ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.977

# ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССА ХАРДИ — СОБОЛЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА[1]

**Р. Р. Акопян**

Изучена величина $\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{H^p}$ наилучшего приближения по норме пространства Харди $H^p, 1 \le p \le \infty$, класса Харди — Соболева $H^p_n$ аналитических в полуплоскости функций, имеющих ограниченную $H^p$-норму производной порядка $n$, целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$. Доказано равенство $\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{H^p} = \sigma^{-n}$. Построен линейный метод, обеспечивающий наилучшее приближение класса.

Ключевые слова: класс Харди, приближение функций, целые функции экспоненциального типа.

R. R. Akopyan. Approximation of the Hardy–Sobolev class of functions analytic in a half-plane by entire functions of exponential type.

We study the value $\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{H^p}$ of the best approximation in the norm of the Hardy space $H^p$ for $1 \le p \le \infty$ of the Hardy–Sobolev class $H^p_n$ of functions analytic in a half-plane with bounded $H^p$-norm of the $n$th-order derivative by entire functions of exponential type not exceeding $\sigma$. The equality $\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{H^p} = \sigma^{-n}$ is proved. A linear method providing the best approximation of the class is constructed.

Keywords: Hardy class, approximation of functions, entire functions of exponential type.

## 1. Введение

Обозначим через $H^p = H^p(\Pi)$, $1 \le p \le \infty$, *пространство Харди* функций, аналитических в верхней полуплоскости $\Pi = \{z\colon \Im z > 0\}$, с конечной нормой

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{y>0} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup_{y>0} \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\Pi} |f(z)|.$$

Для натурального $n$ обозначим через $H^p_n$ *класс Харди — Соболева* функций из $H^p$, у которых производная порядка $n$ также принадлежит $H^p$ и ее норма ограничена единицей, т. е.

$$H^p_n = \left\{ f \in H^p\colon\ f^{(n)} \in H^p, \quad \|f^{(n)}\|_{H^p} \le 1 \right\}.$$

*Целыми функциями экспоненциального типа* называют [1, гл. 4] целые функции $f$, которые (в комплексной плоскости $\mathbb{C}$) удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| \le \alpha e^{\beta |z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

где числа $\alpha$, $\beta > 0$ не зависят от точки $z$. Нижнюю грань $\sigma$ констант $\beta$, при которых имеет место неравенство (1.1), называют типом функции $f$; известно, что

$$\sigma = \varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213).

Совокупность всех целых функций экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, принято обозначать $E_\sigma$. Пусть $E_\sigma^p = E_\sigma \bigcap H^p$ — множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, принадлежащих пространству $H^p$.

Везде далее мы предполагаем, что параметр $p$ удовлетворяет условиям $1 \le p \le \infty$, число $\sigma$ — положительное и $n$ — натуральное.

Обозначим через $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p}$ наилучшее приближение по норме пространства $H^p$ класса Харди — Соболева $H_n^p$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, т. е. величину

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p} = \sup_{f\in H_n^p} e_\sigma(f)_{H^p}, \qquad e_\sigma(f)_{H^p} = \inf_{q\in E_\sigma^p} \|f-q\|_{H^p}, \tag{1.2}$$

где нижняя грань берется по всем целым функциям $q$ экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, из пространства $H^p$. Относительно величины $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p}$ в настоящей статье получено следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p} = \sigma^{-n}. \tag{1.3}$$

Пусть $E_\sigma^p(y) = E_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R}+iy),\ y>0$, есть множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, след которых на прямой $\mathbb{R}+iy$ принадлежит пространству $L^p$. При любом $y>0$ имеет место вложение $E_\sigma^p \subset E_\sigma^p(y)$. Для функции $f \in H_n^p$ положим

$$e_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf_{q\in E_\sigma^p(y)} \|f-q\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}, \qquad \widetilde{e}_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf_{q\in E_\sigma^p} \|f-q\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

Наряду с (1.2) в работе изучены величины

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup_{f\in H_n^p} e_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}, \qquad \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup_{f\in H_n^p} \widetilde{e}_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \tag{1.4}$$

наилучшего приближения по норме пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$ класса Харди — Соболева $H_n^p$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, и соответственно целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, из пространства $H^p$. Ясно, что величины (1.4) связаны неравенством

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

На самом деле в этом неравенстве имеет место равенство; точнее говоря, в статье доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\ y>0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{1.5}$$

При доказательстве теорем 1 и 2 будут построены линейные методы, реализующие наилучшее приближение в задачах (1.2) и (1.4).

Целые функции экспоненциального типа являются классическим аппаратом приближения функций как вещественной, так и комплексной переменной. Таким приближениям посвящена обширная литература (см., например, монографии [1; 2] и приведенную там библиографию).

Хорошо известно (см., например, [1, гл. 5]), что для наилучшего приближения на числовой оси класса Соболева $Q_n^p = \{f \in L^p(\mathbb{R}) :\ f^{(n)} \in L^p(\mathbb{R}),\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 1\}$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_\sigma(Q_n^p)_{L^p(\mathbb{R})} \le \mathcal{K}_n\, \sigma^{-n}, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(n+1)}}{(2k+1)^{n+1}}.$$

В случаях $p=\infty$ и $p=1$ в последнем неравенстве имеет место равенство.

Близкая к исследуемым задача для функций, аналитических в круге, хорошо изучена. Пусть $H^p(D)$ — пространство Харди функций, аналитических в единичном круге $D$, и $H^p_n(D)$ — класс Харди — Соболева функций из $H^p(D)$, у которых производная порядка $n$ также принадлежит $H^p(D)$ и ее норма ограничена единицей. Для наилучшего приближения по норме пространства $H^p(D)$ класса $H^p_n(D)$ алгебраическими многочленами степени не более чем $N-1$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{N-1}(H^p_n(D))_{H^p(D)} = \frac{(N-n)!}{N!}, \qquad n < N, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{1.6}$$

В случае $p=\infty$ это доказано в работе К. И. Бабенко [3]; в случае $1 \le p < \infty$ — в работе Л. В. Тайкова [4], где также показано, что величина (1.6) является $N$-мерным поперечником класса $H^p_n(D)$ в пространстве $H^p(D)$, $1 \le p \le \infty$.

## 2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе вводится конкретный оператор свертки в $H^\infty$(и, следовательно, в $H^p$, $1 \le p \le \infty$) и изучаются его свойства. Впоследствии будет показано, что этот оператор определяет метод наилучшего приближения класса Харди — Соболева $H^p_n$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$.

В дальнейшем потребуется следующее известное (см., например, [5, гл. 6, С]) утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть $f \in H^p$, $1 \le p \le \infty$. Тогда для почти всех $\zeta \in \mathbb{R}$ существует (некасательный) предел*

$$f(\zeta) = \lim_{z \to \zeta} f(z),$$

*при этом $f \in L^p(\mathbb{R})$, и для точек $z = x + iy \in \Pi$ справедливо представление*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z})}\, d\zeta. \tag{2.1}$$

Для функции $g$ переменной $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $g(t)\, e^{-\eta t} \in L^1(\mathbb{R})$, будем задавать преобразование Фурье $\widehat{g}$ в точках $\zeta \in \mathbb{R} + i\eta$ следующей формулой:

$$\widehat{g}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{i\zeta t}\, dt.$$

Если при этом функция $\widehat{g}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R}+i\eta)$, то на прямой $\mathbb{R}+i\eta$ определена свертка $\widehat{g} * f$ функций $\widehat{g}$ с функциями $f \in H^\infty$, задаваемая соотношением

$$(\widehat{g} * f)(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(z - \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z = x + i\eta.$$

При $y > 0$ определим на числовой прямой функцию $\epsilon = \epsilon_y$ формулой

$$\epsilon(t) = \epsilon_y(t) = \begin{cases} e^{2yt}, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Функция $\epsilon(t) e^{-\eta t}$ суммируема на прямой $\mathbb{R}$ при $0 < \eta < 2y$. Поэтому преобразование Фурье $\widehat{\epsilon}$ функции $\epsilon$ определено в полосе $\varpi_y = \{z \colon 0 < \Im z < 2y\}$ и, как нетрудно проверить,

$$\widehat{\epsilon}(z) = \frac{1}{\pi}\, \frac{y}{z(z - 2iy)}\,.$$

Ясно, что $\widehat{\epsilon}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R} + iy)$.

Свертка $\widehat{\epsilon} * f$ функции $\widehat{\epsilon}$ и произвольной ограниченной аналитической в верхней полуплоскости функции $f$ в точке $z = x + iy$ совпадает с правой частью формулы (2.1). Таким образом, интегральное представление (2.1) функций $f \in H^\infty$ можно записать в виде

$$f(z) = (\widehat{\epsilon} * f)(z), \quad z = x + iy, \quad y > 0. \tag{2.3}$$

Пусть $y \geq 0$, $\sigma > 0$ и $n$ — натуральное число. Определим функцию $l$ переменной $t \in \mathbb{R}$ соотношением

$$l(t) = l(t; y) = \begin{cases} 1 - (-t)^n (2\sigma + t)^{-n} \, e^{-2y(\sigma + t)}, & -\sigma \leq t \leq 0, \\ 1 - t^n (2\sigma - t)^{-n} \, e^{-2y(\sigma - t)}, & 0 < t \leq \sigma, \\ 0, & t \notin [-\sigma, \sigma]. \end{cases} \tag{2.4}$$

В следующем утверждении обсуждаются свойства преобразования Фурье $\widehat{l}$ функции $l$ и ее свертки с функциями из пространства Харди $H^p$, $1 \leq p \leq \infty$. В частности, доказано, что оператор свертки

$$Af = \widehat{l} * f, \quad f \in H^p, \tag{2.5}$$

отображает пространство $H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, в пространство $E^p_\sigma = H^p \cap E_\sigma$.

**Лемма 2.** *При $y \geq 0$, $\sigma > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения*:

(a) *функция $\widehat{l}$ является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$*;

(b) *функция $\widehat{l}$ суммируема на любой прямой $\mathbb{R} + iv$, $v \in \mathbb{R}$, параллельной вещественной оси, при этом существует константа $M$ такая, что справедливо неравенство*

$$\|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R}+iv)} \leq M \, e^{|v|\sigma}, \quad v \in \mathbb{R}; \tag{2.6}$$

(c) *свертка $q = Af = \widehat{l} * f$ функции $\widehat{l}$ с произвольной функцией $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, из пространства $H^p$, т. е. $Af \in E^p_\sigma$*;

(d) *формулой* (2.5) *определен линейный ограниченный оператор $A$ в пространстве $H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, для нормы которого имеет место оценка*

$$\|A\|_{H^p \to H^p} \leq \|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Утверждение (a) представляет собой хорошо известный факт, который с учетом определения (2.4) функции $l$ следует из оценок

$$|\widehat{l}(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} l(t) \, e^{izt} \, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} l(t) \, e^{-vt} \, dt \leq \sigma \pi^{-1} e^{|v|\sigma}, \quad z = u + iv \in \mathbb{C}. \tag{2.8}$$

Для доказательства утверждения (b) рассмотрим функцию $l_2$, определяемую равенством

$$l_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} dl'(t).$$

Дважды взяв по частям интеграл в правой части, учитывая четность $l$ и свойство $l(\sigma) = l(-\sigma) = 0$, получим представление

$$l_2(z) = c(z) - \frac{z^2}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} l(t) \, e^{izt} \, dt = c(z) - z^2 \, \widehat{l}(z),$$

где
$$c(z)=\pi^{-1}\left(l'(\sigma-0)\cos\sigma z-l'(+0)\right),$$
откуда имеем
$$\widehat{l}(z)=z^{-2}(c(z)-l_2(z)). \tag{2.9}$$
Функция $l'$ нечетная, на отрезке $[0,\,\sigma]$ неположительная и невозрастающая. Поэтому, используя обозначение
$$L=\max\{|l'(t)|\colon\ t\in[0,\,\sigma]\}=-l'(\sigma-0)=2(n\sigma^{-1}+y),$$
получаем следующие оценки:
$$|l_2(z)|\le-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{-vt}dl'(t)\le\pi^{-1}e^{|v|\sigma}(l'(+0)-l'(\sigma-0))\le\pi^{-1}Le^{|v|\sigma}, \tag{2.10}$$
$$|c(z)|\le\pi^{-1}\left|l'(\sigma-0)\,\cos\sigma z+l'(+0)\right|\le\pi^{-1}L\left(e^{|v|\sigma}+1\right)\le2\pi^{-1}L\,e^{|v|\sigma}. \tag{2.11}$$
Используя равенство (2.9) и неравенства (2.10), (2.11), получаем следующее уточнение оценки (2.8) для функции $\widehat{l}$:
$$|\widehat{l}(u+iv)|\le\pi^{-1}\,\mu(u)\,e^{|v|\sigma},\quad \mu(u)=\min\{3L\,u^{-2},\,\sigma\}. \tag{2.12}$$
Отсюда следует неравенство (2.6) с константой
$$M=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(u)\,du=4\pi^{-1}\sqrt{3L\sigma}.$$

Обратимся к доказательству утверждения (c). Так как функция $\widehat{l}$ целая и удовлетворяет неравенству (2.12), то для целой функции $q=Af=\widehat{l}*f$ имеет место представление
$$q(z)=\int\limits_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\widehat{l}(z-\zeta)f(\zeta)d\zeta,\quad \alpha\ge0.$$

Покажем, что $q=Af\in E_\sigma$. Используя определение функции $q$ и неравенство (2.6), получим оценку модуля значения функции $q$ в произвольной точке $z=u+iv$ :
$$|q(z)|\le\|f\|_{H^\infty}\|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R}+iv)}\le\|f\|_{H^\infty}\,Me^{|v|\sigma}.$$

Убедимся, что $q\in H^p$. Используя обобщенное неравенство Минковского (см., например, [1, гл. 1, п. 5]), для $v\ge0$ получаем
$$\|q\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)}=\left\|\int\limits_{-\infty+iv}^{+\infty+iv}\widehat{l}(z-\zeta)f(\zeta)d\zeta\right\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)}\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{l}(w)|\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)}\,dw$$
$$=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{l}(w)|\,dw\le\|f\|_{H^p}\|\widehat{l}\,\|_{L^1(\mathbb{R})}, \tag{2.13}$$
так что, действительно, $q\in H^p$ и, следовательно, $q=Af\in E^p_\sigma$ для любой функции $f\in H^p$, $1\le p\le\infty$.

Относительно утверждения (d) заметим, что оценка (2.7) содержится в (2.13); впрочем, эта оценка, как и (2.13), хорошо известны. Лемма 2 доказана. □

В дальнейшем будут использоваться функции $u_1, u_2, u_3$ переменной $t \in \mathbb{R}$, определяемые соотношениями:

$$u_1(t) = u_1(t; y) = \begin{cases} \phi(t), & t < \sigma, \\ t^{-n}, & t \geq \sigma; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$u_2(t) = u_2(t; y) = \begin{cases} e^{2yt}, & t < -\sigma, \\ (-t)^n \phi(-t) + e^{2yt} - 1, & -\sigma \leq t < 0, \\ t^n u_1(t), & t \geq 0; \end{cases} \tag{2.15}$$

$$u_3(t) = u_3(t; y) = \begin{cases} t^n \phi(t) - e^{2yt}, & t < -\sigma, \\ t^n \phi(t) - (-t)^n \phi(-t) + (1 - e^{2yt}), & -\sigma \leq t < 0, \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

в которых $\phi(t) = (2\sigma - t)^{-n}\, e^{-2y(\sigma - t)}$. Видно, что

$$\epsilon(t) - l(t) = u_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

где функции $\epsilon$ и $l$ заданы формулами (2.2) и (2.4), и

$$t^n u_1(t) - u_2(t) = u_3(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Далее в разделе рассматриваются свойства преобразований Фурье $\widehat{u}_j$ функций $u_j$, $j = 1, 2, 3$, определенных соотношениями (2.14 )–(2.16).

**Лемма 3.** *При $y > 0$, $\sigma > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ для преобразований Фурье $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ функций $u_1$, $u_2$ справедливы следующие утверждения*:

(a) *функции $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ являются аналитическими в полосе $\varpi_y = \{z\colon\ 0 < \Im z < 2y\}$*;

(b) *для произвольного $\eta$, $0 < \eta < 2y$, функции $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$ и их производные суммируемы на прямой $\mathbb{R} + i\eta$ и, более того, на прямой стремятся к нулю не медленнее, чем $|z|^{-2}$ при $z \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение (a). Из определений (2.14), (2.15) следует, что функции $u_j$, $j = 1, 2$, на отрицательной полуоси удовлетворяют неравенству

$$|u_j(t)| \leq Ce^{2yt}, \quad t \in (-\infty, 0),$$

где $C$ — константа, и ограничены на неотрицательной полуоси $[0, +\infty)$. Поэтому, как хорошо известно, преобразования Фурье $\widehat{u}_1, \widehat{u}_2$ функций $u_1$, $u_2$ определены и являются аналитическими функциями в полосе $\varpi_y = \{z\colon\ 0 < \Im z < 2y\}$.

Докажем утверждение (b). Обозначим $u = u_{jk}$ функцию, задаваемую формулой $u(t) = u_{jk}(t) = t^k u_j(t)$, $j = 1, 2$; $k \in \mathbb{Z}_+$. Функция $u$ — непрерывная на $\mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемая на всей прямой, кроме (может быть) трех точек: $t_1 = -\sigma$, $t_2 = 0$ и $t_3 = \sigma$, в каждой из которых производная имеет разрыв первого рода с (конечными) скачками $s_l$, $l = 1, 2, 3$. Величина

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\eta t}|u''(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\eta t}|u''(t)|dt + \int_{t_2}^{t_3} e^{-\eta t}|u''(t)|dt + \int_{t_3}^{+\infty} e^{-\eta t}|u''(t)|dt$$

конечна для всех $\eta$, $0 < \eta < 2y$. Определим в полосе $\varpi_y$ функцию $U$ формулой

$$U(z) = \int_{-\infty}^{t_1} e^{izt} du'(t) + \int_{t_1}^{t_2} e^{izt} du'(t) + \int_{t_2}^{t_3} e^{izt} du'(t) + \int_{t_3}^{+\infty} e^{izt} du'(t), \quad z \in \varpi_y.$$

Дважды интегрируя по частям, получим для функции $U$ выражение

$$U(z) = \sum_{l=1}^{3} e^{it_l z} s_l - z^2 \widehat{u}(z),$$

а из него — представление для преобразования Фурье $\widehat{u}$ функции $u$:

$$\widehat{u}(z) = z^{-2}\biggl(\sum_{l=1}^{3} e^{it_l z} s_l - U(z)\biggr). \tag{2.19}$$

Следовательно, для $z \in \mathbb{R} + i\eta$ имеет место неравенство

$$|\widehat{u}(z)| \le \widetilde{M}(\eta)|z|^{-2}, \qquad \widetilde{M}(\eta) = \sum_{l=1}^{3} |s_l| e^{-t_l\eta} + M(\eta). \tag{2.20}$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что функция $\widehat{u}$ суммируемая на прямой $\mathbb{R} + i\eta$. Для завершения доказательства леммы 3 осталось отметить, что $\widehat{u} = \widehat{u}_{jk} = (-i)^k \widehat{u}_j^{(k)}$. □

**Лемма 4.** *При $y > 0$, $\sigma > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ для преобразования Фурье $\widehat{u}_3$ функции $u_3$ справедливы следующие утверждения*:

(a) *функция $\widehat{u}_3$ является аналитической в полуплоскости $\Pi_{2y}^{-} = \{z\colon \Im z < 2y\}$*;

(b) *для произвольного $\eta$, $\eta < 2y$, функция $\widehat{u}_3$ суммируема на прямой $\mathbb{R} + i\eta$ и, более того, в полуплоскости $\Pi_{\eta}^{-} = \{z\colon \Im z < \eta\}$ стремится к нулю не медленнее, чем $|z|^{-2}$ при $z \to \infty$.*

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3. Дополнительного обоснования требует лишь утверждение (b). Функция $u_3$ равна нулю на неотрицательной полуоси, следовательно, неравенство (2.20) примет вид

$$|\widehat{u}_3(z)| \le \widetilde{M}(\eta)|z|^{-2}, \quad z = x + i\eta, \quad \eta < 2y,$$

$$\widetilde{M}(\eta) = |s_2| + |s_1| e^{\sigma\eta} + M(\eta), \qquad M(\eta) = \int_{-\infty}^{-\sigma} e^{-\eta t} |u_3''(t)| dt + \int_{-\sigma}^{0} e^{-\eta t} |u_3''(t)| dt.$$

При этом величины $M(\eta)$ и $\widetilde{M}(\eta)$ не возрастают с ростом $-\eta$. □

**Лемма 5.** *Справедливо равенство*

$$\|\widehat{u}_1\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n} e^{-y\sigma}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $u_1(t-\sigma)\, e^{-yt}$ переменной $t$ является четной. Поэтому для преобразования Фурье $\widehat{u}_1$ функции $u_1$ в точке $z = x + iy$ имеет место представление

$$\widehat{u}_1(z) = e^{i\sigma x}\, \mathcal{I}(x), \qquad \mathcal{I}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} (t+\sigma)^{-n}\, e^{-y(t+\sigma)} \cos xt\, dt.$$

Дважды взяв по частям последний интеграл, получим представление функции $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\pi x^2} \int_{0}^{+\infty} \psi''(t+\sigma)\,(1 - \cos xt)\, dt.$$

Откуда, учитывая неотрицательность второй производной функции $\psi(t) = t^{-n}\, e^{-yt}$ на полупрямой $(\sigma, +\infty)$, заключаем, что функция $\mathcal{I}(x)$ является неотрицательной. Поэтому

$$\|\widehat{u}_1\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bigl| e^{i\sigma x}\, \mathcal{I}(x)\bigr|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(x)\, dx = \sigma^{-n} e^{-y\sigma}.$$

Лемма 5 доказана. □

**Лемма 6.** *Для произвольной функции* $f \in H_n^p$, $1 \le p \le \infty$, *имеет место равенство*

$$(\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z) = i^n\,(\widehat{u}_2 * f)(z), \quad z = x + iy, \quad y > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4 функция $\widehat{u}_3$ суммируема на прямой $\mathbb{R}+iy$ и является в полуплоскости $\Pi_y^- = \{z\colon \Im z < y\}$ аналитической функцией, стремящейся к нулю не медленнее, чем $|z|^{-2}$ при $z \to \infty$. Из интегральной теоремы Коши следует (см., например, [6, гл. 5, § 2]), что для любой функции $f$, аналитической и ограниченной в верхней полуплоскости $\Pi$, выполняется равенство

$$(\widehat{u}_3 * f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_3(z - x) f(x) dx = 0, \quad z = x + iy. \tag{2.21}$$

С другой стороны, из равенства (2.18) имеем соотношение

$$(\widehat{u}_3 * f)(z) = \Big(\big((-i)^n \widehat{u}_1^{(n)} - \widehat{u}_2\big) * f\Big)(z) = (-i)^n (\widehat{u}_1^{(n)} * f)(z) - (\widehat{u}_2 * f)(z).$$

Отсюда с учетом (2.21) следует равенство

$$(\widehat{u}_1^{(n)} * f)(z) = i^n\,(\widehat{u}_2 * f)(z), \quad z = x + iy. \tag{2.22}$$

Из свойства свертки

$$(\widehat{u}_1^{(n-k)} * f^{(k)})(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(\zeta)\, d\widehat{u}_1^{(n-k-1)}(z - \zeta)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_1^{(n-k-1)}(z - \zeta)\, df^{(k)}(\zeta) = (\widehat{u}_1^{(n-k-1)} * f^{(k+1)})(z), \quad k \in \mathbb{N},$$

получим равенство

$$(\widehat{u}_1^{(n)} * f)(z) = (\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z), \quad z = x + iy.$$

Последнее равенство и (2.22) дают утверждение леммы 6.

## 3. Оценка сверху

В данном разделе будет вычислено (теорема 3 и следствие 1) приближение класса Харди — Соболева линейным оператором $A$, задаваемым формулой (2.5). Как следствие, получены оценки сверху величин (1.2) и (1.4) (следствие 2).

**Теорема 3.** *При* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $y > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *для оператора свертки* (2.5) *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H_n^p} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что для уклонения $f - Af$, где $f$ — произвольная функция из класса Харди — Соболева $H_n^p$, справедливо представление

$$(f - Af)(z) = (-i)^n\,(\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z), \quad z = x + iy. \tag{3.2}$$

Для этого применим к обеим частям равенства (2.17) преобразование Фурье:

$$\widehat{\epsilon}(z) - \widehat{l}(z) = \widehat{u}_2(z), \quad z = x + iy.$$

Далее, используя свертку обеих частей полученного равенства с произвольной функцией $f \in H^p_n$ и применяя лемму 6, получаем

$$\Big((\widehat{\epsilon} - \widehat{l}) * f\Big)(z) = (\widehat{u}_2 * f)(z) = (-i)^n (\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z), \quad z = x + iy.$$

Отсюда с учетом представления (2.3) и определения (2.5) получим представление (3.2).

Из равенства (3.2) и обобщенного неравенства Минковского (аналогично (2.13)) следует оценка сверху для нормы уклонения

$$\|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|\widehat{u}_1 * f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{u}_1\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} \|f^{(n)}\|_{H^p}.$$

Подставляя значение нормы $u_1$, вычисленное в лемме 5, имеем

$$\|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma} \|f^{(n)}\|_{H^p},$$

т. е. для класса Харди — Соболева справедлива оценка

$$\sup_{f \in H^p_n} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n} e^{-y\sigma}.$$

Теперь для доказательства равенства (3.1) осталось получить оценку снизу

$$\sup_{f \in H^p_n} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \sigma^{-n} e^{-y\sigma}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию $f_\sigma(z) := \sigma^{-n} e^{i\sigma z}$. Ясно, что $f_\sigma \in H^\infty_n$. Так как $l(\sigma) = 0$, то для $f_\sigma$ имеет место равенство

$$Af_\sigma(z) = (\widehat{l} * f_\sigma)(z) = \sigma^{-n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{l}(w)\, e^{i\sigma(z-w)}\, dw = \sigma^{-n}\, e^{i\sigma z}\, l(\sigma) \equiv 0.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sup_{f \in H^\infty_n} \|f - Af\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \|f_\sigma - Af_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \|f_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Для обоснования оценки снизу (3.3) при $1 \le p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{\sigma}^{\sigma+h} \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\sigma z} \int\limits_0^1 \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt, \quad h > 0,$$

где $\varphi$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $[0,1]$. Нетрудно понять, что $f_{\sigma,h}(z) \in H^p$, $p \ge 1$, и $\|f_{\sigma,h}(z)\|_{H^p} \to \infty$ при $h \to 0$.

Так как носителем функции $l$ является отрезок $[-\sigma, \sigma]$, то

$$Af_{\sigma,h} = \frac{1}{h} \int\limits_{\sigma}^{\sigma+h} l(t)\, \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt \equiv 0.$$

Для $f^{(n)}_{\sigma,h}$ имеет место представление

$$f^{(n)}_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{\sigma}^{\sigma+h} (it)^n \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\sigma z} \Big( (i\sigma)^n f_{0,1}(hz) + \sum_{k=1}^{n} C^k_n h^k (i\sigma)^{n-k} f^{(k)}_{0,1}(hz) \Big).$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\sup_{f\in H_n^p}\|f-Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \geq \lim_{h\to+0}\frac{\|f_{\sigma,h}-Af_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f_{\sigma,h}^{(n)}\|_{H^p}} = \lim_{h\to+0}\frac{\|f_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f_{\sigma,h}^{(n)}\|_{H^p}}$$

$$\geq \lim_{h\to+0}\frac{e^{-\sigma y}\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}}{\sigma^n\,\|f_{0,1}\|_{H^p}+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\,\sigma^{n-k}\,h^k\,\|f_{0,1}^{(k)}\|_{H^p}} = \sigma^{-n}\,e^{-y\sigma}.$$

Теорема 3 доказана. □

Обозначим через $A_0$ оператор свертки (2.5) в случае $y=0$, т. е. оператор свертки с преобразованием Фурье функции $l(t;0)$.

**Следствие 1.** *Для произвольного* $1\le p\le\infty$, $\sigma>0$, $n\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H_n^p}\|f-A_0f\|_{H^p}=\sigma^{-n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что для произвольной функции $f\in H^p$ выполняется равенство

$$\lim_{y\to+0}\|f-Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}=\|f-A_0f\|_{H^p}\,. \tag{3.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\big|\|f-Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}-\|f-A_0f\|_{H^p}\big|\\ &=\big|\|f-Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}\pm\|f-A_0f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}-\|f-A_0f\|_{H^p}\big|\\ &\le\|Af-A_0f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}+\big|\|f-A_0f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}-\|f-A_0f\|_{H^p}\big|\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь для доказательства (3.4) достаточно показать, что оба слагаемых в правой части неравенства (3.5) стремятся к нулю при $y\to+0$.

Для первого слагаемого имеет место оценка сверху

$$\|Af-A_0f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}\le\|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{H^p}, \tag{3.6}$$

где $\widehat{v}$ — преобразование Фурье функции $v$, задаваемой формулой

$$v(t)=v(t;y)=l(t;0)-l(t;y)=\begin{cases}\phi(-t)\,(1-e^{-2y(\sigma+t)}), & -\sigma\le t\le 0,\\ \phi(\,t\,)\,(1-e^{-2y(\sigma-t)}), & 0<t\le\sigma,\\ 0, & t\notin[-\sigma,\sigma],\end{cases}$$

в которой $\phi(t)=t^n(2\sigma-t)^{-n}$. Аналогично (2.19) можно получить представление функции $\widehat{v}$:

$$\widehat{v}(x)=\pi^{-1}x^{-2}\Bigg(v'(\sigma)\cos xt-v'(0)-\int\limits_0^\sigma v''(t)\cos xt\,dt\Bigg),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, для $x\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{v}(z)|\le\pi^{-1}\min\left\{M_1,\,x^{-2}M_2\right\},$$

где

$$M_1=\|v\|_{L^1(0,\sigma)}\le(1-e^{-2y\sigma})\sigma,$$

$$M_2=|v'(\sigma)|+|v'(0)|+\|v''\|_{L^1(0,\sigma)}\le(2n(n-1)+8n\sigma^{-1})(1-e^{-2y\sigma})+(8n+4)y+4\sigma^{-1}y^2.$$

Откуда получим оценку
$$\|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})} \le 4\pi^{-1}\sqrt{M_1 M_2},$$
в которой правая часть (и, следовательно, правая часть (3.6)) стремится к нулю при $y \to +0$.

Для второго слагаемого в (3.5) стремление к нулю при $y \to +0$ следует из определения пространства $H^p$. Точнее, по утверждению (c) леммы 2 если $f \in H^p$, то $A_0 f \in H^p$, а тогда и функция $f - A_0 f \in H^p$ и, следовательно,

$$\lim_{y\to+0} \|f - A_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|f - A_0 f\|_{H^p}.$$

Используя (3.4) и (3.1), для произвольной функции $f \in H^p_n$ получим оценку сверху

$$\|f - A_0 f\|_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Оценку снизу можно получить аналогично оценке снизу в теореме 3, используя функции $f_\sigma$ и $f_{\sigma,h}$, а именно:
$$\sup_{f\in H^\infty_n} \|f - A_0 f\|_{H^\infty} \ge \|f_\sigma - A_0 f_\sigma\|_{H^\infty} = \|f_\sigma\|_{H^\infty} = \sigma^{-n},$$

$$\sup_{f\in H^p_n} \|f - A_0 f\|_{H^p} \ge \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h} - A_0 f_{\sigma,h}\|_{H^p}}{\|f^{(n)}_{\sigma,h}\|_{H^p}} = \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h}\|_{H^p}}{\|f^{(n)}_{\sigma,h}\|_{H^p}} = \sigma^{-n}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Следствие 1 доказано. □

**Следствие 2.** *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы неравенства*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H^p_n)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}, \quad y > 0, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{H^p} \le \sigma^{-n}. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По утверждению (c) леммы 2 если $f \in H^p$, то $Af \in E^p_\sigma$, и тогда из теоремы 3 для произвольной функции $f \in H^p_n$ вытекает неравенство

$$\widetilde{e}_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma},$$

а из следствия 1 — неравенство

$$e_\sigma(f)_{H^p} \le \|f - A_0 f\|_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Откуда следуют (3.7) и (3.8) соответственно.

## 4. Оценка снизу

В этом разделе будет получена оценка снизу величины (1.4) и доказаны теоремы 1 и 2.

**Лемма 7.** *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\ y > 0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau$ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\sigma < \tau$, и число $\delta$ задается равенством $\delta = (\tau - \sigma)/2$. Рассмотрим функцию $g = g_{\tau,\delta,y}$, определяемую равенством

$$g(t) = e^{yt} \begin{cases} (t + \delta - \tau)\delta^{-1}, & t \in [\tau - \delta, \tau], \\ (\tau + \delta - t)\delta^{-1}, & t \in (\tau, \tau + \delta], \\ 0, & t \notin [\tau - \delta, \tau + \delta]. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f \in H^p$, $1 \le p \le \infty$, справедливо (точное) неравенство

$$\|\widehat{g} * f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} \|f\|_{H^p}, \tag{4.2}$$

в котором преобразование Фурье $\widehat{g}$ функции $g$ имеет представление

$$\widehat{g}(x+iy) = 2\, e^{i\tau x}\, \frac{1-\cos\delta x}{\delta\, x^2}.$$

Откуда следует равенство

$$\|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x+iy)\, e^{-i\tau x} dx = g(\tau)\, e^{-y\tau} = 1.$$

Кроме того, так как носителем функции $g$ является отрезок $[\tau-\delta, \tau+\delta]$, не пересекающийся с отрезком $[-\sigma, \sigma]$, то для любой функции $q \in E_\sigma$ справедливо тождество $\widehat{g} * q \equiv 0$.

Убедимся, что в случае $p = \infty$ для функции $f_\tau(z) = \tau^{-n}\, e^{i\tau z}$ элементом наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа $\sigma$ при любом $\tau > \sigma$ является нуль. Для произвольной функции $f$ из $H^\infty$ вида $f(z) = e^{i\tau z} - q(z)$, где $q \in E_\sigma$, имеет место равенство

$$(\widehat{g} * f)(z) = e^{i\tau z}. \tag{4.3}$$

Используя неравенство (4.2) и равенство (4.3), для произвольной функции $q \in E_\sigma$ получим соотношения

$$\|f_\tau - q\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \|\widehat{g} * (f_\tau - q)\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \|f_\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \tau^{-n}\, e^{-y\tau}.$$

Следовательно, $e_\sigma(f_\tau)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \tau^{-n}\, e^{-y\tau}$, что влечет оценку снизу:

$$\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{\tau\to\sigma+0} e_\sigma(f_\tau)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \lim_{\tau\to\sigma+0} \tau^{-n}\, e^{-y\tau} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Для обоснования (4.1) при $1 \le p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\tau,h}(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{\tau}^{\tau+h} \varphi\left(\frac{t-\tau}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\tau z} \int\limits_0^1 \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt,$$

где $\varphi$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $[0,1]$. Для любой функции $f \in H^p$ вида $f = f_{\tau,h} - q$, где $q \in E_\sigma$, имеет место равенство

$$\widehat{g} * f = \widehat{g} * f_{\tau,h}.$$

Откуда, используя неравенство (4.2), получаем

$$e(f_{\tau,h})_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf_{q\in E_\sigma} \|f_{\tau,h} - q\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \inf_{q\in E_\sigma} \|\widehat{g} * (f_{\tau,h} - q)\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|\widehat{g} * f_{\tau,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

Имеют место представления:

$$\left(\widehat{g} * f_{\tau,h}\right)(z) = e^{i\tau z} \int\limits_0^1 \varphi(u) \left(1 - \frac{uh}{\delta}\right) e^{izuh}\, du = e^{i\tau z} \left(f_{0,1}(hz) + \frac{ih}{\delta} f'_{0,1}(hz)\right),$$

$$f^{(n)}_{\tau,h}(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{\tau}^{\tau+h} (it)^n \varphi\left(\frac{t-\tau}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\tau z}\left((i\tau)^n f_{0,1}(hz) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k h^k (i\tau)^{n-k} f^{(k)}_{0,1}(hz)\right).$$

Используя эти представления, для произвольных $1 \le p < \infty$ и $\tau > \sigma$ приходим к неравенствам

$$\mathcal{E}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{h\to+0} \frac{e(f_{\tau,h})_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f_{\tau,h}^{(n)}\|_{H^p}}$$

$$\ge \lim_{h\to+0} \frac{e^{-\tau y}\left(\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)} - h\,\delta^{-1}\,\|f'_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}\right)}{\tau^n\,\|f_{0,1}\|_{H^p} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\,\tau^{n-k}\,h^k\,\|f_{0,1}^{(k)}\|_{H^p}} = \tau^{-n}\,e^{-y\tau}. \tag{4.4}$$

Переходя в (4.4) к пределу при $\tau \to \sigma + 0$, получим оценку (4.1). □

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1 и 2. Неравенство (3.7) следствия 2 и неравенство (4.1) леммы 7 дают цепочку неравенств

$$\sigma^{-n}\,e^{-y\sigma} \le \mathcal{E}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \widetilde{\mathcal{E}}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\,e^{-y\sigma},$$

откуда следует равенство (1.5) теоремы 2. Соответственно, неравенство (3.8) следствия 2 и неравенство (4.1) леммы 7 дают для произвольного $y > 0$ цепочку неравенств

$$\sigma^{-n}\,e^{-y\sigma} \le \widetilde{\mathcal{E}}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathcal{E}(H_n^p)_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Отсюда следует равенство (1.3) теоремы 1. □

Автор выражает благодарность профессору В. В. Арестову за полезные обсуждения и замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. **Ибрагимов И.И.** Теория приближения целыми функциями. Баку: ЭЛМ, 1979. 465 с.
3. **Бабенко К.И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 22, № 55. С. 631–640.
4. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.
5. **Кусис П.** Введение в теорию пространств $H^p$. М.: Мир, 1984. 368 с.
6. **Свешников А.Г., Тихонов А.Н.** Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. 304 с.

Акопян Роман Размикович
Поступила 11.01.2010
канд. физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Озёрский технологический институт НИЯУ МИФИ
e-mail: R.Akopyan@vm.oti.ru