V. V. Petrov, Strengthenings of inequalities by Lyapunov, Hölder and Minkowski, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2013, Volume 420, 149–156

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

В. В. Петров

УСИЛЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ЛЯПУНОВА, ГЁЛЬДЕРА И МИНКОВСКОГО

1. Одним из важнейших неравенств для моментов случайной величины является неравенство Ляпунова $\beta_t^{1/t} \leqslant \beta_u^{1/u}$, где $\beta_r = \mathbf{E}\,|X|^r$ для любого $r > 0$, $0 < t < u$ и X – случайная величина. В [1] получено следующее неравенство: если $0 < t < u$, то

$$\beta_t^{1/t} \leqslant \gamma^{1/t-1/u}\beta_u^{1/u}, \tag{1}$$

где $\gamma = \mathbf{P}(X \neq 0)$. Если $\gamma < 1$ (что равносильно условию $\mathbf{P}(X = 0) > 0$), неравенство (1) сильнее неравенства Ляпунова. Знак равенства в (1) достигается для случайной величины X с двумя значениями 0 и 1, которым соответствуют вероятности $1-p$ и p $(0 < p < 1)$, так что $\beta_t = p$ для любого $t > 0$ и $\gamma = p$. Более простые по сравнению с [1] доказательства неравенства (1) приведены в первых главах книг [2] и [3]. Еще одно короткое доказательство (1) будет приведено ниже.

Неравенство (1) оказалось полезным инструментом при решении ряда проблем. В частности, с его помощью дано новое доказательство неравенства Чжуна–Эрдёша, дающего нижнюю оценку вероятности объединения произвольных событий [3, с. 203]. Применение последнего неравенства позволило предложить новый метод получения широких обобщений леммы Бореля–Кантелли [4]. Обобщение неравенства (1) содержится в [5] (см. также [6]). С помощью этого обобщения в [6] получены оценки снизу для хвостовых вероятностей вида $\mathbf{P}(X \geqslant \alpha)$ или $\mathbf{P}(|X| \geqslant \alpha)$ при различных предположениях о моментах случайной величины X. В свою очередь, эти оценки позволили обобщить неравенство Чжуна–Эрдёша [7].

В [3, с. 63] с помощью неравенства (1) получены оценки сверху для $\mathbf{E}\,|S_n|^p$, где $p > 1$, S_n есть сумма независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Эти оценки зависят от суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \neq 0)$ и могут быть лучшими, чем традиционные оценки.

Ключевые слова: неравенства Ляпунова, Гёльдера и Минковского, усиления и обобщения классических неравенств.

Работа поддержана грантом НШ-1216.2012.1.

Приведем некоторые другие известные неравенства для моментов. Если X и Y – случайные величины, $r > 1$, $1/r + 1/s = 1$, то
$$\mathbf{E}\,|XY| \leqslant (\mathbf{E}\,|X|^r)^{1/r}(\mathbf{E}\,|Y|^s)^{1/s} \tag{2}$$
(неравенство Гёльдера). Если $r \geqslant 1$, то
$$(\mathbf{E}\,|X+Y|^r)^{1/r} \leqslant (\mathbf{E}\,|X|^r)^{1/r} + (\mathbf{E}\,|Y|^r)^{1/r} \tag{3}$$
(неравенство Минковского).

Следующие теоремы содержат усиления этих неравенств, примыкающие к неравенству (1).

Пусть X и Y – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$.

Теорема 1. *Если* $r > 1$, $1/r + 1/s = 1$, *то*
$$\mathbf{E}\,|XY| \leqslant (\mathbf{E}\,|X|^r I(XY \neq 0))^{1/r}(\mathbf{E}\,|Y|^s I(XY \neq 0))^{1/s}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если* $r \geqslant 1$, *то*
$$(\mathbf{E}\,|X+Y|^r)^{1/r} \leqslant (\mathbf{E}\,|X|^r I(X+Y \neq 0))^{1/r} + (\mathbf{E}\,|Y|^r I(X+Y \neq 0))^{1/r}. \tag{5}$$

Здесь $I(B)$ – индикатор множества B, определенный равенствами $I(B) = I_B(\omega) = 1$ для $\omega \in B$, $I_B(\omega) = 0$ для $\omega \overline{\in} B$, так что, например, $\mathbf{E}\,|X|^r I(XY \neq 0) = \int\limits_H |X|^r d\mathbf{P}$, где $H = \{\omega \in \Omega : X(\omega)Y(\omega) \neq 0\}$, или, короче, $H = [XY \neq 0]$.

Поскольку $I(B) \leqslant 1$ для любого B, из (4) следует (2), а из (5) следует (3). Если $X \neq 0$ и $Y \neq 0$ почти наверное,то (4) совпадает с (2), а (5) совпадает с (3).

Следующий пример демонстрирует оптимальность неравенства (4) в том смысле, что существует случайный вектор (X, Y) с положительными вероятностями нуля для каждой из компонент, для которого неравенство (4) превращается в равенство. Пусть случайный вектор (X, Y) имеет значения $(0,0)$, $(a,0)$, $(b,0)$, $(0, a+b)$, $(a, a+b)$, где $a > 0$, $b > 0$, и пусть этим точкам соответствуют вероятности a/c, a/c, $(a+b)/c$, $(a+b)/c$, b/c, где $c = 4a+3b$. Тогда $\mathbf{E}\,|XY| = ab(a+b)/c$, $\int\limits_H |X|^r d\mathbf{P} = a^r b/c$, $\int\limits_H |Y|^s d\mathbf{P} = (a+b)^s b/c$. В силу равенства $1/r+1/s = 1$ левая часть неравенства (4) равна правой. Для этого примера неравенство Гёльдера таким свойством не обладает.

Теорема 1 позволяет дать короткое доказательство неравенства (1). В неравенстве (4) положим Y тождественно равным 1 и заменим X

на X^t, $t > 0$. Тогда получим $\mathbf{E}\,|X|^t \le (\mathbf{E}\,|X|^{rt})^{1/r}(\mathbf{P}(X \ne 0))^{1/s}$. Полагая $rt = u$ и замечая, что $u > t$, $1/(st) = 1/t - 1/(rt)$, приходим к неравенству (1).

Заметим, что неравенство (4) равносильно неравенству

$$\mathbf{E}\,|XY| \le (\mathbf{E}\,|X|^r I(Y \ne 0))^{1/r}(\mathbf{E}\,|Y|^s I(X \ne 0))^{1/s}. \tag{6}$$

Действительно, множество $[Y \ne 0]$ есть объединение множеств $[X = 0] \cap [Y \ne 0]$ и $[X \ne 0] \cap [Y \ne 0] = [XY \ne 0]$. Поэтому первые множители в правых частях (4) и (6) равны; такое же утверждение верно и для вторых множителей.

Приведем пример, иллюстрирующий оптимальность неравенства (5). Пусть случайный вектор (X, Y) имеет значения $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, которым соответствуют вероятности $(1 - 3p)/2$, p, p, p, $(1 - 3p)/2$, где $0 < p < 1/3$. Тогда $\mathbf{E}\,|X + Y|^r = 2^r(1 - 3p)$, и нетрудно проверить, что левая и правая части неравенства (5) равны. Для этого примера неравенство Минковского (3) таким свойством не обладает.

Теоремы 1 и 2 являются следствиями более общих теорем 4 и 5, формулировки и доказательства которых приведены ниже.

В рамках предложенного подхода можно усилить и некоторые другие неравенства. Следующая теорема содержит усиление неравенства Йенсена.

Теорема 3. *Пусть I – конечный или бесконечный открытый интервал, $g(x)$ – дважды дифференцируемая на I функция, удовлетворяющая условию $g''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in I$. Пусть X – случайная величина, принимающая с вероятностью 1 значения из интервала I и имеющая математическое ожидание m. Тогда*

$$\mathbf{E}\,g(X) \geqslant g(m)\mathbf{P}(X \ne 0) + mg'(m)\mathbf{P}(X = 0). \tag{7}$$

Если $\mathbf{P}(X = 0) = 0$, то (7) сводится к неравенству Йенсена $g(\mathbf{E}\,X) \leqslant \mathbf{E}\,g(X)$.

Условия, налагаемые на функцию g, равносильны выпуклости дважды дифференцируемой функции g на I (см., например, [8, с. 171].

Для доказательства теоремы 3 используем неравенство $g(x) \geqslant g(c) + g'(c)(x - c)$ для любых x, $c \in I$, вытекающее из сделанных предположений и формулы Тейлора. Положим здесь $x = X$, $c = m$ и проинтегрируем по области $G = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \ne 0\}$ (считая, что случайная величина X определена на пространстве элементарных событий Ω).

Тогда получим

$$\int\limits_G g(X)d\mathbf{P} \geqslant g(m)\mathbf{P}(G) + g'(m)\int\limits_G (X-m)d\mathbf{P}$$
$$= g(m)\mathbf{P}(X \neq 0) + mg'(m)(1-\mathbf{P}(G)).$$

Отсюда следует (7).

Если $\mathbf{P}(X = 0) = 0$ либо $g(m) \leqslant mg'(m)$, то правая часть (7) не меньше, чем $g(m)$, т.е. неравенство (7) не слабее, чем неравенство Йенсена. Действительно, тогда

$$g(m)\mathbf{P}(X \neq 0) + mg'(m)\mathbf{P}(X = 0) - g(m)$$
$$= (mg'(m) - g(m))\mathbf{P}(X = 0)) \geqslant 0.$$

Если же $g(m) < mg'(m)$ и $\mathbf{P}(X = 0) > 0$, то неравенство (7) сильнее неравенства Йенсена.

Полагая в теореме 3 $g(x) = x^2$, приходим к неравенству $(\mathbf{E}\,X)^2 \leqslant \mathbf{E}\,(X^2)/(1+\mathbf{P}(X=0))$, усиливающему неравенство $(\mathbf{E}\,X)^2 \leqslant \mathbf{E}\,(X^2)$ в случае $\mathbf{P}(X = 0) > 0$, но более слабому, чем неравенство $(\mathbf{E}\,X)^2 \leqslant \gamma\mathbf{E}\,(X^2)$, где $\gamma = \mathbf{P}(X \neq 0)$, доставляемое неравенством (1).

2. Неравенства (4) и (5) можно обобщить.

Пусть X – некоторое непустое множество элементов, F – выделенная на нем σ-алгебра множеств, μ – заданная на F неотрицательная σ-аддитивная функция. Пусть f и g – заданные на X действительные F-измеримые функции, D – произвольное множество из F.

Теорема 4. *Если $r>1$, $1/r+1/s=1$, то*

$$\int\limits_D |fg|\,d\mu \leqslant \Big(\int\limits_H |f|^r d\mu\Big)^{1/r}\Big(\int\limits_H |g|^s d\mu\Big)^{1/s}, \tag{8}$$

где $H = \{x \in D : f(x)g(x) \neq 0\}$.

Теорема 5. *Если $r \geqslant 1$, то*

$$\Big(\int\limits_D |f+g|^r d\mu\Big)^{1/r} \leqslant \Big(\int\limits_M |f|^r d\mu\Big)^{1/r} + \Big(\int\limits_M |g|^r d\mu\Big)^{1/r}, \tag{9}$$

где $M = \{x \in D : f(x)+g(x) \neq 0\}$.

В неравенствах (8) и (9) можно заменить множества H и M более широким множеством D. Поскольку $X \in F$, можно также заменить в (8) и (9) множество D множеством X, и мы приходим к традиционным формам неравенств Гёльдера и Минковского. Неравенства (8) и (9) являются обобщениями и усилениями классических неравенств Гёльдера и Минковского, а также неравенств (2) и (3).

Подобные обобщения в терминах анализа некоторых результатов, относящихся к оценкам роста почти наверное сумм зависимых случайных величин [9], можно найти в [10], где получены оценки сумм измеримых функций в терминах сумм интегралов от этих функций, имеющие место почти всюду.

Обратимся теперь к частному случаю, когда измеримое пространство с мерой (X, F, μ) есть вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbf{P})$. Пусть X и Y – случайные величины, определенные на Ω. После замены в (8) и (9) D на Ω, μ на $\mathbf{P}$, f и g на X и Y соответственно, приходим к неравенствам (4) и (5). Таким образом, теоремы 1 и 2 являются следствиями теорем 4 и 5.

Если воспользоваться одной из традиционных форм неравенства Гёльдера, соответствующей неравенству (8) с одной и той же (произвольной) областью интегрирования, то, зафиксировав произвольное множество D, определим H таким же образом, как в теореме 4, и в качестве области интегрирования во всех интегралах возьмем H. Имеет место равенство

$$\int_H |fg|\, d\mu = \int_D |fg|\, d\mu.$$

Отсюда следует (8). Аналогичное замечание справедливо по поводу неравенства (9). Приведем доказательство теоремы 4, не основанное на какой-либо форме неравенства Гёльдера из математического анализа. Следуя [8], используем неравенство $|bc| \leqslant |b|^r/r + |c|^s/s$ для любых b и c, где $r > 1$, $1/r + 1/s = 1$. Будем считать, что интегралы в правой части (8) отличны от нуля, поскольку в противном случае неравенство (8) очевидно. Положим

$$b = f\Big(\int_H |f|^r\, d\mu\Big)^{-1/r}, \quad c = g\Big(\int_H |g|^s\, d\mu\Big)^{-1/s}$$

и проинтегрируем обе части полученного неравенства по области H. Тогда получим

$$\int\limits_H |fg|\,d\mu \leqslant (1/r+1/s)\Big(\int\limits_H |f|^r\,d\mu\Big)^{1/r}\Big(\int\limits_H |g|^s\,d\mu\Big)^{1/s}.$$

Интеграл в левой части этого неравенства не изменится при замене H множеством D. Отсюда с учетом равенства $1/r+1/s=1$ следует (8).

Доказательство теоремы 5 основано на применении неравенства (8) к правой части неравенства

$$\int\limits_D |f+g|^r\,d\mu \leqslant \int\limits_D |f|\,|f+g|^{r-1}\,d\mu + \int\limits_D |g|\,|f+g|^{r-1}\,d\mu,$$

где $r>1$. В силу (8) правая часть не превосходит

$$\Big(\int\limits_{H_1} |f|^r d\mu\Big)^{1/r}\Big(\int\limits_{H_1} |f+g|^{(r-1)s} d\mu\Big)^{1/s} + \Big(\int\limits_{H_2} |g|^r d\mu\Big)^{1/r}\Big(\int\limits_{H_2} |f+g|^{(r-1)s} d\mu\Big)^{1/s},$$

где $H_1=\{x\in D: f(x)(f(x)+g(x))^{r-1}\neq 0\}$, $H_2=\{x\in D: g(x)(f(x)+g(x))^{r-1}\neq 0\}$, s определено равенством $1/r+1/s=1$. В полученном неравенстве можно увеличить области интегрирования, заменив H_1 и H_2 множеством $\{x\in D: f(x)+g(x)\neq 0\}$. С учетом равенства $(r-1)s=r$ отсюда следует (9). В случае $r=1$ неравенство (9) очевидно.

Приведем одно следствие теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть (X,F,μ) – измеримое пространство с мерой, f – заданная на X действительная измеримая функция, $D\in F$. Положим $m_r=\int\limits_D |f|^r\,d\mu$ для любого $r>0$, $\lambda=\mu\{x\in D: f(x)\neq 0\}$. Если $0<t<u$, то*

$$m_t^{1/t} \leqslant \lambda^{1/t-1/u} m_u^{1/u}. \qquad (10)$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству неравенства (1) с помощью теоремы 1; вместо (4) теперь будет использовано неравенство (8) при $g\equiv 1$ и замене f на f^t, $t>0$. Применение теоремы 6 к ситуации, когда измеримое пространство с мерой есть вероятностное пространство $(\Omega,F,\mathbf{P})$, f – случайная величина X, определенная на Ω, и $D = \Omega$, приводит к исходному для нас неравенству (1). Неравенство (10) представляет собой обобщение и усиление неравенства Ляпунова для моментов случайной величины.

В частности, полагая в (10) $t = 1$, $u = 2$, получаем

$$\Big(\int_D |f|\, d\mu \Big)^2 \leqslant \lambda \int_D |f|^2\, d\mu. \tag{11}$$

В свою очередь, из (11) следует, например, что

$$(\mathbf{E}\,|Y|)^2 \leqslant \mathbf{P}(Y \neq 0)\mathbf{E}\,(Y^2)$$

для произвольной случайной величины Y.

3. Теоремы 1, 2 и вариант теоремы 3 опубликованы в [11] в числе докладов участников Ташкентской конференции по теории вероятностей. Эти же результаты приведены в дополнениях к главе 1 книги [3].

Литература

1. В. В. Петров, *Одно неравенство для моментов случайной величины.* — Теория вероятн. и ее примен. **20** (1975), 402–403.
2. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М., 1987.
3. V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory.* Oxford University Press, New York, 1995.
4. V. V. Petrov, *A generalization of the Borel–Cantelli lemma.* — Statist. Probab. Letters **67** (2004), 233–239.
5. B. C. Arnold, *Some elementary versions of the Lyapunov inequality.* — SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), 117–118.
6. V. V. Petrov, *On lower bounds for tail probabilities.* — J. Statist. Planning Inference **137** (2007), 2703–2705.
7. В. В. Петров, *Обобщение неравенства Чжуна–Эрдёша для вероятности объединения событий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2007), 147–150.
8. М. Лоэв, *Теория вероятностей.* ИЛ, М., 1962.
9. В. В. Петров, *О порядке роста сумм зависимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 358–361.
10. В. В. Петров, *О росте сумм измеримых функций.* — Литовский матем. сб. **16** (1976), 189–192.
11. В. В. Петров, *Некоторые неравенства для моментов.* — Известия АН Узбек. ССР, сер. физ.-матем. наук No. 5 (1982), 358–361.

Petrov V. V. Strengthenings of inequalities by Lyapunov, Hölder and Minkowski.

Some strengthenings and generalizations of classical inequalities due to Lyapunov, Hölder and Minkowski are given in probabilistic and also in analytical terms.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: petrov2v@mail.ru

Поступило 1 октября 2013 г.