УДК 517

© М.В. КОРОВИНА

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 20 V 1988)

В работе дается постановка задачи Коши для одного класса линейных переопределенных систем дифференциальных уравнений, а также формулируются основные теоремы для этих систем: теоремы формальной и реальной разрешимости задачи Коши в классе голоморфных функций.

Отметим, что задача Коши для инволютивного случая переопределенных систем для случая голоморфных функций рассмотрена в [1, 2]. В этих работах исследована задача Коши для инволютивных систем в случае, когда данные Коши задаются на некотором многообразии.

Пусть M – комплексно-аналитическое многообразие. Для произвольной точки m многообразия M через $O_m(M)$ будем обозначать кольцо ростков голоморфных функций в точке m, а через $\mu(m)$ – максимальный идеал кольца $O_m(M)$ ростков функций, обращающихся в точке m в нуль.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$F(j^n(u(x))) = \mathrm{f}(x), \tag{1}$$

где $u(x)$ – голоморфная функция, n – порядок системы, $\mathrm{f}(x)$ – вектор-столбец,

$$\mathrm{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{pmatrix},$$

l – количество уравнений в системе, $F: J^n \to C^n$ – линейный оператор, отображающий пространство джетов порядка n в вектор голоморфных функций, j_x^n – джет функции u в точке x порядка n. Очевидно, оператору F соответствует матрица размера $(l \times p)$, p – число мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $|\alpha| \leqslant n$.

Пусть задана последовательность целых чисел:

$$0 < p_s < p_{s-1} < \ldots < p_1 = n - 1. \tag{2}$$

Рассмотрим флаг $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_s)$, т.е. последовательность вложенных аналитических многообразий $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{N}_s$.

Определение. Пространством джетов на флаге $\mathcal{N}$ называется фактор-пространство

$$J^p_{\mathcal{N}} = O(M)/\mu^p_{\mathcal{N}},$$

где $\mu^p_{\mathcal{N}} = \mu^{p_s+1}_{\mathcal{N}_s}\, \mu^{p_{s-1}-p_s}_{\mathcal{N}_{s-1}} \ldots \mu^{p_1-p_2}_{\mathcal{N}_1}$.

В соответствии с этим джетом функции $u(x)$ на флаге $\mathcal{N}$ будем называть класс эквивалентности ростков голоморфных функций, где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, если выполнены соотношения:

$$\partial^\alpha u_2(x)|_{\mathcal{N}_i} = \partial^\alpha u_1(x)|_{\mathcal{N}_i}, \qquad |\alpha| \leqslant p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Этот класс эквивалентности будем обозначать $j^p_{\mathcal{N}}$, $j^p_{\mathcal{N}} \in J^p_{\mathcal{N}}$.

Рассмотрим систему (1) и наложим дополнительные условия (данные Коши) на вектор-функцию $u(x)$, задав джет функции $u(x)$ на флаге. Получим задачу:

$$F(j^n(u(x))) = f(x); \tag{3}$$

$$j^p_{\mathcal{N}}(u(x)) = v, \tag{4}$$

где v – некоторый элемент из $J^p_{\mathcal{N}}$.

Назовем задачу (3), (4), задачей Коши для системы линейных дифференциальных уравнений на флаге $\mathcal{N}$.

Рассмотрим вначале вопрос о существовании формального решения задачи Коши (3), (4) для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка n.

Хорошо известны условия формальной разрешимости для системы (3) линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [3]). Остается, следовательно, изучить условия формальной разрешимости, которые вносят данные Коши. Предположим, что система (3) является формально разрешимой. Сделаем подстановку $\tilde{u}(x) = u(x) - u^1(x)$, где $u^1(x)$ – одно из решений системы; существование такого решения следует из предположения о формальной разрешимости системы (3). Таким образом, получим задачу Коши на флаге $\mathcal{N}$ относительно функции $\tilde{u}(x)$:

$$\begin{aligned} &F(j^n(\tilde{u}(x))) = \mathrm{f} - F(j^n(u^1(x))) = 0,\\ &j^p_{\mathcal{N}}(\tilde{u}(x)) = v - j^p_{\mathcal{N}}(u^1(x)) = v_1; \end{aligned} \tag{5}$$

Джет v_1 на флаге $\mathcal{N}$ может быть, очевидно, представлен набором джетов $(v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(s)})$, заданных на многообразиях $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_s$, образующих флаг.

Возникает вопрос, при каких условиях Коши v_1 задача (5) разрешима. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *На каждом многообразии $\mathcal{N}_i$, $i = 1, \ldots, s$, существует такая конечная система дифференциальных операторов $Q_j^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, k$, что условия*

$$Q_j^{(i)} v_1^{(i)} = 0,$$

являются необходимыми и достаточными для формальной разрешимости задачи (5).

Теперь рассмотрим вопрос о локальном существовании голоморфного решения задачи Коши в предположении, что задача Коши (5) является формально разрешимой.

Очевидно, что задача Коши (3), (4) с произвольными данными Коши (4) может быть сведена к задаче Коши с нулевыми данными. Чтобы показать это, выберем некоторую вектор-функцию $u'(x)$, принадлежащую классу эквивалентности $v(x)$, и сделаем замену $u_0 = u(x) - u'(x)$. Для функции u_0 получим задачу:

$$\begin{aligned} &F(j^n(u_0(x))) = \mathrm{f}(x) - F(j^n u'(x))) = \mathrm{f}_1(x),\\ &j^{p_s}_{\mathcal{N}_s}(u_0(x)) = 0; \quad j^{p_s-1}_{\mathcal{N}_{s-1}}(u_0(x)) = 0, \ldots, j^{(n-1)}_{\mathcal{N}_1}(u_0(x)) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь, разумеется, предполагается, что система уравнений, входящая в задачу (6), удовлетворяет условиям формальной разрешимости.

Введем конечномерное фактор-пространство

$$J^{n, p_s, p_s-1, \ldots, p_1}_{m, \mathcal{N}_s, \mathcal{N}_{s-1}, \ldots, \mathcal{N}_1} = O_{\mathcal{N}_s}(M) / \mu^p_{\mathcal{N}} + \mu^{n+1}_m . \tag{7}$$

Так как $J_m^n = O_m(M)/\mu_m^{n+1}$ – пространство всех производных порядка n в точке m является конечномерным, то "дофакторизовав" это пространство по идеалу $\mu^p_{\mathcal{N}^p}$, получим также конечномерное фактор-пространство (7). Очевидно, что (7) – пространство всех производных порядка меньше $n+1$, которые могут быть вычислены из данных Коши.

Рассмотрим проекцию π:

$$J_m^n \xrightarrow{\pi} J_{m,\,N_s,\,N_{s-1},\dots,\,N_1}^{n,\,p_s,\,p_{s-1},\dots,\,p_1};$$

Обозначим: $\widetilde{F} = F|_{\ker\pi}$, где $F|_{\ker\pi}$ – сужение оператора F на ядро проекции π. Сформулируем основное утверждение этой статьи.

Т е о р е м а 2. *Пусть задача* (3), (4) *разрешима в формальных рядах; тогда если F является изоморфизмом, то существует голоморфное решение этой задачи в некоторой окрестности начала координат.*

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 справедлива и для системы уравнений с переменными коэффициентами.

З а м е ч а н и е 2. Все приведенные выше утверждения распространяются на случай, когда функция $u(x)$ является вектор-функцией: $\mathbf{u}(x) = (u_1(x),\ u_2(x),\dots$ $\dots, u_k(x))$. При этом необходимо расширить понятие джета на флаге на случай, когда вместо последовательности чисел (2) будет рассматриваться последовательность

$$-1 \leqslant p_s \leqslant p_{s-1} \leqslant \dots \leqslant p_1 = n-1.$$

Таким образом, будут возможны такие случаи, что для некоторых функций $u_i(x)$ на многообразиях большой размерности джеты могут вообще не быть определены.

В заключение приведем несколько примеров постановки задачи Коши на флаге. Пусть имеется система линейных уравнений второго порядка относительно функции $u(x, y)$ на плоскости (x, y). Если рассмотреть систему, состоящую из одного уравнения, то получим классическую постановку задачи, данные Коши для которой имеют вид

$$u_x(0,y) = 0,$$
$$u(0,y) = 0.$$

В бескоординатной форме такую постановку можно переписать в виде

$$j^1_{l_1}(u(x,y)) = 0,$$

где l_1 – прямая $x = 0$.

Если система состоит из двух уравнений, то соответствующие данные Коши имеют вид

$$u_x(0,0) = 0, \qquad u(0,y) = 0$$

и представляют собой данные Коши на флаге $m \subset l_1$, или бескоординатной форме

$$j^1_m(u(x,y)) = 0, \qquad j_{l_1}(u(x,y)) = 0,$$

где m – начало координат.

Для системы трех уравнений второго порядка данные Коши имеют вид

$$j^1_m(u(x,y)) = 0.$$

Пользуюсь случаем выразить свою глубокую благодарность В.А. Ильину, Б.Ю. Стернину и В.Е. Шаталову за помощь в постановке задачи и постоянное содействие на протяжении всей работы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
15 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guillemin V.* – Amer. J. Math., 1986, № 90, p. 270–284. 2. *Спенсер Д.К.* – Математика, 1970, т. 14, № 3, с. 99–126. 3. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.

УДК 517.91/98 МАТЕМАТИКА

© А.П. МАХМУДОВ, З.С. АЛИЕВ

НЕКОТОРЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗИРУЕМЫХ И НЕЛИНЕАРИЗИРУЕМЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 16 V 1988)

Известно, что существенную роль при исследовании нелинейных задач на собственные значения играет возможность линеаризации рассматриваемой задачи в окрестности нуля (при существовании сильной производной по Фреше в начале координат). Целью настоящей работы является получение некоторых глобальных результатов в случае нелинейных задач Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Рассматриваемые нами нелинейные задачи, хотя и не нуждаются в линеаризации, все же связаны с некоторыми линейными задачами на собственные значения.

Рассмотрим нелинейную задачу Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка вида

$$(1)\qquad Ly \equiv (p(x)y'')'' - (q(x)y')' + a(x)y = \lambda\rho(x)y + g(x,y,y',y'',y''',\lambda) + f(x,y,y',y'',y''',\lambda)$$

с разделенными граничными условиями в интервале $[0, l]$. В дифференциальном выражении Ly: $p(x)$ – положительная, дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[0, l]$, $q(x)$ – положительная и непрерывно дифференцируемая функция на том же отрезке $[0, l]$, $\rho(x)$ – положительная, непрерывная функция на отрезке $[0, l]$, $a(x)$ – непрерывная функция, определенная на $[0, l]$. Мы предполагаем, что нелинейные члены f и g непрерывны по совокупности аргументов и удовлетворяют следующим условиям: функция f имеет подлинейный рост по переменной y равномерно остальных аргументов; $g = o(|y| + |y'| + |y''| + |y'''|)$ в окрестности точки $(0,0,0,0)$.

В силу присутствия в уравнении (1) нелинейного члена f, имеющего подлинейный рост, (1) не всегда допускает линеаризацию. Поэтому для исследования бифуркации решений уравнения (1), как и в случае бифуркации решения нелиней-