Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Р. Р. Салимов, Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева, *Алгебра и анализ*, 2014, том 26, выпуск 6, 143–171

https://www.mathnet.ru/aa1411

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
15 января 2026 г., 05:51:10

Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №6

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ p-МОДУЛЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ КЛАССА СОБОЛЕВА

© Р. Р. САЛИМОВ

В статье изучаются гомеоморфизмы с конечным искажением на плоскости с использованием модульной техники. На этой основе решена проблема, восходящая к М. А. Лаврентьеву (см. [1]), об оценке площади образа круга при таких отображениях и исследовано их асимптотическое поведение в точке. Найдено достаточное условие конечной липшицевости.

§1. Введение

В настоящей статье исследуются отображения, удовлетворяющие определенным нижним модульным оценкам, теория которых применима к отображениям класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с конечным искажением. Здесь мы ограничимся только плоским случаем.

Напомним некоторые определения. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. Непрерывное отображение γ открытого подмножества Δ действительной оси $\mathbb{R}$ или окружности в D называется *штриховой линией* (см., например, [2, п. 6.3]). Напомним, что любое открытое множество Δ в $\mathbb{R}$ состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает мотивировку для термина ,,штриховая линия“.

Пусть задано семейство Γ штриховых линий γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz| \ \geqslant\ 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$.

Ключевые слова: p-модуль, p-емкость, отображения с конечным искажением, конечная липшицевость.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\, dm(z). \tag{2}$$

Говорят, что свойство P имеет место для *p-п.в.* (почти всех) $\gamma \in \Gamma$, если подсемейство всех линий в Γ, для которых P не верно, имеет нулевой p-модуль (ср. [3]). Также говорят, что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для Γ, пишут $\rho \in \operatorname{ext_p} \operatorname{adm}\Gamma$, если (1) имеет место для p-п.в. $\gamma \in \Gamma$ (см., например, [2, п. 9.2]).

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., например, [4]). Для заданных областей D и D' в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, и измеримой функции $Q : D \to (0, \infty)$, говорят, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* z_0, если

$$\mathcal{M}_p(f\Sigma) \;\geqslant\; \inf_{\rho \in \operatorname{ext_p} \operatorname{adm}\Sigma(z_0, r_1, r_2)} \int\limits_{R} \frac{\rho^p(z)}{Q(z)}\, dm(z) \tag{3}$$

для каждого кольца

$$R = R(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < d_0, \tag{4}$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $\Sigma = \Sigma(z_0, r_1, r_2)$ обозначает семейство, всех окружностей $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |\, z - z_0| = r\}$, $r \in (r_1, r_2)$.

Исторически нижним Q-гомеоморфизмам относительно p-модуля предшествовали Q-гомеоморфизмы, которые исследовались в работах [5–8]. Кроме того, Q-отображения, допускающие точки ветвления, изучались в работах [9–13].

Развиваемая в работе теория нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям квазиконформным в среднем (см. [14, 15]), и к так называемым (p, q)-квазиконформным отображениям (см. [16]), которые использовались при изучении проблемы Ю. Решетняка о суперпозиции функций пространств Соболева (см., например, [17–19]).

В работах [20–22] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением. Также теория нижних Q-гомеоморфизмов применима к отображениям с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при наличии условия Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n - 1$ (см. [23–25]).

§2. О емкости конденсатора

Следуя работе [26], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $\mathfrak{R} = A \setminus C$ — кольцо, т.е. если $\mathfrak{R}$ — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{R}$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Обозначим $\mathcal{C}_0(A)$ через множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL, и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}. \tag{5}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(z) \tag{6}$$

называют *p-емкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. В дальнейшем мы будем использовать равенство

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \mathcal{M}_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{7}$$

где для множеств $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}$ в $\mathbb{C}$, $\Delta(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2; \mathcal{F})$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ в $\mathcal{F}$ (см. [27] и [28, 29]). Емкости в контексте теории отображений хорошо представлены в монографии [30].

При $1 < p \leqslant 2$ имеет место оценка

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} \geqslant \gamma_p \frac{d(C)^p}{m(A)^{p-1}} \ , \tag{8}$$

где $d(C)$ — диаметр компакта C, $m(A)$ — мера Лебега множества A, γ_p — положительная константа, зависящая только от p (см. [15, предложение 6]).

Известно, что при $1 < p < 2$

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} \geqslant 2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{2-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{2-p}{2}} \tag{9}$$

(см., например, [31, п. 1.4]).

Известно, что при $p \geqslant 1$

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} \geqslant \frac{[\inf l(\sigma)]^p}{[m(A \setminus C)]^{p-1}}\,, \tag{10}$$

где $l(\sigma)$ — длина кривой, где σ — гладкая (бесконечно дифференцируемая) кривая, которая является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ (см. [15, предложение 5]).

§3. Критерий для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля

В дальнейшем мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ и $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [32, с. 6]).

Пусть (X, μ) — измеримое пространство с конечной мерой μ и пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Для любого измеримого множества $E \subset X$ обозначим

$$\fint_E \varphi(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi(x)\, d\mu(x)\,. \tag{11}$$

Прежде чем доказывать основную лемму о нижних Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля, приведем вспомогательную лемму 2.1 из работы [33] (см. [2, лемма 9.2]).

Лемма 1. *Пусть (X, μ) — измеримое пространство с конечной мерой μ, $q \in (1, \infty)$, и пусть $\varphi : X \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Положим*

$$I(\varphi, q) = \inf_{\alpha} \int_X \varphi\, \alpha^q\, d\mu\,, \tag{12}$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям $\alpha : X \to [0, \infty]$ таким, что

$$\int_X \alpha\, d\mu = 1\,. \tag{13}$$

Тогда

$$I(\varphi, q) = \left[\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu\right]^{-\frac{1}{\lambda}}, \tag{14}$$

где

$$\lambda = \frac{q'}{q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \tag{15}$$

т.е. $\lambda = 1/(q-1) \in (0, \infty)$. *Кроме того, инфимум в* (12) *достигается только для функции*

$$\alpha_0 = \gamma \cdot \varphi^{-\lambda}, \tag{16}$$

где

$$\gamma = \left(\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu\right)^{-1}. \tag{17}$$

Ниже приведен критерий того, что гомеоморфизм в $\mathbb{C}$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке.

Лемма 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, и пусть $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке z_0 относительно p-модуля при $p > 1$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{M}_p(f\Sigma) \geqslant \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)}, \tag{18}$$

для всех $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}(\mathrm{z}_0, \partial \mathrm{D})$, *где*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) = \left(\int\limits_{C(z_0, r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z)\, |dz|\right)^{p-1}, \tag{19}$$

$\Sigma = \Sigma(z_0, r_1, r_2)$ — *семейство всех окружностей* $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $r \in (r_1, r_2)$. *Инфимум в* (3) *достигается только для функции*

$$\rho_0(z) = \frac{Q(z)}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, |z - z_0|)}. \tag{20}$$

Доказательство. Для любой функции $\rho(z) \in \mathrm{ext_p adm}\, \Sigma(z_0, r_1, r_2)$ следующая величина

$$A_\rho(r) := \int\limits_{C(z_0, r)} \rho(z)\, |dz| \neq 0 \text{ п.в.} \tag{21}$$

и является измеримой по параметру r, например, по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать равенство $A_\rho(r) \equiv 1$ п.в. вместо условия допустимости (1), и

$$\inf_{\rho\in \mathrm{ext_p\,adm}\Sigma} \int\limits_{R(z_0,r_1,r_2)} \frac{\rho^p(z)}{Q(z)}\,dm(z) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\inf_{\alpha\in\mathfrak{I}(r)} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{\alpha^p(z)}{Q(z)}\,|dz| \right) dr, \qquad (22)$$

где $\mathfrak{I}(r)$ — множество всех измеримых функций $\alpha(z)$ на окружности $C(z_0,r)$ таких, что

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \alpha(z)\,|dz| = 1. \qquad (23)$$

Итак, лемма 2 следует из леммы 1 при $X = C(z_0,r)$, μ — длина на $C(z_0,r)$, $\varphi = \frac{1}{Q}|_{C(z_0,r)}$.

Таким образом, неравенство (18) является точным для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля. Лемма доказана. □

Неравенство (18) можно переписать в несколько ином виде, который иногда будет более удобен для дальнейших исследований.

Лемма 3. *Пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ относительно p-модуля при $p > 1$, тогда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$*

$$\mathcal{M}_{p'}\left(f\left(\Delta(C_1,C_2,D)\right)\right) \leqslant \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0,r)} \right)^{-\frac{1}{p-1}}, \qquad (24)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0,r) = \left(\int\limits_{C(z_0,r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z)\,|dz| \right)^{p-1}. \qquad (25)$$

Доказательство. Действительно, пусть $0 < r_1 < r_2 < d(z_0,\partial D)$ и $C_i = C(z_0,r_i)$, $i = 1,2$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера (см., например, [27] и [34])

$$\mathcal{M}_{p'}\left(f\left(\Delta(C_1,C_2,D)\right)\right) \leqslant \frac{1}{\mathcal{M}_p^{\frac{1}{p-1}}\left(f\left(\Sigma(z_0,r_1,r_2)\right)\right)}, \qquad (26)$$

поскольку $f\left(\Sigma(z_0,r_1,r_2)\right) \subset \Sigma\left(f(C_1), f(C_2), f(D)\right)$, где $\Sigma(z_0,r_1,r_2)$ обозначает совокупность всех окружностей с центром в точке z_0, расположенных между окружностями C_1 и C_2, а $\Sigma\left(f(C_1), f(C_2), f(D)\right)$ состоит из

всех кривых в $f(D)$, отделяющих $f(C_1)$ и $f(C_2)$. Из соотношения (26) по лемме 3 получаем, что

$$\mathcal{M}_{p'}\left(f\left(\Delta(C_1, C_2, D)\right)\right) \leqslant \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)}\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{27}$$

□

Лемма 4. *Пусть $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция такая, что $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq 0$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ относительно p-модуля при $p > 1$. Полагаем*

$$\eta_0(t) = 1/I \cdot \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t), \tag{28}$$

где

$$I = I(z_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)}. \tag{29}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^{-\frac{1}{p-1}} &= \int\limits_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta_0^{p'}\left(|z - z_0|\right) dm(z) \\ &\leqslant \int\limits_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta^{p'}\left(|z - z_0|\right) dm(z) \end{aligned} \tag{30}$$

для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \tag{31}$$

Доказательство. Если $I = \infty$, то левая часть соотношения (30) равна нулю, и неравенство в этом случае очевидно. Если $I = 0$, то $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) = \infty$ для п.в. $r \in (r_1, r_2)$, и обе части неравенства (30) равны бесконечности по теореме Фубини. Пусть теперь $0 < I < \infty$. Тогда $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq 0$ и $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в (r_1, r_2). Полагая

$$\alpha(r) = \eta(r) \cdot \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \tag{32}$$

и

$$\omega(r) = [\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)]^{-1}, \tag{33}$$

по стандартным соглашениям будем иметь, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ п.в. в (r_1, r_2) и что

$$C := \int\limits_R Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta^{p'}\left(|z - z_0|\right)\ dm(z) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^{p'}(r)\omega(r)\ dr. \tag{34}$$

Применяя неравенство Иенсена с весом (см. [35, теорема 2.6.2]) к выпуклой функции $\varphi(t) = t^{p'}$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I}\int\limits_E \omega(r)\ dr, \tag{35}$$

получаем, что

$$\left(\fint \alpha^{p'}(r)\omega(r)dr\right)^{\frac{1}{p'}} \geqslant \fint \alpha(r)\omega(r)\ dr = \frac{1}{I}, \tag{36}$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (31). Таким образом,

$$C \geqslant I^{-\frac{1}{p-1}}, \tag{37}$$

что и доказывает неравенство (30). □

Комбинируя леммы 3 и 4, получаем следующее заключение.

Лемма 5. *Пусть $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция такая, что $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq 0$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ относительно p-модуля при $p > 1$, тогда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0$*

$$\mathcal{M}_{p'}\left(f\left(\Delta(C_1, C_2, D)\right)\right) \leqslant \int\limits_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta^{p'}\left(|z - z_0|\right) dm(z) \tag{38}$$

для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (31).

Лемма 6. *Пусть $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция такая, что $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq 0$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ относительно p-модуля при $p > 1$. Тогда для любого кондесатора $\mathcal{E} = \left(B(z_0, r_2), \overline{B(z_0, r_1)}\right)$, где $0 < r_1 < r_2 < d_0$, имеем*

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E} \leqslant \int\limits_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta^{p'}\left(|z - z_0|\right) dm(z) \tag{39}$$

для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, *удовлетворяющей условию* (31).

Доказательство. Рассмотрим кольцевой конденсатор

$$\mathcal{E} = \left(B(z_0, r_2), \overline{B(z_0, r_1)}\right) \tag{40}$$

с $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и кольцо

$$R = R(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}. \tag{41}$$

Тогда $f\mathcal{E} = \left(fB\left(z_0, r_2\right), \overline{fB\left(z_0, r_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D', и согласно (7) имеем равенство

$$\operatorname{cap}_{p'}\left(fB(z_0, r_2), \overline{fB(z_0, r_1)}\right) = \mathcal{M}_{p'}(\triangle(\partial fB(z_0, r_2), \partial fB(z_0, r_1); fR), \tag{42}$$

а ввиду гомеоморфности f равенство

$$\triangle\left(\partial fB\left(z_0, r_2\right), \partial fB\left(z_0, r_1\right); fR\right) = f\left(\triangle\left(\partial B(z_0, r_2), \partial B(z_0, r_1); R\right)\right).$$

Из леммы 5 вытекает оценка (39). □

§4. Дифференцируемость почти всюду

Теорема 1. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{C}$ *и* $f : D \to D'$ *— нижний* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля при* $p \geqslant 2$ *с* $Q(z) \in \mathrm{L}^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{loc}}(D)$. *Тогда гомеоморфизм* f *является дифференцируемым почти всюду в* D.

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств $\mathfrak{B}$ в D, $\Phi(\mathfrak{B}) = m(f(\mathfrak{B}))$. По теореме о дифференцируемости неотрицательных субаддитивных функций множеств (см., например, [36, III.2.4]) существует конечный предел для п.в. $z \in D$

$$\varphi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi\left(B(z, \varepsilon)\right)}{m\left(B(z, \varepsilon)\right)}, \tag{43}$$

где $B(z, \varepsilon)$ — круг в $\mathbb{C}$ с центром в точке $z \in D$ радиуса $\varepsilon > 0$. Величина $\varphi(z)$ называется *объемной производной* отображения f в точке z.

Пусть z и $\zeta \in D$, полагаем

$$L(z, f) = \limsup_{\zeta \to z} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}. \tag{44}$$

По теореме Радемахера–Степанова (см., например, [32, с. 311]) доказательство теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 7. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля с $Q \in \mathrm{L}^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда при $p \geqslant 2$*

$$L(z, f) \leqslant \gamma_p \ \varphi^{\frac{1}{p}}(z) \ Q^{\frac{1}{p}}(z) \ \text{для п.в. } z \in D, \tag{45}$$

где константа γ_p зависит только от p.

Доказательство. Рассмотрим кольцевой конденсатор

$$\mathcal{E} = \big(B(z, r_2), \overline{B(z, r_1)}\big) \tag{46}$$

с $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и кольцо $R = R(z, r_1, r_2) = \{\zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta - z| < r_2\}$.

Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_2 - r_1}, & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_1, r_2), \end{cases} \tag{47}$$

удовлетворяет условию (31). Тогда в силу леммы 6 имеем

$$\mathrm{cap}_{p'} \ f\mathcal{E} \leqslant (r_2 - r_1)^{-p'} \int\limits_{R(z, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta) \ dm(\zeta). \tag{48}$$

Далее, выбирая в (48) $r_1 = \varepsilon$ и $r_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\mathrm{cap}_{p'}\big(fB(z, 2\varepsilon), \overline{fB(z, \varepsilon)}\big) \leqslant \varepsilon^{-p'} \int\limits_{B(z, 2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta) \, dm(\zeta). \tag{49}$$

С другой стороны, в силу (8) получаем

$$\mathrm{cap}_{p'}\big(fB(z, 2\varepsilon), \overline{fB(z, \varepsilon)}\big) \geqslant \Big(C_p \frac{d^p(\overline{fB(z, \varepsilon)})}{m(fB(z, 2\varepsilon))}\Big)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{50}$$

где C_p — константа, зависящая только от p, $d(A)$ — диаметр, а $m(A)$ — мера лебега множества A в $\mathbb{C}$.

Комбинируя (49) и (50), получим, что

$$\frac{d(\overline{fB(z, \varepsilon)})}{\varepsilon} \leqslant \gamma_p \Big(\frac{m(fB(z, 2\varepsilon))}{m(B(z, 2\varepsilon))}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\fint_{B(z, 2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta) \, dm(\zeta)\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

и, следовательно, п.в.

$$L(z, f) \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d(fB(z, \varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant \gamma_p \, \varphi^{\frac{1}{p}}(z) \cdot Q^{\frac{1}{p}}(z) < \infty.$$

□

§5. Конечная липшицевость

В этом параграфе установлен аналог теоремы Геринга о липшицевости для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля (см., например, [39, теорема 2]).

Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является *конечно липшицевым*, если

$$L(z, f) = \limsup_{\zeta \to z} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} < \infty \tag{51}$$

для всех $z \in D$. Очевидно, что каждое липшицево отображение является конечно липшицевым.

Ниже приведена лемма о достаточном условии локальной липшицевости в точке для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > 2$.

Лемма 8. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция в степени $\frac{1}{p-1}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $z_0 \in D$ с условием*

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\fint_{B(z_0, \varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta) \right)^{p-1} < \infty. \tag{52}$$

Тогда при $p > 2$ имеем

$$L(z_0, f) = \limsup_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leqslant \lambda_p\, Q_0^{\frac{1}{p-2}}, \tag{53}$$

где λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Рассмотрим кольцевой конденсатор

$$\mathcal{E} = \left(B(z_0, r_2), \overline{B(z_0, r_1)}\right)$$

с $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и кольцо $R = R(z_0, r_1, r_2) = \{\zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta - z_0| < r_2\}$.

Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_2 - r_1}, & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_1, r_2), \end{cases}$$

удовлетворяет условию (31). Тогда из леммы 6 вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E} \leqslant (r_2 - r_1)^{-p'} \int\limits_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta). \tag{54}$$

Далее, выбирая $r_1 = 2\varepsilon$ и $r_2 = 4\varepsilon$, имеем

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0,4\varepsilon),\overline{fB(z_0,2\varepsilon)}\big) \leqslant (2\varepsilon)^{-p'} \int\limits_{B(z_0,4\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta). \tag{55}$$

С другой стороны, в силу (9) справедлива оценка

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0,4\varepsilon),\overline{fB(z_0,2\varepsilon)}\big) \geqslant C_p\,[m(fB(z_0,2\varepsilon))]^{\frac{p-2}{2(p-1)}}, \tag{56}$$

где C_p — положительная константа, зависящая только от p.

Комбинируя (55) и (56), получаем, что

$$\frac{m(fB(z_0,2\varepsilon))}{m(B(z_0,2\varepsilon))} \leqslant c_p\left[\fint_{B(z_0,4\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right]^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \tag{57}$$

где c_p — положительная постоянная, зависящая только от p.

Далее, выбирая в (54) $r_1 = \varepsilon$ и $r_2 = 2\varepsilon$, будем иметь

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0,2\varepsilon),\overline{fB(z_0,\varepsilon)}\big) \leqslant \varepsilon^{-p'} \int\limits_{B(z_0,2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta). \tag{58}$$

С другой стороны, в силу неравенства (8) получаем

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0,2\varepsilon),\overline{fB(z_0,\varepsilon)}\big) \geqslant \widetilde{C}_p\Big(\frac{d^p(\overline{fB(z_0,\varepsilon)})}{m(fB(z_0,2\varepsilon))}\Big)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{59}$$

где $\widetilde{C}_p$ — положительная константа, зависящая только от p.

Комбинируя (58) и (59), находим

$$\frac{d(\overline{fB(z_0,\varepsilon)})}{\varepsilon} \leqslant \gamma_p\left(\frac{m(fB(z_0,2\varepsilon))}{m(B(z_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{p(p-1)}}\left(\fint_{B(z_0,2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

где γ_p — положительная константа, зависящая только от p.

Эта оценка вместе с (57) дает неравенство

$$\frac{d(\overline{fB(z_0,\varepsilon)})}{\varepsilon} \leqslant \lambda_p\left(\fint_{B(z_0,4\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right)^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}}\left[\fint_{B(z_0,2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

При переходе к верхнему пределу при $\varepsilon \to 0$ немедленно вытекает заключение леммы

$$L(z_0,f) = \limsup_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\overline{fB(z_0,\varepsilon)})}{\varepsilon} \leqslant \lambda_p\,Q_0^{\frac{1}{p-2}},$$

где λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p. $\square$

Теорема 2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция в степени $\frac{1}{p-1}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля D с условием*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z)\, dm(z) < \infty \quad \forall z_0 \in D. \tag{60}$$

Тогда при $p > 2$ гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Замечание. В соответствии с леммой 10.6 в [2] конечно липшицевые отображения обладают N-свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых.

Следствие 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля D с условием $Q(z) \leqslant K$ для п.в. $z \in D$. Тогда при $p > 2$*

$$L(z_0, f) = \limsup_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leqslant \lambda_p K^{\frac{1}{p-2}} \quad \forall z_0 \in D, \tag{61}$$

где λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p, другими словами гомеоморфизм f является локально липшицевым.

§6. Гёльдеровость нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля

Теорема 3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > 2$ и $Q(z) \in L_s(B_0)$, $B_0 = B\left(z_0, \frac{1}{4}\mathrm{dist}(z_0, \partial D)\right)$, $s > \frac{2}{p-2}$. Тогда*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \lambda_p \|Q\|_s^{\frac{1}{p-2}} |z - z_0|^{1 - \frac{2}{s(p-2)}} \tag{62}$$

для всех $z \in B_0$ и $\|Q\|_s = \left(\int\limits_{B_0} Q^s(\zeta)\, dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{s}}$ — норма в пространстве $L_s(B_0)$, λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Рассмотрим кольцевой конденсатор

$$\mathcal{E} = \left(B(z_0, r_2), \overline{B(z_0, r_1)}\right)$$

с $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и кольцо $R = R(z_0, r_1, r_2) = \{\zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta - z_0| < r_2\}$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_2 - r_1}, & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_1, r_2), \end{cases}$$

удовлетворяет условию (31). Тогда из леммы 6 следует оценка

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E} \leqslant (r_2 - r_1)^{-p'} \int\limits_{R(z_0,r_1,r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta). \tag{63}$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E} \leqslant \frac{\left(\pi r_2^2\right)^{\frac{sp-s-1}{s(p-1)}}}{(r_2 - r_1)^{p'}} \|Q\|_s^{\frac{1}{p-1}}, \tag{64}$$

где $\|Q\|_s = \Big(\int\limits_{B_0} Q^s(\zeta)\, dm(\zeta)\Big)^{\frac{1}{s}}$.

Далее, выбирая $\varepsilon = |z - z_0|$, $r_1 = 2\varepsilon$ и $r_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0, 4\varepsilon), \overline{fB(z_0, 2\varepsilon)}\big) \leqslant \gamma_1 \|Q\|_s^{\frac{1}{p-1}} \cdot \varepsilon^{\frac{ps-2s-2}{s(p-1)}}, \tag{65}$$

где γ_1 — положительная константа, зависящая только от p.

С другой стороны, в силу неравенства (9) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0, 4\varepsilon), \overline{fB(z_0, 2\varepsilon)}\big) \geqslant \gamma_2 \left[m(\overline{fB(z_0, 2\varepsilon)})\right]^{\frac{p-2}{2(p-1)}}, \tag{66}$$

где γ_2 — положительная константа, зависящая только от p.

Комбинируя (65) и (66), получаем, что

$$m(fB(z_0, 2\varepsilon)) \leqslant \gamma_3 \|Q\|_s^{\frac{2}{p-2}} \varepsilon^{\frac{2(ps-2s-2)}{s(p-2)}}, \tag{67}$$

где γ_3 — положительная постоянная, зависящая только от p.

Далее, выбирая в (64) $r_1 = \varepsilon$ и $r_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0, 2\varepsilon), \overline{fB(z_0, \varepsilon)}\big) \leqslant \gamma_4 \|Q\|_s^{\frac{1}{p-1}} \cdot \varepsilon^{\frac{ps-2s-2}{s(p-1)}}. \tag{68}$$

С другой стороны, из неравенства (8) следует

$$\operatorname{cap}_{p'}\big(fB(z_0, 2\varepsilon), \overline{fB(z_0, \varepsilon)}\big) \geqslant \left(\gamma_5 \frac{d^p(\overline{fB(z_0, \varepsilon)})}{m(fB(z_0, 2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{69}$$

где γ_5 — положительная константа, зависящая только от p.

Комбинируя (67), (68) и (69), будем иметь

$$d(\overline{fB(z_0, \varepsilon)}) \leqslant \gamma_p \|Q\|_s^{\frac{1}{p-2}} \varepsilon^{1-\frac{2}{s(p-2)}},$$

где γ_p — положительная константа, зависящая только от p. Оценка (62) получается отсюда и из очевидного неравенства

$$d(\overline{fB(z_0, \varepsilon)}) \geqslant |f(z) - f(z_0)|.$$

□

§7. О логарифмической гёльдеровости

Лемма 9. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля D при $p > 2$ с условием*

$$\int\limits_{R(z_0,r_1,r_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta)}{|\zeta - z_0|^{p'}} \leqslant C_{z_0} \cdot \ln^{\kappa}\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad \kappa < p', \tag{70}$$

для любых $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда при $p > 2$ имеем

$$\operatorname{cap}_{p'}\left(fB(z_0,r_2), \overline{fB(z_0,r_1)}\right) \leqslant C_{z_0} \cdot \ln^{\kappa - p'}\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \tag{71}$$

Доказательство. Рассмотрим кольцевой конденсатор

$$\mathcal{E} = \left(B(z_0,r_2), \overline{B(z_0,r_1)}\right)$$

с $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и кольцо $R = R(z_0,r_1,r_2) = \{\zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta - z_0| < r_2\}$.

Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\ln(\frac{r_2}{r_1})}, & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_1, r_2), \end{cases}$$

удовлетворяет условию (31). Тогда в силу леммы 6 имеем

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E} \leqslant \ln^{-p'}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \int\limits_{R(z_0,r_1,r_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\ dm(\zeta)}{|z - z_0|^{p'}}. \tag{72}$$

Учитывая условие (70), получаем оценку для p'-емкости (71). □

Теорема 4. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > 2$ с условием*

$$\int\limits_{R(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta)}{|\zeta - z_0|^{p'}} \leqslant C_{z_0} \cdot \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad \kappa < p', \tag{73}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда имеем

$$m(fB(z_0,\varepsilon)) \leqslant \lambda_0 C_{z_0}^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \ln^{-\frac{2(\kappa+p-\kappa p)}{p-2}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{74}$$

для всех $\varepsilon < \delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^2(z_0, \partial D)\}$, где $\lambda_0 = \lambda(p,\kappa)$ — положительная постоянная, зависящая только от p и κ.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \big(B(x_0, \sqrt{\varepsilon}), \overline{B(x_0, \varepsilon)}\big).$$

Из леммы 9 вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant 2^{p-\kappa} C_{z_0} \cdot \ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{75}$$

Используя соотношение (9), имеем

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \gamma_p \left[m(\overline{fB(z_0, \varepsilon)})\right]^{\frac{p-2}{2(p-1)}}, \tag{76}$$

где γ_p — константа, зависящая только от p. Комбинируя (75) и (76), получаем, что

$$m(fB(z_0, \varepsilon)) \leqslant \lambda_0 C_{z_0}^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \ln^{-\frac{2(\kappa+p-\kappa p)}{p-2}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{77}$$

где $\lambda_0 = \lambda(p, \kappa)$ — положительная постоянная, зависящая только от p и κ. □

Теорема 5. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля D при $p > 2$ с условием*

$$\int\limits_{R(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta)}{|\zeta - z_0|^{p'}} \leqslant C_{z_0} \cdot \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad \kappa < p', \tag{78}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \lambda_0 C_{z_0}^{\frac{p-1}{p-2}} \ln^{-\frac{\kappa+p-\kappa p}{p-2}} \frac{1}{|z - z_0|} \tag{79}$$

для всех $z \in B(z_0, \delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(z_0, \partial D)\}$ и $\lambda_0 = \lambda(p, \kappa)$ — положительная постоянная, зависящая только от p и κ.

Доказательство. Полагаем $\varepsilon = |z - z_0| < \delta_0$. Рассмотрим конденсатор

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \big(B(z_0, \sqrt{\varepsilon}), \overline{B(z_0, \varepsilon)}\big).$$

В силу (71) имеем оценку

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant 2^{p'-\kappa} C_{z_0} \cdot \ln^{\kappa-p'}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{80}$$

С другой стороны, согласно неравенству (8) получаем

$$\operatorname{cap}_{p'} f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant C_p \left(\frac{d^p(\overline{fB(z_0, \varepsilon)})}{m(fB(z_0, \sqrt{\varepsilon}))}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{81}$$

где C_p — положительная константа, зависящая только от p.

Из (80) и (81) следует, что

$$d(\overline{fB(z_0,\varepsilon)}) \leqslant \lambda_{p,\kappa}\cdot C_{z_0}^{\frac{p-1}{p}}\cdot \ln^{-\frac{\kappa+p-\kappa p}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) m^{\frac{1}{p}}(fB(z_0,\sqrt{\varepsilon})). \tag{82}$$

В силу теоремы 4 имеем оценку для площади образа круга $B(z_0,\sqrt{\varepsilon})$

$$m(fB(z_0,\sqrt{\varepsilon})) \leqslant \gamma_0 C_{z_0}^{\frac{2(p-1)}{p-2}}\ \ln^{-\frac{2(\kappa+p-\kappa p)}{p-2}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{83}$$

Наконец, комбинируя (82) и (83), получаем

$$|f(z)-f(z_0)| \leqslant d(\overline{fB(z_0,\varepsilon)}) \leqslant \lambda_0 C_{z_0}^{\frac{p-1}{p-2}}\ \ln^{-\frac{\kappa+p-\kappa p}{p-2}}\ \frac{1}{\varepsilon}.$$

□

Следствие 2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f: D\to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p>2$ с $Q(z)\in L_{\frac{2}{p-2}}(B(z_0,\delta_0))$. Тогда имеем*

$$|f(z)-f(z_0)| \leqslant \lambda_p \|Q\|_{\frac{2}{p-2}}^{\frac{1}{p-1}}\ \ln^{-\frac{p}{2(p-2)}}\ \frac{1}{|z-z_0|} \tag{84}$$

для всех $z\in B(z_0,\delta_0)$, где $\delta_0\leqslant \min\{1,\operatorname{dist}^4(z_0,\partial D)\}$ и

$$\|Q\|_{\frac{2}{p-2}} = \left(\int\limits_{B(z_0,\delta_0)} Q^{\frac{2}{p-2}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right)^{\frac{p-2}{2}} \tag{85}$$

— норма в пространстве $L_{\frac{2}{p-2}}(B(z_0,\delta_0))$ и λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Действительно, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{R(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)dm(\zeta)}{|\zeta-z_0|^{p'}}$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{R(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q^{\frac{2}{p-2}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right)^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \left(\int\limits_{R(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta-z_0|^2}\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{R(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\,dm(\zeta)}{|\zeta-z_0|^{p}} \leqslant \left(\int\limits_{B(z_0,\delta_0)} Q^{\frac{2}{p-2}}(\zeta)\,dm(\zeta)\right)^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \left(2\pi\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}.$$

Применяя теорему 5 с $\kappa=\frac{p}{2(p-1)}$ и $C_{z_0}=(2\pi)^{\frac{p}{2(p-1)}}\|Q\|_{\frac{2}{p-2}}^{\frac{1}{p-1}}$, получаем оценку (84). □

Теорема 6. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > 2$ и*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r) \leqslant Q_{z_0} r \text{ для п.в. } r \in (0, \delta_0). \tag{86}$$

Тогда имеем

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \lambda_p Q_{z_0}^{\frac{1}{p-2}} \ln^{-\frac{1}{p-2}} \frac{1}{|z - z_0|} \tag{87}$$

для всех $z \in B(z_0, \delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(z_0, \partial D)\}$ и λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Действительно, используя условие (86) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{R(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{1}{p-1}}(\zeta)\, dm(\zeta)}{|\zeta - z_0|^{p'}} = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} r^{-p'} \|Q\|^{p-1}_{\frac{1}{p-1}}(r)\, dr \leqslant Q_{z_0}^{p-1} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

□

§8. Искажение площади круга

В этом параграфе получены точные оценки площади образа круга при нижних Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М. А. Лаврентьева [1]. В дальнейшем полагаем $B_r = B(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ и $\mathbb{B} = B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Теорема 7. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля. Тогда при $p > 2$ имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \pi \cdot \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2}{2-p}}, \tag{88}$$

а при $p = 2$

$$m(fB_r) \leqslant \pi \exp\left\{ -4\pi \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \right\}. \tag{89}$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо $R_t = \{z \in \mathbb{B} : t < |z| < t + \triangle t\}$. Пусть $(A_{t+\triangle t}, C_t)$ — конденсатор, где $C_t = \overline{B}_t, A_{t+\triangle t} = B_{t+\triangle t}$. Тогда $(fA_{t+\triangle t}, fC_t)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{C}$ и согласно (7) имеем

$$\operatorname{cap}_{p'}(fA_{t+\triangle t}, fC_t) = \mathcal{M}_{p'}(\triangle(\partial fA_{t+\triangle t}, \partial fC_t; fR_t)). \tag{90}$$

Из неравенства (10) следует оценка

$$\operatorname{cap}_{p'}\left(fA_{t+\triangle t}, fC_t\right) \geqslant \frac{[\inf l(\sigma)]^{\frac{p}{p-1}}}{m\left[fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t\right]^{\frac{1}{p-1}}}, \tag{91}$$

где $l(\sigma)$ — длина кривой, σ — гладкая (бесконечно дифференцируемая) кривая, которая является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего fC_t и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $fA_{t+\triangle t}$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

С другой стороны, в силу леммы 3 имеем

$$\operatorname{cap}_{p'}\left(fA_{t+\triangle t}, fC_t\right) \leqslant \left(\int\limits_t^{t+\triangle t} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{92}$$

Комбинируя неравенства (91) и (92), получим

$$\frac{[\inf l(\sigma)]^{\frac{p}{p-1}}}{m\left[fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t\right]^{\frac{1}{p-1}}} \leqslant \left(\int\limits_t^{t+\triangle t} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{93}$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf l(\sigma) \geqslant 2 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \left(m(fC_t)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{94}$$

находим

$$2 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \left(m(fC_t)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{m\left(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t\right)}{\int\limits_t^{t+\triangle t} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{95}$$

Полагая $\Phi(t) := m\left(fB_t\right)$, из соотношения (95) имеем, что

$$2 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \Phi^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant \left(\frac{\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\triangle t} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{96}$$

Заметим, что в силу леммы 3 и гомеоморфности отображения f

$$\|Q\|^{-1}_{\frac{1}{p-1}}(r) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1).$$

Устремляя в неравенстве (96) Δt к нулю и учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$ по $t \in (0,1)$, для п.в. t имеем существование производной $\Phi'(t)$ и

$$2^p \pi^{\frac{p}{2}} \|Q\|^{-1}_{\frac{1}{p-1}}(t) \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{2}}(t)}. \tag{97}$$

Рассмотрим неравенство (97) при $p > 2$. Интегрируя обе части неравенства по $t \in [r, 1]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{2}}(t)}\, dt \leqslant \frac{2}{2-p}\left(\Phi^{\frac{2-p}{2}}(1) - \Phi^{\frac{2-p}{2}}(r)\right) \tag{98}$$

(см., например, [32, теорема IV.7.4]), получим

$$2^p \pi^{\frac{p}{2}} \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \leqslant \frac{2}{2-p}\left(\Phi^{\frac{2-p}{2}}(1) - \Phi^{\frac{2-p}{2}}(r)\right). \tag{99}$$

Из неравенства (99) вытекает оценка

$$\Phi(r) \leqslant \left(\Phi^{\frac{2-p}{2}}(1) - 2^{p-1}(2-p)\pi^{\frac{p}{2}} \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2}{2-p}}. \tag{100}$$

Наконец, учитывая, что $m(f\mathbb{B}) \leqslant \pi$, приходим к (88).

Осталось рассмотреть случай $p = 2$. В этом случае неравенство (97) примет вид

$$\frac{4\pi}{\|Q\|_1(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{101}$$

Интегрируя обе части неравенства (101) по $t \in [r, 1]$, учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt \leqslant \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)} \tag{102}$$

(см., например, [32, теорема IV.7.4]), получим

$$4\pi \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \leqslant \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}. \tag{103}$$

И, следовательно, имеем

$$\exp\left\{4\pi \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)}\right\} \leqslant \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}, \tag{104}$$

а потому

$$\Phi(r) \leqslant \Phi(1) \cdot \exp\left\{-4\pi \int\limits_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)}\right\}, \tag{105}$$

что и приводит нас к неравенству (89), поскольку $\Phi(1) \leqslant \pi$. $\square$

Замечание 1. Можно привести примеры таких гомеоморфизмов, которые показывают, что обе оценки в (88) и (89) являются точными.

§9. Поведение в точке

Теорема, приведенная в предыдущем параграфе, позволяет нам также описать асимптотическое поведение нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в точке.

Теорема 8. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля и $f(0) = 0$. Тогда при $p > 2$ имеет место оценка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \cdot \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant 1, \tag{106}$$

а при $p = 2$

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \cdot \exp\left\{2\pi \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\|Q\|_1(t)}\right\} \leqslant 1. \tag{107}$$

Доказательство. Положим $l_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда, учитывая, что $f(0) = 0$, получаем $\pi\, l_f^2(r) \leqslant m(fB_r)$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leqslant \left(\frac{m(fB_r)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{108}$$

Таким образом, учитывая неравенства (88) и (89), имеем

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{\mathcal{R}_p(|z|)} = \liminf_{r\to 0} \frac{l_f(r)}{\mathcal{R}_p(r)} \leqslant \liminf_{r\to 0} \left(\frac{m(fB_r)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}_p(r)} \leqslant 1,$$

$$\mathcal{R}_p(r) = \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{1}{p-2}}$$

при $p > 2$ и

$$\mathcal{R}_p(r) = \exp\left\{-2\pi \int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{\|Q\|_1(t)}\right\}$$

при $p = 2$. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Пусть $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля и $f(0)=0$. Тогда при $p>2$ имеет место оценка*

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\cdot\left(\int\limits_{|z|}^{1}\frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{1}{p-2}}\leqslant(2\pi)^{1-p}(p-2)^{\frac{1}{2-p}}. \tag{109}$$

§10. О взаимосвязи с классами Соболева

Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Напомним, что отображение $f:D\to\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(z)\|^2\leqslant K(z)\cdot J_f(z) \tag{110}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(z)$. Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [41]. В дальнейшем это условие было заменено требованием $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагающим дополнительно, что $J_f\in L^1_{\rm loc}$ (см., например, монографию [40]).

Пусть $p\in(1,\infty)$. В дальнейшем полагаем

$$K_{p,f}(z)=\begin{cases}\frac{\|f'(z)\|^p}{J(z,f)}, & \text{если } J(z,f)\neq 0,\\ 1, & \text{если } f'(z)=0,\\ \infty & \text{в остальных точках.}\end{cases} \tag{111}$$

Теорема 9. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f:D\to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением. Тогда f является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в каждой точке $z_0\in D$ с $Q(z)=K_{p,f}(z)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество (борелевское!) всех точек z из D, в которых f имеет полный дифференциал с $J_f(z)\neq 0$. Известно, что $\mathfrak{B}$ можно представить в виде объединения счетного набора борелевских множеств $\mathfrak{B}_l$, $l=1,2,\ldots$, таких, что $f_l=f|_{\mathfrak{B}_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см., например, [37, лемма 3.2.2]). Без потери общности можно считать, что $\mathfrak{B}_l$ попарно не пересекаются. Пусть $\mathfrak{B}_*$ — множество всех точек $z\in D$, где f имеет полный дифференциал с $f_z=0=f_{\bar z}$.

Заметим, что по известной теореме Геринга–Лехто–Меньшова множество $\mathfrak{B}_0=D\backslash(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{B}_*)$ имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{C}$ (см. [38] и [44]). Следовательно, по теореме 2.11 в [42] (см. также лемму 9.1 в [2]) $l(\gamma\cap\mathfrak{B}_0)=0$ для p-п.в. штриховых линий γ в D. Покажем также, что $l(f(\gamma)\cap f(\mathfrak{B}_0))=0$ для п.в. окружностей γ с центром в точке z_0.

Последнее вытекает из абсолютной непрерывности f на замкнутых поддугах $\gamma\cap D$ для п.в. окружностей γ. Действительно, класс $W^{1,1}_{\rm loc}$ является инвариантным относительно локально квазиизометрических преобразований независимой переменной (см., например, теорему 1.1.7 в [31]) и функции из $W^{1,1}_{\rm loc}$ абсолютно непрерывны на линиях (см., например, теорему 1.1.3 в [31]). Применяя, к примеру, преобразование координат $\log(z-z_0)$, мы приходим к абсолютной непрерывности на п.в. окружностях γ с центром в точке z_0.

Таким образом, $l(\gamma_*\cap f(\mathfrak{B}_0))=0$, где $\gamma_*=f(\gamma)$, для п.в. окружностей γ с центром в точке z_0. Пусть теперь $\varrho_*\in{\rm adm}\,f(\Gamma)$, $\varrho_*\equiv 0$ вне $f(D)$, где Γ — совокупность всех штриховых линий, образованных пересечениями всех окружностей γ с центром в точке z_0. Пусть $\varrho\equiv 0$ вне D и

$$\varrho(z):\ =\varrho_*(f(z))\,(|f_z|+|f_{\bar z}|)\ \text{ для п.в. } z\in D.$$

Рассуждая кусочно на $\mathfrak{B}_l$, мы имеем по теореме 3.2.5 из [37] (при $m=1$), что

$$\int\limits_{\gamma}\varrho\,ds\geqslant\int\limits_{\gamma_*}\varrho_*\,ds_*\geqslant 1\ \text{ для п.в. } \gamma\in\Gamma,$$

поскольку $l(f(\gamma)\cap f(\mathfrak{B}_0))=0$, а также $l(f(\gamma)\cap f(\mathfrak{B}_*))=0$ для p-п.в. $\gamma\in\Gamma$ ввиду абсолютной непрерывности f на p-п.в. $\gamma\in\Gamma$. Следовательно, $\varrho\in{\rm ext_p}\,{\rm adm}\,\Gamma$.

С другой стороны, еще раз рассуждая кусочно на $\mathfrak{B}_l$, мы имеем неравенство

$$\int\limits_{D}\frac{\varrho^p(x)}{K_{p,f}(z)}\,dm(z)\leqslant\int\limits_{f(D)}\varrho_*^p(w)\,dm(w),$$

поскольку $\varrho(z)=0$ на $\mathfrak{B}_*$. Следовательно, мы получаем, что

$$M_p(f\Gamma)\geqslant\inf_{\varrho\in{\rm ext_p}\,{\rm adm}\,\Gamma}\int\limits_{D}\frac{\varrho^p(z)}{K_{p,f}(z)}\,dm(z),$$

т.е. f действительно является нижним Q-гомеоморфизмом с $Q(z)=K_{p,f}(z)$ относительно p-модуля. $\square$

Лемма 10. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f:D\to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением с условием*

$$k_p(z_0)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\fint_{B(z_0,\varepsilon)}K_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dm(z)\right)^{p-1}<\infty,\quad z_0\in D.$$

Тогда при $p > 2$ имеем

$$L(z_0, f) = \limsup_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leqslant \lambda_p \, k_p^{\frac{1}{p-2}}(z_0),$$

где λ_p — положительная постоянная, зависящая только p.

Теорема 10. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением, с условием*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\fint_{B(z_0, \varepsilon)} K_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z) \, dm(z) \right)^{p-1} < \infty \quad \forall z_0 \in D.$$

Тогда при $p > 2$ гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Пример 1. Пусть $p > 2$ и $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, где

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \left(1 + (p-2) \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{t^{p-1} \ln^{p-1}(\frac{e}{t})} \right)^{\frac{1}{2-p}}$$

при $z \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Легко проверить, что отображение $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и является отображением с конечным искажением. Касательная и радиальная дилатации отображения f вычисляются по формулам

$$\delta_T = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{\left(1 + (p-2) \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{t^{p-1} \ln^{p-1}(\frac{e}{t})}\right)^{\frac{1}{2-p}}}{|z|}$$

и

$$\delta_r = \frac{\partial |f(z)|}{\partial |z|} = \frac{\left(1 + (p-2) \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{t^{p-1} \ln^{p-1}(\frac{e}{t})}\right)^{\frac{p-1}{2-p}}}{\left(|z| \ln \frac{e}{|z|}\right)^{p-1}}.$$

Легко видеть, что $\delta_T > \delta_r$ и $\delta_T^{p-1} = \left(\ln \frac{e}{|z|}\right)^{p-1} \delta_r$. Следовательно, имеем

$$K_{p,f}(z) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T \delta_r} = \frac{\delta_T^{p-1}}{\delta_r} = \left(\ln \frac{e}{|z|}\right)^{p-1}.$$

Заметим, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(\varepsilon)} K_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z) \, dm(z) = \infty.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\frac{|f(z)|}{|z|} \to \infty$ при $z \to 0$, т.е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

Теорема 11. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением с условием*

$$\|K_{p,f}(z)\|_{\frac{1}{p-1}}(r) \leqslant Q_{z_0} r \ \text{ для п.в. } r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{112}$$

Тогда имеем

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \lambda_p Q_{z_0}^{\frac{1}{p-2}} \ \ln^{-\frac{1}{p-2}} \frac{1}{|z - z_0|} \tag{113}$$

для всех $z \in B(z_0, \delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(z_0, \partial D)\}$ и λ_p — положительная постоянная, зависящая только от p.

Пример 2. Пусть $p > 2$ и $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, где

$$f(z) = \frac{z}{|z|}\Big(1 + (p-2)\ln\frac{1}{|z|}\Big)^{\frac{1}{2-p}}$$

при $z \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Касательная и радиальная дилатации отображения f легко вычисляются:

$$\delta_T = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{\Big(1 + (p-2)\ln\frac{1}{|z|}\Big)^{\frac{1}{2-p}}}{|z|}$$

и

$$\delta_r = \frac{\partial|f(z)|}{\partial|z|} = \frac{\Big(1 + (p-2)\ln\frac{1}{|z|}\Big)^{\frac{p-1}{2-p}}}{|z|}.$$

Отметим, что $\delta_T > \delta_r$ и $\delta_T^{p-1} = |z|^{2-p}\delta_r$. Таким образом,

$$K_{p,f}(z) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T \delta_r} = \frac{\delta_T^{p-1}}{\delta_r} = |z|^{2-p}.$$

Следовательно,

$$\|K_{p,f}(z)\|_{\frac{1}{p-1}}(r) = \Bigg(\int\limits_{|z|=r} K_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z)|dz|\Bigg)^{p-1} = (2\pi)^{p-1} r.$$

Тогда имеем оценку

$$|f(z)| \leqslant (p-2)^{2-p} \ln^{-\frac{1}{p-2}} \frac{1}{|z|}.$$

§11. Приложение к уравнению Бельтрами

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное и открытое подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. (почти всюду) в D. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z, \tag{114}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{115}$$

— *дилатационным отношением* уравнения (114). Уравнение Бельтрами (114) называется *вырожденным*, если $K_\mu(z)$ является существенно неограниченной, т.е. $K_\mu(z) \notin L^\infty(D)$.

Ниже приведена теорема о взаимосвязи гомеоморфных решений уравнения Бельтрами класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с нижними Q-гомеоморфизмами (см., например, [20, теорема 1]).

Теорема 12. *Пусть f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (114) *класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тогда f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Комбинируя теорему 12 и теорему 8 при $p = 2$, получаем следующий результат.

Теорема 13. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (114) *класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ и $f(0) = 0$. Тогда имеет место оценка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \cdot \exp\left\{2\pi \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\|K_\mu(z)\|_1(t)}\right\} \leqslant 1, \tag{116}$$

где $\|K_\mu(z)\|_1(r) = \int\limits_{C(0,r)} K_\mu(z)\,|dz|$ *и* $C(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Следствие 4. *В частности, если $K_\mu(z) \leqslant K$ для п.в. $z \in \mathbb{B}$, то*

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{1/K}} \leqslant 1. \tag{117}$$

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А., *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа*, Изд-во АН СССР, М., 1962.

[2] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York etc., 2009.

[3] Fuglede B., *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **98** (1957), 171–219.

[4] Gehring F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.

[5] Рязанов В. И., Севостьянов Е. А., *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов*, Сиб. мат. ж. **48** (2007), №6, 1361–1376.

[6] Салимов Р. Р., *Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений*, Изв. РАН. Сер. мат. **72** (2008), №5, 141–148.

[7] Салимов Р. Р. *Об оценке меры образа шара*, Сиб. мат. ж. **53** (2012), №4, 920–930.

[8] Салимов Р. Р., *On finitely Lipschitz space mappings*, Сиб. электрон. мат. изв. **8** (2011).

[9] Салимов Р. Р., *О липшицевости одного класса отображений*, Мат. заметки **94** (2013), №4, 591–599.

[10] Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А., *Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций*, Мат. сб. **201** (2010), №6, 131–158.

[11] Севостьянов Е. А., *К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности*, Изв. РАН. Сер. мат. **74** (2010), №1, 159–174.

[12] Севостьянов Е. А., *О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику*, Алгебра и анализ **24** (2012), №1, 131–156.

[13] Севостьянов Е. А., *О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности*, Сиб. мат. ж. **51** (2010), №5, 1129–1146.

[14] Golberg A., *Homeomorphisms with integrally restricted moduli.* Complex Analysis and Dynamical Systems, IV. Pt. 1, Contemp. Math., vol. 553, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 83–98.

[15] Кругликов В. И., *Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем*, Мат. сб. **130** (1986), №2, 185–206.

[16] Водопьянов С. К., Ухлов А. Д., *Операторы суперпозиции в пространствах Соболева*, Изв. вузов. Мат. **2002**, №10, 11–33.

[17] Водопьянов С. К., Ухлов А. Д., *Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества*, Владикавказ. мат. ж. **4** (2002), №1, 11–33.

[18] Водопьянов С. К., *Описание операторов суперпозиции пространств Соболева*, Докл. РАН **400** (2005), №1, 11–15.

[19] Vodopyanov S. K., *Composition operators on Sobolev spaces*, Complex Analysis and Dynamical Systems. II, Contemp. Math. vol. 382, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 401–415.

[20] Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №4, 101–124.

[21] Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E., *On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. **1(LIX)** (2010), no. 2, 263–274.

[22] Ryazanov V. I., Salimov R. R., Srebro U., Yakubov E., *On boundary value problems for the Beltrami equations*, Complex Analysis and Dynamical Systems. IV, Contemp. Math., vol. 591, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 211–242.

[23] Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., *Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях*, Укр. мат. вестн. **8** (2011), №3, 319–342.

[24] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А., *К теории классов Орлича–Соболева*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 50–102.

[25] Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I., Salimov R. R., Sevost'yanov E. A., *On mappings in the Orlicz–Sobolev classes*, Ann. Univ. Bucha. Math. Ser. **3(LXI)** (2012), no. 1, 67–78.

[26] Martio O., Rickman S., Väisälä J., *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. **448** (1969), 1–40.

[27] Hesse J., *A p-extremal length and p-capacity equality*, Ark. Mat. **13** (1975), 131–144.

[28] Шлык В. А., *О равенстве p-емкости и p-модуля*, Сиб. мат. ж. **34** (1993), №6, 216–221.

[29] Gehring F. W., *Quasiconformal mappings.* Complex Analysis and its Applications. Vol. II, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1976, pp. 213–268.

[30] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г., *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.

[31] Мазья В. Г., *Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций*, Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 26, ВИНИТИ, М., 1988, с. 159–228.

[32] Сакс С., *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.

[33] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., *К теории нижних Q-гомеоморфизмов*, Укр. мат. вісн. **5** (2008), №2, 157–181.

[34] Ziemer W. P., *Extremal length and p-capacity*, Michigan Math. J. **16** (1969), 43–51.

[35] Ransford T., *Potential theory in the complex plane*, London Math. Soc. Student Text, vol. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[36] Rado T., Reichelderfer P. V., *Continuous transformations in analysis*, Grundlehren. Math. Wiss., Bd. 75, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[37] Federer H., *Geometric measure theory*, Grundlehren. Math. Wiss., Bd. 153, Springer, Berlin etc., 1969.

[38] Gehring F. W., Lehto O., *On the total differentiability of functions of a complex variable*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. **272** (1959), 3–8.

[39] Gehring F. W., *Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space*, Advances Theory Riemann Surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Stud., vol. 66, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971, pp. 175–193.

[40] Iwaniec T., Martin G., *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 2001.

[41] Iwaniec T., Sverák V., *On mappings with integrable dilatation*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 181–188.

[42] Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I., *On the theory of mappings with finite area distortion*, J. Anal. Math. **104** (2008), 291–306.

[43] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985.

[44] Menchoff D., *Sur les differencelles totales des fonctions univalentes*, Math. Ann. **105** (1931), no. 1, 75–85.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
83114, Донецк
ул. Розы Люксембург, 74
Украина
E-mail: ruslan623@yandex.ru

Поступило 23 января 2014 г.