left\langle \frac{1 + \tau \delta}{z - \nu} \varphi_e, l \right\rangle \frac{dz}{2\pi i} = \int_{\Gamma} \left\langle \frac{\varphi_e}{z - \nu}, l \right\rangle \frac{dz}{2\pi i} + \int_{\Gamma} \left\langle \frac{\tau \delta \varphi_e}{z - \nu}, l \right\rangle \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \begin{cases} (\tau(\nu) \delta(\nu) \varphi(\nu), l), & \nu \in \Omega_{\text{int}} \setminus \text{spec } \delta, \\ -\langle \varphi(\nu), l \rangle, & \nu \in \Omega_{\text{ext}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, формула (9.6) верна при $\nu \notin \Gamma$. При $\nu \in \Gamma \setminus \text{spec } \delta$ (9.6) получается по непрерывности. Формула (9.7) доказывается так же. •

Будем называть функции $\tilde{h}_{\bar{\nu},l}$ воспроизводящими ядрами пространства $\mathcal{H}(\delta)$, а функции $\tilde{g}_{\bar{\mu},m}$ воспроизводящими ядрами пространства $\mathcal{H}(\delta^T)$. Из формул воспроизведения следует, что функции $\tilde{h}_{\bar{\nu},l}$ полны в $\mathcal{H}(\delta^T)$, а функции $\tilde{g}_{\bar{\mu},m}$ полны в $\mathcal{H}(\delta)$.

Очевидно, что, к примеру, функции $\tilde{h}_{\bar{\nu},l}$ зависят не только от пространства $\mathcal{H}(\delta)$, но и от конкретного выбора функции δ . Пусть $j: \mathcal{D}(M_z^T[\mathcal{H}(\delta)]) \rightarrow R$ — оператор, определенный формулой (1.2), и $j_*: \mathcal{D}(M_z^T[\mathcal{H}(\delta^T)]) \rightarrow R_*$ — аналогичный оператор, отвечающий пространству $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta^T)$. Легко видеть, что

$$\tilde{h}_{\nu,l} = (\nu - M_z^T[\mathcal{H}(\delta^T)])^{-1} j_* l, \quad \tilde{g}_{\mu,m} = (\mu - M_z^T[\mathcal{H}(\delta)])^{-1} j_*^* m \quad (9.8)$$

(здесь $j^*: R \rightarrow (M_z^T - \bar{\lambda}_{\text{ext}})\mathcal{H}(\delta^T)$, $j_*^*: R_* \rightarrow (M_z^T - \lambda_{\text{ext}})\mathcal{H}(\delta)$, где $\lambda_{\text{ext}} \in \Omega_{\text{ext}}$, см. §7). Действительно, для любой функции φ из $\mathcal{H}(\delta)$, согласно предложению 1.1,

$$\langle \varphi, (\nu - M_z^T[\mathcal{H}(\delta^T)])^{-1} j_* l \rangle = \langle j(\bar{\nu} - M_z^T[\mathcal{H}(\delta)]^{-1} \varphi, l \rangle = \langle \varphi(\bar{\nu}), l \rangle,$$

откуда вытекает первая из формул. Вторая формула получается аналогично.

Будем использовать понятие 3-системы, данное в предисловии. Отметим, что если (A, J, J_*) — 3-система, то оператор A^* плотно определен.

Определение. Пусть (A, J, J_*) — 3-система, тогда операторы $J: \mathcal{D}(A) \rightarrow R$, $J_*: \mathcal{D}(A^*) \rightarrow R_*$ ограничены в норме графика. Следовательно, $J_*^*: R_* \rightarrow A_0 H$ — ограниченный оператор. Ввиду тождества Гильберта равенство (0.2) корректно определяет $\mathcal{L}(R_*, R)$ -значную аналитическую функцию Φ на $\rho(A)$, которая называется *передаточной функцией* системы (A, J, J_*) .

Единственная неоднозначность в выборе Φ связана с заменой $\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_0$, $\Phi_0 = \text{const}$. В случае ограниченного оператора A от этой неоднозначности можно избавиться, налагая требование $\Phi(\infty) = 0$, другими словами, полагая $\Phi(\lambda) = J(A - \lambda)^{-1} J_*^*$.

Положим

$$h_{\nu,l} = (\nu I - A^*)^{-1} J_*^* l, \quad g_{\mu,m} = (\mu I - A)^{-1} J_*^* m,$$

$l \in R$, $m \in R_*$, $\mu, \bar{\nu} \in \rho(A)$. Так как $J^*: R \rightarrow A_0^* H$, $J_*^*: R_* \rightarrow A_0 H$ — ограниченные операторы, то $h_{\nu,l}, g_{\mu,m} \in H$ для всех l, m, μ, ν . Очевидно,

$$\begin{aligned} \langle (U_{A,J} x)(\lambda), l \rangle &= \langle x, h_{\bar{\lambda},l} \rangle, \quad \lambda \in \rho(A), \\ \langle (U_{A^*,J_*} x)(\lambda), m \rangle &= \langle x, g_{\bar{\lambda},m} \rangle, \quad \lambda \in \rho(A^*) \end{aligned} \quad (9.9)$$

для всех $x \in H$, $l \in R$, $m \in R_*$. Из формулы Гильберта вытекают равенства

$$U_{A,J} g_{\mu,m} = \tilde{g}_{\mu,m}, \quad U_{A^*,J_*} h_{\nu,l} = \tilde{h}_{\nu,l}. \quad (9.10)$$

Предположим теперь, что $\sigma(A) \subset \text{clos } \Omega_{\text{int}}$, где Ω_{int} , Ω_{ext} удовлетворяют условиям §2. Будем использовать понятие двойственности 2-систем (A, J) и (A^*, J_*) относительно двусторонне допустимой функции, данное во Введении (см. (0.1)). Отметим, что если системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно функции δ , то δ — обобщенная характеристическая функция системы (A, J) , а δ^T — обобщенная характеристическая функция системы (A^*, J_*) .

Предложение 9.3. Пусть $(A, J) \in C_{00}$ — система в области Ω_{int} . Фиксируем ее обобщенную характеристическую функцию δ . Тогда операторы A и A^* плотно определены и существует единственный оператор $J_*: \mathcal{D}(A^*) \rightarrow R$ такой, что система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ .

Доказательство. Так как $(A, J) \in C_0$ — система, то $\mathcal{D}(A)$ плотно в H . Следовательно, определен A^* и $\mathcal{D}(A^*)$ плотно в H . По условию, $U_{A,J}$ — изоморфизм H на $\mathcal{H}(\delta)$. Рассмотрим изоморфизм $W = (U_{A,J}^*)^{-1}: H \rightarrow \mathcal{H}(\delta^T)$. Он сплетает A^* с оператором M_z^T на $\mathcal{H}(\delta^T)$. Легко видеть, что система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ тогда и только тогда, когда $U_{A^*,J_*} = W$. Теперь существование и единственность оператора J_* следуют из теоремы 3.1. •

Теорема 9.4. Пусть $(A, J, J_*) \in \mathcal{Z}$ — 3-система, Φ — ее передаточная функция. Пусть Ω_{int} — допустимая область, и $\sigma(A) \subset \text{clos } \Omega_{\text{int}}$, $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Если системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ , то $\Phi|_{\Omega_{\text{ext}}}$ соответствует δ , а $\Phi|_{\Omega_{\text{int}}}$ — продолжение $\Phi|_{\Omega_{\text{ext}}}$ по формуле (9.4).

Доказательство. Построим по δ функцию $\tilde{\Phi}$, голоморфную в Ω_{ext} , и продолжим ее в $\Omega_{\text{int}} \setminus \text{spes } \delta$ по правилу (9.4). Согласно (9.5) и (9.6), имеет место тождество

$$\langle \tilde{g}_{\mu,m}, \tilde{h}_{\nu,l} \rangle_\delta = \langle \tilde{g}_{\mu,m}(\nu), l \rangle = - \left\langle \frac{\tilde{\Phi}(\nu) - \tilde{\Phi}(\mu)}{\nu - \mu}, m, l \right\rangle.$$

Из определения передаточной функции следует, что

$$\langle g_{\mu,m}, h_{\nu,l} \rangle = - \left\langle \frac{\Phi(\nu) - \Phi(\mu)}{\nu - \mu}, m, l \right\rangle.$$

Ввиду двойственности систем (A, J) и (A^*, J_*) относительно δ

$$\langle g_{\mu,m}, h_{\nu,l} \rangle = \langle U_{A,J} g_{\mu,m}, U_{A^*,J_*} h_{\nu,l} \rangle_{\delta} = \langle \tilde{g}_{\mu,m}, \tilde{h}_{\nu,l} \rangle_{\delta}$$

для всех $\mu, \bar{\nu} \in \rho(A) \setminus \text{spec } \delta$, $m \in R_*$, $l \in R$. Мы заключаем, что $\Phi - \tilde{\Phi} = \text{const}$. •

Теорема 9.5. Пусть (A, J, J_*) — 3-система и Φ — ее передаточная функция. Пусть Ω_{int} — допустимая область и $\sigma(A) \subset \text{clos } \Omega_{\text{int}}$. Пусть δ — двусторонне допустимая функция из $H^{\infty}(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ тогда и только тогда, когда выполнены условия

- 1) $U_{A,J} : H \rightarrow \hat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$ и $U_{A^*,J_*} : H \rightarrow \hat{E}^2(\bar{\Omega}_{\text{ext}}, R)$ — ограниченные операторы;
- 2) $U_{A,J}$ и U_{A^*,J_*} инъективны;
- 3) Φ соответствует δ .

Доказательство. Если системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ , то, согласно определению, выполнены 1) и 2). Из равенства $U_{A,J} g_{\mu,m} = \tilde{g}_{\mu,m}$ (см. (9.10)) вытекает, что Φ соответствует δ .

Обратно, пусть выполнены условия 1)–3). Так как оператор $U_{A,J}$ инъективен, то, согласно (9.9), векторы $h_{\nu,l}$ полны в H . Ввиду 3) выполнено (9.10). Так как $\mathcal{H}(\delta^T)$ — замкнутое подпространство пространства $E^2(\bar{\Omega}_{\text{ext}}, R)$ и векторы $U_{A^*,J_*} h_{\nu,l} = \tilde{h}_{\nu,l}$ порождают $\mathcal{H}(\delta^T)$, то ввиду 1) $U_{A^*,J_*} H \subset \mathcal{H}(\delta^T)$. Аналогично $U_{A,J} H \subset \mathcal{H}(\delta)$. Из тех же соображений $U_{A^*,J_*} H$ плотно в $\mathcal{H}(\delta^T)$ и $U_{A,J} H$ плотно в $\mathcal{H}(\delta)$. Будем считать, что $U_{A,J}$ действует из H в $\mathcal{H}(\delta)$, а U_{A^*,J_*} действует из H в $\mathcal{H}(\delta^T)$. Так как для любых $\nu \in \rho(A^*)$, $l \in R$ и $x \in H$,

$$\langle U_{A,J} x, U_{A^*,J_*} h_{\nu,l} \rangle_{\delta} = \langle U_{A,J} x, \tilde{h}_{\nu,l} \rangle_{\delta} = \langle (U_{A,J} x)(\bar{\nu}), l \rangle = \langle x, h_{\nu,l} \rangle, \quad (9.11)$$

то $U_{A^*,J_*} U_{A,J} = I$. Так как образ оператора $U_{A,J}$ плотен в $\mathcal{H}(\delta)$, то U_{A^*,J_*} — обратный к нему оператор. Значит, система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ . •

В частности, в условиях теоремы оператор A подобен оператору M_z^T на $\mathcal{H}(\delta)$.

Полезен также следующий вариант теоремы 9.5.

Теорема 9.6. Пусть (A, J, J_*) — 3-система, Φ — ее передаточная функция. Пусть Ω_{int} — допустимая область и $\sigma(A) \subset \text{clos } \Omega_{\text{int}}$. Пусть δ — допустимая функция из $H^{\infty}(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Если выполнены условия

1') $U_{A,J}$ — ограниченный оператор из H в $\mathcal{H}(\delta)$; U_{A^*,J^*} — ограниченный оператор из H в $E^2(\overline{\Omega}_{\text{ext}}, R_*)$;

2') $U_{A,J}$ инъективен;

3') Φ соответствует δ ,

то системы (A, J) и (A^*, J^*) находятся в двойственности относительно функции δ .

Доказательство. Из 2') и (9.9) получаем, что векторы $h_{\nu,l}$ полны в H . Ввиду 3') выполнено (9.10). Так же, как и в доказательстве теоремы 9.5, получаем, что $U_{A^*,J^*} H \subset \mathcal{H}(\delta^T)$ и $U_{A^*,J^*} H$ плотно в $\mathcal{H}(\delta^T)$. Из выкладки (9.11) получаем, что $U_{A,J}^* U_{A^*,J^*} = I$, и теперь из плотности образа U_{A^*,J^*} вытекает, что система (A^*, J^*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ . •

Было бы интересно объединить наш подход с построениями теории оптимального управления бесконечномерными системами (см. [24, 7, 65, 34, 66, 37] и др).

§10. Вычисление обобщенных характеристических функций в примерах

Мы рассмотрим примеры §6, а также генераторы c_0 -групп.

10.1. Предположим, что T — C_{00} -сжатие в H , т.е. $\|T\| \leq 1$, $\lim_n T^n x = \lim_n T^{*n} x = 0$ для всех $x \in H$. Положим $D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$, $\mathcal{D}_{T^*} = \text{clos } D_{T^*} H$. Положим, как и ранее, $J = D_T$, $R = \mathcal{D}_T$, и пусть далее $J_* = D_{T^*}$, $R_* = \mathcal{D}_{T^*}$. Тогда передаточная функция 3-системы (A, J, J_*) имеет вид

$$\Phi(\lambda) = D_T(\lambda - T)^{-1} D_{T^*} | \mathcal{D}_{T^*} : R_* \rightarrow R, \quad \lambda \in \rho(T).$$

Предложение 10.1. Пусть T — C_{00} -сжатие. Тогда системы (T, D_T) и (T^*, D_{T^*}) двойственны относительно характеристической функции С.-Надя-Фояша

$$\delta(\lambda) = -T + \lambda D_{T^*} (I - \lambda T^*)^{-1} D_T | \mathcal{D}_T, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Доказательство. Согласно [20], из условия $T \in C_{00}$ следует, что $\delta \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(R, R_*))$ и что δ унитарнозначна п.в. на \mathbb{T} . Положим $\tau(\lambda) \equiv T^* | R_*$; легко видеть, что $\tau \in E^2(\mathbb{D}, \mathcal{L}(R_*, R))$. Мы имеем

$$\delta(\lambda)^* + T^* | R_* = \Phi(\bar{\lambda}^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, $\Phi \in H^\infty(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{clos } \mathbb{D}, \mathcal{L}(R_*, R))$ и, в частности, $\Phi \in zH^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{clos } \mathbb{D}, \mathcal{L}(R_*, R))$; мы получаем также, что $\delta_i^{-1} + T^* | R_* = \Phi_e$ п.в. на $\partial \mathbb{D}$. Следовательно, $\Phi | \Omega_{\text{ext}}$ соответствует δ . Двойственность систем (T, D_T) и (T^*, D_{T^*}) относительно δ следует из теоремы 9.5. •

10.2. Аналогично пусть A — максимальный диссипативный оператор, удовлетворяющий условиям п. 6.2. Предположим, кроме того, что $A \in C_{00}$. Положим $\Omega_{\text{int}} = \{\text{Re } z > 0\}$, $J = (2 \text{Im } A)^{1/2}$, $J_* = -iJ$, $R = R_* = \text{clos Range } J$. Характеристическая функция С.-Надя-Фояша

$$\delta_A(z) = I - J_*(A^* - zI)^{-1} J_*^* |R$$

(первоначально заданная на множестве $\{r \in R: Jr \in R\}$) унитарнозначна п.в. на \mathbb{R} . Так же, как и в п. 10.1, из равенства

$$\delta_A^*(z) = I + J(\bar{z}I - A)^{-1} J_*^* = I + \Phi(\bar{z}), \quad \text{Re } z > 0,$$

мы заключаем, что передаточная функция $\Phi(z) = J(\bar{z}I - A)^{-1} J_*^*$ корректно определена в Ω_{ext} и что функция $\Phi|_{\Omega_{\text{ext}}}$ соответствует δ . Предложение 6.3 и теорема 9.5 позволяют заключить, что системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно характеристической функции δ .

Техника статей [19, 17, 26] позволяет избавиться от предположения, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

10.3. Пусть A — оператор из примера 6.3, и δ, J_* определяются из формул (6.7), (6.6). Покажем, что обобщенная характеристическая функция оператора A совпадает с δ . Необходимо доказать, что $U_{A^*, J_*} H = \mathcal{H}(\delta^T)$, и найти оператор $J: \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathbb{C}^n$ такой, что система (A, J) двойственна системе (A^*, J_*) относительно δ .

Отметим, что $\delta^{-1}(\lambda) = e^{-\lambda w} \Delta^{-1}(\lambda) \in H^\infty(\Omega_{\text{ext}}, \mathbb{C}^{n \times n})$; отсюда следует, что функция Φ , построенная по функции δ , совпадает с δ^{-1} (см. (9.1)). Найдем оператор J такой, что передаточная функция системы (A, J, J_*) совпадает с δ^{-1} .

Каждому $c \in \mathbb{C}^n$ соответствует δ -функция $\psi_w c$, заданная равенством $\langle \varphi, \psi_w c \rangle = \langle \varphi(w), c \rangle$. Считая, что $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, получаем, что $\psi_w c \in \mathcal{D}(A)^* = A^* H$. Из (6.7) формально вытекает равенство

$$J_*(\lambda - A^*)^{-1} \psi_w c = \delta^T(\lambda)^{-1} c = \Phi^T(\lambda)^{-1} c, \quad \lambda \in \rho(A). \tag{10.1}$$

Отметим, что элементы $((\lambda - A^*)^{-1} \psi_w c)(x)$ непрерывны при $x = 0$, но не входят в $\mathcal{D}(A^*)$. Формулы (10.1) и (0.1) наводят на предположение, что искомый оператор J находится по формуле $J^* c = \psi_w c$, $c \in \mathbb{C}^n$, что равносильно равенству

$$J\varphi = \varphi(w), \quad \varphi \in \mathcal{D}(A). \tag{10.2}$$

Предложение 10.2. Пусть оператор A определен формулами (6.1) и (6.2). Определим J , J^* , δ формулами (10.2), (6.6), (6.7). Тогда системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно функции δ , а функция δ^{-1} является передаточной функцией 3-системы (A, J, J_*) .

Доказательство. Обозначим символом Φ_1 передаточную функцию системы (A, J, J_*) , тогда Φ_1^T — передаточная функция системы (A^*, J_*, J) . Из (10.1) следует, что

$$J_*[(\lambda - A^*)^{-1} - (\mu - A^*)^{-1}]J^* = \delta^T(\lambda)^{-1} - \delta^T(\mu)^{-1}.$$

Следовательно, $\Phi_1^T(\lambda) = \delta^T(\lambda)^{-1} = \Phi^T(\lambda)$. Применим теорему 9.6 к системе (A^*, J_*, J) . Из (6.4) получаем формулу

$$U_{A,J}x(\lambda) = \delta(\lambda)^{-1} \left[\int d\beta(x) \int_0^x e^{\lambda(t-x)} x(t) dt + \rho \int_0^w e^{\lambda(t-w)} x(t) dt \right] + \int_0^w e^{\lambda(t-w)} x(t) dt.$$

Отсюда видно, что $U_{A,J}$ — ограниченный оператор из H в $\widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, R)$. Из (6.8) и предложения 6.4 следует, что U_{A^*,J_*} — ограниченный и инъективный оператор из H в $\mathcal{H}(\delta^T)$. Таким образом, выполнены условия теоремы 9.6, и мы получаем все утверждения предложения. •

10.4. Пусть A — генератор нейтральной полугруппы с запаздыванием из примера 6.4. Положим

$$J(c, \varphi) = \varphi(-h), \quad (c, \varphi) \in \mathcal{D}(A). \quad (10.3)$$

Предложение 10.3. В обозначениях §6.4 и (10.3) системы (A, J) и (A^*, J_*) двойственны относительно функции δ , а функция δ^{-1} является передаточной функцией системы (A, J, J_*) .

Доказательство. Введем оператор D_- на $L^2([-h, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n)$,

$$\mathcal{D}(D_-) = \{\varphi \in W_1^2([-h, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n) : \varphi(-h) = 0\}, \quad D_- \varphi = \varphi'.$$

Тогда оператор $(z - D_-)^{-1}$ ограничен для всех $z \in \mathbb{C}$, и

$$((z - D_-)^{-1} \varphi)(x) = - \int_{-h}^x e^{z(x-t)} \varphi(t) dt.$$

Легко видеть, что

$$U_{A,J}(c, \varphi)(z) = J(z - A)^{-1}(c, \varphi) = e^{-hz} \Delta(z)^{-1} (c - (zM - L)(z - D_-)^{-1} \varphi).$$

Следовательно,

$$J(z - A)^{-1} J_0^* = e^{-hz} \Delta(z)^{-1} = (z - b) \delta(z)^{-1}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} J[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] J_*^* &= J[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] (A - b) J_0^* \\ &= J[(\lambda - b)(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - b)(\mu - A)^{-1}] J_*^* \\ &= \delta^{-1}(\lambda) - \delta^{-1}(\mu). \end{aligned}$$

Значит, передаточная функция Φ системы (A, J, J_*) совпадает с δ^{-1} .

Непосредственно проверяется, что выполнены все условия теоремы 9.6, откуда вытекает утверждение предложения. •

Отметим, что в [44] приводится общее „алгебраическое“ определение характеристической функции, также приложимое к исследованию операторов типа рассматриваемых в примерах 6.3 и 6.4. Интересно было бы понять связь конструкции [44] с нашей в возможно более общей ситуации.

10.5. Пусть A — генератор c_0 -группы и пусть $\alpha < \alpha_0(A) \leq \beta_0(A) < \beta$ (см. §8). Положим $J = I$, $\Pi = \{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$. Согласно теореме 3.1 и замечанию 2 к ней, $U_{A,J}$ — изоморфизм пространства H на пространство $\mathcal{H}(\delta)$ для некоторой двусторонне допустимой функции $\delta \in H^\infty(\Pi, \mathcal{L}(H))$. Следующее утверждение, в частности, дает формулу для функции δ .

Предложение 10.4. Пусть A — генератор c_0 -группы. Фиксируем комплексное число s , $|\operatorname{Re} s| > \beta - \alpha$. Положим $R = R_s = H$, $J_* = \bar{s}I$, $\delta(z) = (z - A)(z + s - A)^{-1}$. Тогда $\delta \in H^\infty(\Pi, \mathcal{L}(H))$, δ — двусторонне допустимая в полосе Π , и системы (A, J) и (A^*, J_*) находятся в двойственности относительно функции δ .

Доказательство. Очевидно, δ — двусторонне допустимая функция в Π . Полагая $\tau(z) \equiv I$, мы видим, что функция $\Phi(z) = s(z - A)^{-1}$ соответствует δ ; видно также, что Φ является передаточной функцией системы (A, J, J_*) . Таким образом, выполнены условия 1)–3) теоремы 9.5. •

Отметим, что условие $\delta(z) - I \in S_p$ при $z \in \Pi$ равносильно условию $(z - A)^{-1} \in S_p$ при $z \in \rho(A)$; здесь S_p — класс Шаттена-фон Неймана. Заметим также, что при $\operatorname{Re} s > \beta - \alpha$ та же функция δ служит обобщенной характеристической функцией 3-системы в полуплоскости $\alpha < \operatorname{Re} z$, а при $\operatorname{Re} s < -(\beta - \alpha)$ это утверждение имеет место для полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$.

§11. Неоднозначность в выборе обобщенной характеристической функции

В примерах 3, 4, 5 предыдущего параграфа были даны явные формулы для вычисления обобщенных характеристических функций, в то время как внутренние части этих функций, по всей видимости, не вычисляются явно. Характер неоднозначности выбора обобщенной характеристической функции зависит от того, имеем ли мы дело с оператором A , с 2-системой (A, J) , либо с 3-системой (A, J, J_*) . Всюду в этом параграфе считаем, что A — C_{00} -оператор в области Ω_{int} . Для простоты обозначений будем считать (не умаляя общности), что $R = R_*$.

Теорема 11.1. Пусть все компоненты области Ω_{int} односвязны. Пусть $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — обобщенная двусторонне допустимая характеристическая функция оператора A в области Ω_{int} , L — гильбертово пространство, ζ — двусторонне допустимая функция из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(L))$. Тогда ζ тоже является обобщенной характеристической функцией оператора A в том и только том случае, когда найдутся функции Σ_1, Σ_2 из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, L))$, Ψ_1, Ψ_2 из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(L, R))$, Π из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$, Λ из $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(L))$ такие, что $\Sigma_1 \delta = \zeta \Sigma_2$, $\Psi_1 \zeta = \delta \Psi_2$, $\Psi_1 \Sigma_1 = I + \delta \Pi$, $\Sigma_1 \Psi_1 = I + \zeta \Lambda$.

Доказательство. ζ — обобщенная характеристическая функция оператора A тогда и только тогда, когда найдется изоморфизм

$$\varphi: \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) / \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R) \rightarrow \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, L) / \zeta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, L)$$

такой, что $\varphi M_z = M_z \varphi$ (здесь M_z имеет смысл фактор-операторов). По теореме о подъеме коммутанта [38, теорема VII.1.2], найдется функция $\Sigma_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R, L))$ такая, что $\varphi(f + \delta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)) = \Sigma_1 f + \zeta \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, L)$, $f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, R)$. Из корректной определенности φ вытекает необходимость равенства $\Sigma_1 \cdot \delta = \zeta \cdot \Sigma_2$. Применяя то же соображение к изоморфизму $\psi = \varphi^{-1}$ и используя равенства $\varphi \psi = I$, $\psi \varphi = I$, получаем необходимость всех четырех соотношений. Их достаточность вытекает из прямой проверки. •

В случае конечномерности пространства R теорема о подъеме коммутанта обобщается на многосвязный случай ввиду результатов [29]; частичные обобщения для бесконечномерных R и многосвязных областей Ω_{int} имеются в [58].

Из предложения 5.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 11.2. Пусть (A, J) — 2-система, $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — ее обобщенная двусторонне допустимая характеристическая функция. Пусть $\delta_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$. Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) δ_1 — тоже обобщенная характеристическая функция системы (A, J) ;
- 2) $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$;
- 3) существует функция ψ такая, что $\psi, \psi^{-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}} \rightarrow \mathcal{L}(R))$ и $\delta_1 = \psi\delta$. •

Предложение 11.3. Пусть (A, J, J_*) — 3-система, такая, что (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ . Пусть $\delta_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ — двусторонне допустимая функция. Тогда равносильны утверждения:

- 1) система (A^*, J_*) двойственна системе (A, J) относительно функции δ_1 ;
- 2) $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$, $\mathcal{H}(\delta^T) = \mathcal{H}(\delta_1^T)$, и формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\delta_1}$ совпадают;
- 3) существует функция $\tau \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ такая, что $\delta^{-1} - \delta_1^{-1} = \tau$;
- 4) существует функция τ такая, что $\tau, (I - \delta\tau)^{-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ и $\delta_1 = (I - \delta\tau)^{-1}\delta$;
- 5) существует функция ρ такая, что $\rho, (I + \delta\rho)^{-1} \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R))$ и $\delta_1 = (I + \delta\rho)\delta$.

Доказательство. Равносильность 1) и 2) очевидна. Проверим равносильность 3), 4) и 5). Пусть выполнено 3), тогда $\delta = (I - \delta\tau)\delta_1$ и $\delta_1 = (I + \delta_1\tau)\delta$, откуда следует 4). Полагая $\rho = \tau(I - \delta\tau)^{-1}$, так что $(I + \delta\rho)^{-1} = I - \delta\tau$, мы видим, что из 4) следует 5). Наконец, полагая $\tau = \rho(I + \delta\rho)^{-1}$, получаем, что 5) \implies 3).

Проверим, что 2) \implies 3). Если выполнено 2), то воспроизводящие ядра пространств $\mathcal{H}(\delta)$ и $\mathcal{H}(\delta_1)$ совпадают, откуда вытекает, что функция Φ , соответствующая функциям δ и δ_1 , одна и та же. Поэтому существуют $\tau_0, \tau_1 \in (z - \lambda_{\text{ext}})\widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(R_*, R))$ такие, что $\Phi = \delta^{-1} + \tau_0 = \delta_1^{-1} + \tau_1$. Полагая $\tau = \tau_1 - \tau_0 = \delta^{-1} - \delta_1^{-1}$, видим, что $\tau \in H^\infty(\Omega \rightarrow \mathcal{L}(R))$.

Проверим, что 5) \implies 2). Пусть выполнено условие 5). Тогда $\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta_1)$. Далее, функция $\eta = I + \rho\delta$ также обратима в H^∞ , и $(I + \rho\delta)^{-1} = I - \rho(I + \delta\rho)^{-1}\delta$. Так как $\delta_1 = \delta\eta$, $\delta_1^T = \eta^T\delta^T$, то $\mathcal{H}(\delta^T) = \mathcal{H}(\delta_1^T)$. Совпадение форм $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\delta_1}$ следует из их определения и 5). •

Список литературы

- [1] Аров Д. З., *Пассивные линейные стационарные динамические системы*, Сиб. мат. ж. **20** (1979), №2, 211–228.
- [2] Аров Д. З., Нудельман М. А., *Признаки подобия всех минимальных пассивных реализаций заданной передаточной функции (матрица рассеяния и сопротивления)*, Мат. сб. **193** (2002), №6, 3–24.
- [3] Васюнин В. И., Купин С., *Критерии подобия диссипативного интегрального оператора нормальному*, Алгебра и анализ **13** (2001), №3, 65–104.
- [4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным*, Функц. анализ и прил. **1** (1967), №1, 38–60.

- [5] Губреев Г. М., *Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B -представимых вектор-функций (метод проектирования: 20 лет спустя)*, Алгебра и анализ **12** (2000), №6, 1–97.
- [6] Капустин В. В., *Спектральный анализ почти унитарных операторов*, Алгебра и анализ **13** (2001), №5, 44–68.
- [7] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., *Частотная теорема для уравнений эволюционного типа*, Сиб. мат. ж. **17** (1976), №5, 1069–1085.
- [8] Маламуд М. М., *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному*, Укр. мат. ж. **37** (1985), №1, 49–56.
- [9] Маламуд М. М., *О подобии треугольного оператора диагональному*, Зап. науч. семин. ПОМИ **270** (2000), 201–241.
- [10] Набоко С. Н., *Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **147** (1980), 86–114.
- [11] Набоко С. Н., *Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам*, Функци. анал. и его прил. **18** (1984), №1, 16–27.
- [12] Набоко С. Н., Фаддеев М. М., *Операторы модели Фридрикса, подобные самосопряженным*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. физ., хим. **1990**, вып. 4, 78–82.
- [13] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.
- [14] Павлов Б. С., *Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **39** (1975), №1, 123–148.
- [15] Pavlov V., *Nonphysical sheet for perturbed Jacobian matrices*, Алгебра и анализ **6** (1994), №3, 185–199.
- [16] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
- [17] Рыжов В. А., *Абсолютно непрерывные и сингулярные подпространства несамосопряженного оператора*, Зап. науч. семин. ПОМИ **222** (1995), 163–202.
- [18] Сахнович Л. А., *Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром*, Тр. Моск. мат. о-ва **19** (1968), 211–270.
- [19] Соломяк Б. М., *О функциональной модели для диссипативных операторов. Бескоординатный подход*, Зап. науч. семин. ПОМИ **178** (1989), 57–91.
- [20] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.
- [21] Федоров С. И., *О гармоническом анализе в многосвязной области и характер-автоморфных пространствах Харди*, Алгебра и анализ **9** (1997), №2, 192–240.
- [22] Штраус А. В., *Характеристические функции линейных операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **24** (1960), №1, 43–74.
- [23] Хилле Э., Филлипс Р. С., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [24] Якубович В. А., *Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления. II*, Сиб. мат. ж. **16** (1975), №5, 1081–1102.
- [25] Alpay D., Vinnikov V., *Finite dimensional de Branges spaces on Riemann surfaces*, J. Funct. Anal. **189** (2002), no. 2, 283–324.
- [26] Arov D. Z., Nudelman M. A., *Passive linear stationary dynamical scattering systems with continuous time*, Integral Equations Operator Theory **24** (1996), 1–45.
- [27] Arova Z., *On J -unitary nodes with strongly regular J -inner characteristic functions in the Hardy class $H_2^{n \times n}$* , Operator Theoretical Methods (Timișoara, 1998), Theta Found., Bucharest, 2000, pp. 29–38.

- [28] Avdonin S. A., Ivanov S. A., *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [29] Ball J. A., *A lifting theorem for operator models of finite rank on multiply-connected domains*, J. Operator Theory **1** (1979), 3–25.
- [30] Ball J. A., Cohen N., *De Branges-Rovnyak operator models and systems theory: a survey*, Topics in Matrix and Operator Theory (Rotterdam, 1989), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 50, Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 93–136.
- [31] Benamara N.-E., Nikolski N., *Resolvent tests for similarity to a normal operator*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999), no. 3, 585–626.
- [32] de Branges L., Rovnyak J., *Canonical models in quantum scattering theory*, Perturbation Theory and its Application in Quantum Mechanics (Madison, 1965), Wiley, New York, 1966, pp. 295–392.
- [33] Clark D. N., *On a similarity theory for rational Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 6–31.
- [34] Curtain R. F., Zwart H. J., *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Texts Appl. Math., vol. 21, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [35] Datko R., *Extending a theorem of A. M. Lyapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 610–616.
- [36] Duren P. L., *Theory of H^p -spaces*, Pure Appl. Math., vol. 38, Academic Press, New York-London, 1970.
- [37] Dym H., *On Riccati equations and reproducing kernel spaces*, Recent Advances in Operator Theory (Groningen, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 124, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 189–215.
- [38] Foaş C., Frazho A. E., *The commutant lifting approach to interpolation problems*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 44, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [39] Fuhrmann P. A., *Linear systems and operators in Hilbert space*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [40] Fuhrmann P. A., *A polynomial approach to linear algebra*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [41] Hasumi M., *Invariant subspace theorems for finite Riemann surfaces*, Canad. J. Math. **18** (1966), 240–255.
- [42] Jacob B., Partington J. R., *The Weiss conjecture on admissibility of observation operators for contraction semigroups*, Integral Equations Operator Theory **40** (2001), 231–243.
- [43] Jacob B., Partington J. R., Pott S., *Conditions for admissibility of observation operators and boundedness of Hankel operators* (в печати).
- [44] Kaashoek M. A., Verduyn Lunel S. M., *Characteristic matrices and spectral properties of evolutionary systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 479–517.
- [45] Kalton N. J., Le Merdy C., *Solution of a problem of Peller concerning similarity*, J. Operator Theory **47** (2002), 379–387.
- [46] Komornik V., *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, RAM Res. Appl. Math., Masson, Paris; J. Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 1994.
- [47] Kupin S., *Linear resolvent growth test for similarity of a weak contraction to a normal operator*, Ark. Mat. **39** (2001), 95–119.
- [48] Kupin S., Treil S., *Linear resolvent growth of a weak contraction does not imply its similarity to a normal operator*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 229–242.
- [49] Le Merdy C., *On dilation theory for C^0 -semigroups on Hilbert space*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), no. 4, 945–959.

- [50] Le Merdy C., *The similarity problem for bounded analytic semigroups on Hilbert space*, Semigroup Forum **56** (1998), 205–224.
- [51] Le Merdy C., *The Weiss conjecture for bounded analytic semigroups* (в печати).
- [52] Le Merdy C., *A bounded compact semigroup on Hilbert space not similar to a contraction one*, Semigroups of Operators: Theory and Applications (Newport Beach, CA, 1998), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 42, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 213–216.
- [53] Le Merdy C., *Similarities of ω -accretive operators*, Prépubl. Lab. Math. Besançon no. 2002/07, Univ. France Comté, Centre Nat. Rech. Sci., Besançon, 2002.
- [54] Lions J.-L., *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. Т. 1, 2, Rech. Math. Appl., t. 8, 9, Masson, Paris, 1988.
- [55] Livšic M. S., Kravitsky N., Markus A. S., Vinnikov V., *Theory of commuting nonselfadjoint operators*, Math. Appl., vol. 332, Kluwer Acad. Publishers Group, Dordrecht, 1995.
- [56] Verduyn Lunel S. M., Yakubovich D. V., *A functional model approach to linear neutral functional-differential equations*, Integral Equations Operator Theory **27** (1997), 347–378.
- [57] McIntosh A., *Operators which have an H^∞ functional calculus*, Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations (North Ryde, 1986), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 14, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986, pp. 210–231.
- [58] McCullough S., *Commutant lifting on a two holed domain*, Integral Equations Operator Theory **35** (1999), no. 1, 65–84.
- [59] Nikolski N. K., *Contrôlabilité à une renormalisation près et petits opérateurs de contrôle*, J. Math. Pures Appl. (9) **77** (1998), no. 5, 439–479.
- [60] Nikolski N. K., Vasyunin V. I., *Elements of spectral theory in terms of the free function model. I. Basic constructions*, Holomorphic Spaces (Berkeley, CA, 1995), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 33, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 211–302.
- [61] Nikolski N. K., *Operators, functions, and systems: an easy reading*. Vol. 1. *Hardy, Hankel, and Toeplitz*. Vol. 2. *Model operators and systems*, Math. Surveys Monogr., vol. 92, 93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [62] Paulsen V. I., *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 146, Longman; Wiley, New York, 1986.
- [63] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci., vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [64] Pisier G., *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 351–369.
- [65] Pritchard A. J., Salamon D., *The linear quadratic control problem for infinite-dimensional systems with unbounded input and output operators*, SIAM J. Control Optim. **25** (1987), 121–144.
- [66] Staffans O., *Quadratic optimal control of well-posed linear systems*, SIAM J. Control Optim. **37** (1999), 131–164.
- [67] Staffans O., Weiss G., *Transfer functions of regular linear systems. II. The system operator and the Lax-Phillips semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 8, 3229–3262.
- [68] Vasyunin V. I., Makarov N. G., *A model for noncontractions and stability of the continuous spectrum*, Complex Analysis and Spectral Theory (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer, Berlin–New York, 1981, pp. 365–412.
- [69] Voichick M., *Invariant subspaces on Riemann surfaces*, Canad. J. Math. **18** (1966), 399–403.
- [70] Weiss G., *Admissible observation operators for linear semigroups*, Israel J. Math. **65** (1989), 17–43.

- [71] Weiss G., *Admissibility of unbounded control operators*, SIAM J. Control Optim. **29** (1989), 527–545.
- [72] Xia D., *On the kernels associated with a class of hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory **6** (1983), no. 3, 444–452.
- [73] Yakubovich D. V., *Spectral properties of smooth finite rank perturbations of a planar Lebesgue spectrum cyclic normal operator*, Report no. 15 (1990/91), Inst. Mittag-Leffler, Stockholm.
- [74] Yakubovich D. V., *Spectral properties of smooth perturbations of normal operators with planar Lebesgue spectrum*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 55–83.
- [75] Yakubovich D. V., *Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators*, J. Funct. Anal. **136** (1996), no. 2, 294–330.
- [76] Yakubovich D. V., *A similarity version of the Nagy-Foias model, duality and exact controllability*, 17th International Conference on Operator Theory (Timisoara, 1998): Thesis of Reports.
- [77] Yakubovich D. V., *Subnormal operators of finite type. II. Structure theorems*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 3, 623–681.
- [78] Zuazua E., *Some problems and results on the controllability of partial differential equations*, European Congress of Mathematics. Vol. 2 (Budapest, 1996), Progr. Math., vol. 169, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 276–311.
- [79] Тихонов А. С., *Функциональная модель и двойственность спектральных компонент для операторов с непрерывным спектром на кривой*, Алгебра и анализ **14** (2002), №4, 158–195.

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 20 августа 2002 г.

Автономный университет Мадрида

E-mail: dmitry.yakubovich@uam.es