УДК 517.956.227

А. С. МАКИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе для общего несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка с произвольными краевыми условиями устанавливаются оценки антиаприорного типа, связывающие L_2-нормы собственных и присоединенных функций.

Рассмотрим эллиптический оператор

$$Lu=\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u, \qquad (1)$$

заданный в произвольной области G пространства R^N. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ будем считать вещественнозначными функциями, все остальные коэффициенты, вообще говоря,— комплекснозначными. Следуя В. А. Ильину [1], под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $C^{(2)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $L\overset{0}{u}+\lambda\overset{0}{u}=0$.

Аналогично под присоединенной функцией порядка n, $n=1, 2, \ldots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{n}{u}(x)$ из класса $C^{(2)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $L\overset{n}{u}+\lambda\overset{n}{u}=\overset{n-1}{u}$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора (1) удовлетворяют условию эллиптичности, т. е. $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ и для любого компакта K области G

$$\inf_{|\xi|=1,\, x\in K}\ \sum_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j>0,$$

где ξ — вещественный вектор с обычной нормой;

2) функции $a_{ij}(x)$, $\partial a_{ij}(x)/\partial x_i$, $b_i(x)$, $c(x)$ непрерывны в области G.

Обозначим через μ тот квадратный корень из λ, действительная часть которого неотрицательна.

Теорема 1. *Для любого комплексного λ, любого номера n, $n=1, 2, \ldots$, и любых компактов K и K' области G, первый из которых лежит строго внутри второго, справедлива оценка*

$$\|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K)}\leqslant C(K,\ K')\,(n+\operatorname{Re}\mu)^2\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\overset{m}{z}(y)=y^m e^{-\mu y}$, где $m=[\operatorname{Re}\mu/2]$. Если $\operatorname{Re}\mu\geqslant 2$, то функция $|\overset{m}{z}(y)|$ монотонно возрастает на отрезке $[0,\ y_0]$ и монотонно убывает на отрезке $[y_0,\ 1]$, где $y_0=m/\operatorname{Re}\mu$. Отсюда следует, что для любого интервала $(a,\ b)$ такого, что $(a,\ b)\subset(0,\ 1)$, $y_0\in(a,\ b)$, имеет место неравенство

$$\|\overset{m}{z}\|_{L_2(0,\,1)}\leqslant c_1\|\overset{m}{z}\|_{L_2(a,\,b)}, \qquad (3)$$

где постоянная c_1 зависит лишь от a и b. Очевидно, что при $0 \leqslant \operatorname{Re} \mu < 2$ оценка (3) справедлива для любого интервала $(a, b) \subset (0, 1)$. Заметим также, что всегда $1/4 \leqslant y_0 \leqslant 1/2$. Кроме того, при выполнении условия $3m \leqslant a|\mu|$ для любого интервала $(a, b) \subset (0, 1)$ имеет место неравенство

$$|\mu| \, \| \overset{m}{z} \|_{L_2(a, b)} \leqslant \frac{3}{2} \| \overset{m}{z}' \|_{L_2(a, b)}. \tag{4}$$

Из определения функции $\overset{m}{z}(y)$ следует, что она является присоединенной функцией порядка m оператора $L_0 z = z''$, отвечающей собственному значению $-\lambda$, т. е. имеют место равенства $L_0 \overset{i}{z} - \lambda \overset{i}{z} = \overset{i-1}{z}$ $(i = m, \ldots$ $\ldots, 1)$, $L_0 \overset{0}{z} - \lambda \overset{0}{z} = 0$.

Лемма 1. *Пусть $L_1 u$ и $L_2 v$ — дифференциальные операторы, заданные соответственно в области G_1 пространства R^{N_1} и в области G_2 пространства R^{N_2}, функция $\overset{n}{u}(x)$ является присоединенной функцией порядка n оператора L_1, отвечающей собственному значению λ_1, а функция $\overset{m}{v}(y)$ — присоединенной функцией порядка m оператора L_2, отвечающей собственному значению λ_2. Тогда функция $\overset{n}{u}(x)\overset{m}{v}(y)$ является присоединенной функцией порядка $n+m$ оператора $L_1 + L_2$, заданного в области $G_1 \times G_2$ пространства $R^{N_1} \times R^{N_2}$, отвечающей собственному значению $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Лемма доказывается по индукции. Пусть $n+m=k$. Если $k=0$, то утверждение леммы проверяется непосредственно. Предположим, что лемма справедлива при $k=p$. Пусть $n+m=p+1$. Имеем

$$L_1(\overset{n}{u}(x)\overset{m}{v}(y)) + L_2(\overset{n}{u}(x)\overset{m}{v}(y)) + (\lambda_1+\lambda_2)\overset{n}{u}(x)\overset{m}{v}(y) =$$
$$= \overset{n-1}{u}(x)\overset{m}{v}(y) + \overset{n}{u}(x)\overset{m-1}{v}(y)$$

($\overset{n-1}{u}(x) \equiv 0$, если $n=0$; $\overset{m-1}{v}(y) \equiv 0$, если $m=0$). Функции $\overset{n-1}{u}(x)\overset{m}{v}(y)$ и $\overset{n}{u}(x)\overset{m-1}{v}(y)$, согласно предположению индукции, являются присоединенными функциями порядка p оператора $L_1 + L_2$, откуда вытекает справедливость леммы.

Из леммы 1 следует, что функция $\overset{n+m}{v}(x, y) = \overset{n}{u}(x)\overset{m}{z}(y)$ является присоединенной функцией оператора $L + L_0$ порядка $n+m$, отвечающей собственному значению $\lambda = 0$. Обозначим $\overset{n+m-k-1}{v} = (L_1 + L_0)\overset{n+m-k}{v}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+m-1)$.

Продолжим коэффициенты оператора (1) на все пространство R^N так, чтобы полученные функции $\tilde{a}_{ij}(x)$, $\tilde{b}_i(x)$, $\tilde{c}(x)$ совпадали соответственно с функциями $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ на компакте K', удовлетворяли во всем R^N тем же условиям на гладкость и чтобы оператор $\tilde{L}$ с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}(x)$, $\tilde{b}_i(x)$, $\tilde{c}(x)$ удовлетворял условию

$$\inf_{|\xi|=1,\, x \in R^N} \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta > 0.$$

Пусть компакт K лежит строго внутри компакта K_1, лежащего строго внутри компакта K', а числа a, a_1, b, b_1 удовлетворяют неравенствам $0 < a_1 < a < 1/4$, $1/2 < b < b_1 < 1$. Обозначим символом $\eta(x, y)$ так называемую «срезку», т. е.

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ при } (x, y) \in K_1 \times [a_1, b_1], \\ 0 \text{ при } (x, y) \overline{\in} K' \times [0, 1], \end{cases}$$

$0\leqslant\eta(x, y)\leqslant 1$, $\eta(x, y)\in C^{(2)}(R^N\times(-\infty, \infty))$. Введем в рассмотрение оператор $\hat{L}$:

$$\hat{L}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\tilde{L}\varphi-L_0\varphi, \tag{5}$$

действующий в пространстве $R^{N+2}(x, y, t)$. Обозначим

$$P(x, y, t)=\sum_{k=0}^{n+m}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\overset{n+m-k}{v}(x, y).$$

Рассмотрим две задачи Коши для оператора (5):

$$\hat{L}\varphi=\hat{L}(\eta(x, y)P(x, y, t)),$$
$$\varphi|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=\eta(x, y)\overset{n+m}{v}(x, y); \tag{6}$$

$$\hat{L}\varphi=0,\ \varphi|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=\eta(x, y)\overset{n+m}{v}(x, y). \tag{7}$$

Поскольку оператор (5) гиперболический, то (см. [2]) решение задачи (7) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\varphi(x, y, t)\|_{W_2^1(R^{N+1})}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, y, t)\right\|_{L_2(R^{N+1})}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C(T)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, y, 0)\right\|_{L_2(R^{N+1})}. \tag{8}$$

Так как $\hat{L}(\eta(x, y)P(x, y, t))=0$ при $(x, y, t)\in K_1\times[a_1, b_1]\times(-\infty, \infty)$, то по теореме об области зависимости (см. [2]) решения задач (6) и (7) совпадают при $(x, y, t)\in K\times[a, b]\times[0, T_0]$, где T_0 — некоторое достаточно малое число ($T_0>0$), стало быть, на этом множестве $\varphi(x, y, t)=P(x, y, t)$. Из последнего равенства, оценки (8) и нечетности по t функции $P(x, y, t)$ вытекает неравенство

$$\max_{|t|\leqslant T_0}\left(\|P(x, y, t)\|_{W_2^1(K\times[a,b])}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t)\right\|_{L_2(K\times[a,b])}\right)\leqslant$$
$$\leqslant c_2\|\overset{n+m}{v}\|_{L_2(K'\times(0,1))}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$\max_{|t|\leqslant T_0}\left\|\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, t)\right\|^2_{L_2(K\times[a, b])}\leqslant c_3\|\overset{n+m}{v}\|_{L_2(K'\times(0, 1))}, \tag{10}$$

$$\max_{|t|\leqslant T_0}H(t)\leqslant c_4\|\overset{n+m}{v}\|^2_{L_2(K'\times(0, 1))}, \tag{11}$$

где $H(t)=\left\|\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t)-\overset{n+m}{v}(x, y)\right\|^2_{L_2(K\times[a, b])}$. Легко видеть, что $H(t)$ есть многочлен степени $2(n+m)$, причем

$$H^{(4)}(0)=6\|\overset{n+m-1}{v}\|^2_{L_2(K\times[a, b])}.$$

Согласно неравенству Маркова, $|H^{(4)}(0)|\leqslant c_5(n+m)^4\max\limits_{|t|\leqslant T_0}H(t)$, откуда в соединении с (11) следует, что

$$\|\overset{n+m-1}{v}\|_{L_2(K\times[a,\,b])}\leqslant c_6(n+m)^2\|\overset{n+m}{v}\|_{L_2(K'\times(0,\,1))}. \tag{12}$$

Так как $\overset{n+m-1}{v}=\overset{n}{u}\,\overset{m-1}{z}+\overset{n-1}{u}\,\overset{m}{z}$, то из (12) получаем

$$\|\overset{n-1}{u}\,\overset{m}{z}\|_{L_2(K\times[a,\,b])}\leqslant\|\overset{n}{u}\,\overset{m-1}{z}\|_{L_2(K\times[a,\,b])}+$$
$$+c_6(n+m)^2\|\overset{n}{u}\,\overset{m}{z}\|_{L_2(K'\times(0,\,1))}. \tag{13}$$

Поскольку $\overset{m-1}{z}(y)=m(m-1)y^{m-2}e^{-\mu y}-2m\mu e^{-\mu y}$, то из (13) имеем

$$\|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K)}\|\overset{m}{z}\|_{L_2(a,\,b)}\leqslant m^2\|y^{m-2}e^{-\mu y}\|_{L_2(a,\,b)}\times$$
$$\times\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K)}+2m|\mu|\,\|y^{m-1}e^{-\mu y}\|_{L_2(a,\,b)}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K)}+$$
$$+c_7(n+m)^2\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K)}\|\overset{m}{z}\|_{L_2(0,1)}. \tag{14}$$

Из оценки (10) при помощи аналогичных рассуждений, связанных с применением неравенства Маркова, легко получить следующее неравенство:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+m}{v}(x,\,y)\right\|^2_{L_2(K\times[a,\,b])}\leqslant c_8(n+m)^2\|\overset{n+m}{v}\|^2_{L_2(K'\times(0,\,1))}, \tag{15}$$

откуда следует, что $\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K)}\|\overset{m}{z}{}'\|_{L_2(a,\,b)}\leqslant c_9(n+m)\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}\|\overset{m}{z}\|_{L_2(0,\,1)}$. Отсюда и из неравенств (3), (4) имеем

$$\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K)}\leqslant c_{10}\frac{(n+m)}{|\mu|+1}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \tag{16}$$

Из неравенств (3), (14), (16) сразу вытекает оценка (2). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если* $n\geqslant c_0\operatorname{Re}\mu$, *где* c_0 — *некоторая постоянная* ($c_0>0$), *то имеет место неравенство* $\|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K)}\leqslant C(K,\,K')n^2\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$.

Следствие 2. *Если* $c'_0\sqrt{\operatorname{Re}\mu}\leqslant n\leqslant c_0\operatorname{Re}\mu$, *где* c_0, c'_0 — *некоторые постоянные* ($c_0>0$, $c'_0>0$), *то справедлива оценка* $\|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K)}\leqslant$ $\leqslant C(K,\,K')n^2\operatorname{Re}\mu\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$.

Замечание. Из неравенства (9) аналогичным способом устанавливается следующая оценка для производных присоединенной функции:

$$\|\overset{n}{u}\|_{W_2^1(K)}\leqslant C(K,\,K')\,(n+\operatorname{Re}\mu)\,\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')},$$

справедливая при любых значениях n и μ.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $|\operatorname{Im}\mu|\leqslant M_1$;

2) $n\leqslant M_2\sqrt{|\mu|}$, *где* M_2 — *некоторая постоянная, зависящая лишь от коэффициентов оператора (1) и компактов* K *и* K'.

Тогда для любых номеров n *и* k, *таких, что* $0<k\leqslant n$, *справедливо неравенство*

$$\|\overset{n-k}{u}\|_{L_2(K)}\leqslant C(K,\,K')\sqrt{n}\,(n|\mu|)^k\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \tag{17}$$

Доказательство. Определим функцию $H_n(x, t)$ равенством

$$H_n(x, t) = \sum_{j=0}^{n} \overset{n-j}{u}(x) \int_0^t \overset{j}{v}(\tau)\,d\tau,$$

где

$$\overset{j}{v}(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tau^2}{2} \right)^j \frac{J_{j-1/2}(\mu\tau)}{(\mu\tau)^{j-1/2}}. \tag{18}$$

Исходя из свойств функций Бесселя, нетрудно проверить, что $H_n(x, 0) = 0$, $(\partial/\partial t) H_n(x, 0) = \overset{n}{u}(x)$ при $x \in G$, $(\partial^2/\partial t^2 - L) H_n(x, t) = 0$ при $(x, t) \in G \times (-\infty, \infty)$. Используя энергетические оценки для решения задачи Коши для гиперболического уравнения, рассуждениями, аналогичными тем, которые проводились при доказательстве теоремы 1 (см. также [3]), легко получить следующее неравенство:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \left(\| H_n(x, t) \|_{W_2^1(K)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} H_n(x, t) \right\|_{L_2(K)} \right) \leqslant c_1 \| \overset{n}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Отсюда и из нечетности по t функции $H_n(x, t)$ следует неравенство

$$\max_{|t| \leqslant T_0} \| \overset{n}{W}(x, t) \|^2_{L_2(K)} \leqslant c_2 \| \overset{n}{u} \|^2_{L_2(K')}, \tag{19}$$

где

$$\overset{n}{W}(x, t) = \sum_{j=0}^{n} \overset{j}{v}(t) \overset{n-j}{u}(x).$$

Из равенств (18) вытекает, что функции $\overset{j}{v}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ образуют цепочку присоединенных функций оператора $L_0 v = v''$, отвечающих собственному значению $\lambda = \mu^2$ и собственной функции $\overset{0}{v}(t)$, т. е. $L_0 \overset{j}{v} + \lambda \overset{j}{v} = \overset{j-1}{v}$ $(j = n, \ldots, 1)$, $L_0 \overset{0}{v} + \lambda \overset{0}{v} = 0$.

Отсюда следует, что функция $\overset{n}{W}(x, t)$ является присоединенной функцией порядка n оператора L_0, отвечающей тому же собственному значению λ, т. е. справедливы равенства $L_0 \overset{k}{W} + \lambda \overset{k}{W} = \overset{k-1}{W}$ $(k = n, \ldots, 1)$, $L_0 \overset{0}{W} + \lambda \overset{0}{W} = 0$. Заметим также, что $\overset{k}{W}(x, 0) = \overset{k}{u}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Зафиксируем произвольное $x \in G$. Тогда из представления для функций Бесселя полуцелого индекса следует, что $\overset{n}{W}(x, t) = P_n(t) e^{i\mu t} + Q_n(t) e^{-i\mu t}$, где $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ являются многочленами степени не выше n. Обозначим $\overset{n}{\varphi}(t) = P_n(t) e^{i\mu t}$, $\overset{n}{\psi}(t) = Q_n(t) e^{-i\mu t}$. Тогда $\overset{n}{\varphi}(t)$ и $\overset{n}{\psi}(t)$ — присоединенные функции порядка не выше n оператора L_0, отвечающие тому же собственному значению λ. Соответствующие им цепочки обозначим $\overset{k}{\varphi}(t)$ и $\overset{k}{\psi}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Легко видеть, что

$$\overset{n-k}{W}(x, t) = \overset{n-k}{\varphi}(t) + \overset{n-k}{\psi}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{20}$$

По индукции докажем, что

$$\overset{n-k}{\varphi}(t) = e^{i\mu t} \sum_{m=0}^{k} C_k^m P_n^{(k+m)}(t) (2i\mu)^{k-m}. \tag{21}$$

При $k=1$ равенство (21) проверяется непосредственно. Предположим, оно верно при $k=k_0$. Докажем его справедливость при $k=k_0+1$. Используя свойства биномиальных коэффициентов, будем иметь

$$\overset{n-k_0-1}{\varphi}=L_0\overset{n-k_0}{\varphi}+\lambda\overset{n-k_0}{\varphi}=e^{i\mu t}\Big(\sum_{m=0}^{k_0}C_{k_0}^{m}P_n^{(k_0+m+2)}(t)\times$$

$$\times(2i\mu)^{k_0-m}+\sum_{m=0}^{k_0}C_{k_0}^{m}P_n^{(k_0+m+1)}(t)(2i\mu)^{k_0-m+1}\Big)=$$

$$=e^{i\mu t}\Big(P_n^{(2k_0+2)}(t)+\sum_{m=0}^{k_0-1}C_{k_0}^{m}P_n^{(k_0+m+2)}(t)(2i\mu)^{k_0-m}+$$

$$+P_n^{(k_0+1)}(t)(2i\mu)^{k_0+1}+\sum_{m=1}^{k_0}C_{k_0}^{m}P_n^{(k_0+m+1)}(t)(2i\mu)^{k_0-m+1}\Big)=$$

$$=e^{i\mu t}\Big(P_n^{(k_0+1)}(t)(2i\mu)^{k_0+1}+\sum_{m=1}^{k_0}(C_{k_0}^{m-1}+C_{k_0}^{m})P_n^{(k_0+m+1)}(t)(2i\mu)^{k_0-m+1}+$$

$$+P_n^{(2k_0+2)}(t)\Big)=e^{i\mu t}\sum_{m=0}^{k_0+1}C_{k_0+1}^{m}P_n^{(k_0+m+1)}(t)(2i\mu)^{k_0-m+1}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\overset{n-k}{\psi}(t)=e^{-i\mu t}\sum_{m=0}^{k}C_k^mP_n^{(k+m)}(t)(-2i\mu)^{k-m}.$$

Из неравенств для производных многочлена (см., например, [4, 5]) следует, что

$$\Big|\sum_{m=0}^{k}C_k^mP_n^{(k+m)}(0)(2i\mu)^{k-m}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{k}c_3^{k+m}C_k^mn^{k+m}(2|\mu|)^{k-m}\max_{|t|\leqslant T_0/2}|P_n(t)|\leqslant$$

$$\leqslant c_3^{2k}\max_{|t|\leqslant T_0/2}|P_n(t)|\sum_{m=0}^{k}C_k^mn^{2m}(2n|\mu|)^{k-m}=$$

$$=c_3^{2k}(n^2+2n|\mu|)^k\max_{|t|\leqslant T_0/2}|P_n(t)|\leqslant c_4^k)\sqrt{n}(n^2+2n|\mu|)^k\|P_n\|_{L_2(-T_0,T_0)}.$$

Из последнего неравенства и условия 1) теоремы получаем

$$\big|\overset{n-k}{\varphi}(0)\big|\leqslant c_5^k\sqrt{n}\,(n^2+2n|\mu|)^k\|\overset{n}{\varphi}\|_{L_2(-T_0,\,T_0)}. \tag{22}$$

Аналогичное неравенство имеет место для функции $\psi(t)$:

$$\big|\overset{n-k}{\psi}(0)\big|\leqslant c_6^k\sqrt{n}\,(n^2+2n|\mu|)^k\|\overset{n}{\psi}\|_{L_2(-T_0,\,T_0)}. \tag{23}$$

Из (20), (22), (23) вытекает, что

$$\big|\overset{n-k}{W}(x,0)\big|=\big|\overset{n-k}{\varphi}(0)+\overset{n-k}{\psi}(0)\big|\leqslant\big|\overset{n-k}{\varphi}(0)\big|+\big|\overset{n-k}{\psi}(0)\big|\leqslant$$

$$\leqslant c_7^k\sqrt{n}\,(n^2+2n|\mu|)^k(\|\overset{n}{\varphi}\|_{L_2(-T_0,\,T_0)}+\|\overset{n}{\psi}\|_{L_2(-T_0,\,T_0)}). \tag{24}$$

Подчеркнем, что постоянная c_7 не зависит от точки x.

Из известных свойств многочленов [4, 5] следует, что

$$|(\overset{n}{\varphi}, \overset{n}{\psi})_{L_2(-T_0, T_0)}| = \left| \int_{-T_0}^{T_0} P_n(t)\overline{Q_n(t)}e^{2i\mu t}dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |P_n(t)\overline{Q_n(t)}e^{2i\mu t}|_{-T_0}^{T_0}|/2|\mu| + \frac{1}{2|\mu|}\int_{-T_0}^{T_0}|(P_n(t)\overline{Q_n(t)})'e^{2i\mu t}|dt \leqslant$$

$$\leqslant c_8\frac{n^2}{|\mu|}\|P_n\|_{L_2(-T_0, T_0)}\|Q_n\|_{L_2(-T_0, T_0)} \leqslant$$

$$\leqslant c_9\frac{n^2}{|\mu|}\|\overset{n}{\varphi}\|_{L_2(-T_0, T_0)}\|\overset{n}{\psi}\|_{L_2(-T_0, T_0)} \leqslant$$

$$\leqslant c_9\frac{n^2}{2|\mu|}(\|\overset{n}{\varphi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + \|\overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)}).$$

Постоянная c_9 в последнем неравенстве зависит лишь от постоянной M_1 из условия 1) теоремы и числа T_0, которое зависит только от коэффициентов оператора (1) и компактов K и K'. Выбирая в условии 2) теоремы постоянную $M_2 = c_9/2$, получим

$$|(\overset{n}{\varphi}, \overset{n}{\psi})_{L_2(-T_0, T_0)}| \leqslant (\|\overset{n}{\varphi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + \|\overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)})/4. \tag{25}$$

Используя неравенство (25), будем иметь

$$\|\overset{n}{\varphi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + \|\overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} \leqslant \|\overset{n}{\varphi} + \overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + 2|(\overset{n}{\varphi}, \overset{n}{\psi})_{L_2(-T_0, T_0)}| \leqslant$$

$$\leqslant \|\overset{n}{\varphi} + \overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + (\|\overset{n}{\varphi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + \|\overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)})/2,$$

откуда следует, что

$$\|\overset{n}{\varphi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} + \|\overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)} \leqslant 2\|\overset{n}{\varphi} + \overset{n}{\psi}\|^2_{L_2(-T_0, T_0)}. \tag{26}$$

Из (20), (24), (26) вытекает

$$|\overset{n-k}{W}(x, 0)|^2 \leqslant c_{10}^{2k} n(n^2 + 2n|\mu|)^{2k}\|\overset{n}{W}(x, t)\|^2_{L_2(-T_0, T_0)}. \tag{27}$$

Интегрируя неравенство (27) по компакту K и сопоставляя с оценкой (19), получаем неравенство

$$\|\overset{n-k}{u}\|^2_{L_2(K)} \leqslant c_{11}^{2k} n(n^2 + 2n|\mu|)^{2k}\|\overset{n}{u}\|^2_{L_2(K')},$$

откуда следует утверждение теоремы 2.

Далее рассмотрим произвольную полную в $L_2(G)$ и минимальную систему $\{u_n\}$ собственных и присоединенных функций оператора (1). Тогда существует и притом единственная биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$. Считая, что числа λ_n не имеют конечных точек сгущения, занумеруем их в порядке неубывания $|\lambda_n|$ и для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ составим спектральное разложение ее в биортогональный ряд $\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| < \lambda}(f, v_n)u_n(x)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) система $\{v_n\}$ состоит из собственных и присоединенных функций оператора L^*v, формально сопряженного к оператору (1) в области G, отвечающих собственным значениям $\overline{\lambda}_n$;

2) для любого компакта K области G существует постоянная $C(K)$ такая, что для всех номеров n $\|u_n\|_{L_2(G)}\|v_n\|_{L_2(K)}\leqslant C(K)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{h(\lambda_n)}{|\lambda_n|^{1/4}}=0$, *где $h(\lambda_n)$ — максимальный порядок присоединенных функций системы $\{v_n\}$, отвечающих собственным значениям, равным $\bar\lambda_n$;*

4) $|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda_n}|\leqslant C$, *для любого* $\lambda>0$ $\sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant\lambda}1\leqslant M\lambda^{N/2}$;

5) коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ оператора (1) принадлежат классу $C^{(N+1)}(G)$;

6) функция $f(x)$ имеет в области G компактный носитель и принадлежит классу С. Л. Соболева $W_2^{N+1}(G)$.

Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\sigma_\lambda(x, f)-f(x)\|_{L_2(G)}=0.$$

Данная теорема при условии равномерной ограниченности порядка присоединенных функций системы $\{v_n\}$, являющемся более сильным, чем условие 3), была доказана В. А. Ильиным в работе [6]. Там же были установлены достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости биортогонального ряда $\sigma_\lambda(x, f)$ к функции $f(x)$. При наличии оценки (17) доказательство теоремы 3 проводится так же, как и в работе [6].

Отметим, что справедливость оценки $\|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K)}\leqslant C(K, K', \varepsilon)(4+\varepsilon)^n(|\mu|+1)\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$ при произвольном $\varepsilon>0$ была установлена в работе [1].

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину за постановку задачи и полезное обсуждение ее результатов.

Литература

1. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 30—37.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
3. Макин А. С. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 6. С. 1314—1318.
4. Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного. М., 1960.
5. Лебедь Г. К. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1975. Т. 134. С. 142—160.
6. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 1. С. 19—22.

Всесоюзный заочный машиностроительный институт

Поступила в редакцию 9 июля 1987 г.

УДК 517.947

Е. И. МОИСЕЕВ

О РАСПОЛОЖЕНИИ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение. В работе рассматривается следующая краевая задача на собственные значения:

$$\Delta u+\lambda u=0 \text{ в } D, \tag{1}$$

$$u|_\gamma=0,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=0,\ 0<x<1}=0, \tag{2}$$

где D — область на двумерной плоскости, ограниченная сегментом