КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ПЛЕЩИНСКАЯ И. Е.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

В данной статье для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &u_x - v_y = au + bv, \\ &u_y + \operatorname{sgn} y \cdot v_x = -bu + \operatorname{sgn} y \cdot av \end{aligned} \tag{1}$$

с вещественными постоянными коэффициентами a и b путем приведения к краевой задаче Римана решается задача Трикоми для некоторых неограниченных областей специального вида.

1°. Пусть D — область, ограниченная вещественной полуосью $\Gamma: y=0,\ x\leqslant 0$ и характеристикой системы (1) $L_1: x+y=0$. Обозначим эллиптическую часть области D через D_1, гиперболическую — через D_2.

Рассмотрим задачу Трикоми, состоящую в отыскании пары функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ при условиях:

1) в области D при $y\neq 0$ u, v — решение системы (1);

2) u и v непрерывны и ограничены в $\bar{D}$;

3) на луче Γ и характеристике L_1 $u(x, y)$ принимает заданные значения

$$u|_\Gamma = f(x),\ u|_{L_1} = \varphi(x),\ f(0)=\varphi(0); \tag{2}$$

$$f(x)\in H[-\infty, 0];\ \varphi'(x)\in H[0, +\infty];\ f(-\infty)=\varphi(+\infty); \tag{3}$$

постоянные a и b в системе (1) имеют разные знаки. Для определенности, не ограничивая общности, будем считать, что

$$a\leqslant 0,\ b\geqslant 0. \tag{4}$$

Пусть $y<0$. Используя схему статьи [1], введем характеристические переменные $\xi = x+y$, $\eta = y-x$ и новые искомые функции $W=-2(u-v)$, $T=-2(u+v)$. Таким путем в гиперболической области решение системы (1), удовлетворяющее второму из краевых условий (2), получим в виде

$$
\begin{gathered}
u(x,\ y)=\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)(x+y)\right]\cdot\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\\
-\frac{1}{4}\exp\left[-\frac{1}{2}(a+b)(y-x)\right]N(x+y)+\frac{1}{4}N(0)\exp(ax-by),\\
v(x,\ y)=-\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)(x+y)\right]\cdot\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\\
-\frac{1}{4}\exp\left[-\frac{1}{2}(a+b)(y-x)\right]N(x+y)-\frac{1}{4}N(0)\exp(ax-by),
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где N — неизвестная функция, $N(0)$ — произвольная постоянная.

При $y>0$ представим систему (2) в виде одного комплексного уравнения

$$
\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=AU,\ U=u+iv,\ \ A=\frac{1}{2}(a-ib). \tag{6}
$$

Тогда, как это было показано в статье И. Н. Векуа [2], решение уравнения (6) запишется так:

$$
U\equiv u+iv=C(z)\cdot\exp\left[\frac{1}{2}(a-ib)\bar{z}\right], \tag{7}
$$

где $C(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Чтобы определить $C(z)$, используем первое из краевых условий (2) и свойство непрерывности функций $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ на положительной вещественной полуоси. Подстановка в это краевое условие выражения

$$
u(x,\ y)=\operatorname{Re}\left\{C(z)\cdot\exp\left[\frac{1}{2}(a-ib)\bar{z}\right]\right\},
$$

взятого из (7), даст граничное условие для $C(z)$ на Γ; граничное условие на AB получается путем приравнивания выражений $u(x,\ 0)-v(x,\ 0)$, найденных из (5) и (7). Таким путем приходим к следующей задаче Гильберта.

В области D_1 требуется найти аналитическую функцию $C(z)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$
\begin{gathered}
\exp\left[\frac{1}{2}(a-ib)x\right]C(x)+\exp\left[\frac{1}{2}(a+ib)x\right]\overline{C(x)}=2f(x),\\
-\infty<x\leqslant 0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$$
(1+i)\exp\left[\frac{1}{2}(a-ib)x\right]C(x)+(1-i)\exp\left[\frac{1}{2}(a+ib)x\right]\overline{C(x)}=
$$

$$= 4\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)x\right]\cdot\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + N(0)\exp(ax), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Соотношение (7) показывает, что u, v будут ограниченными в верхней полуплоскости, если

$$|C(z)| = O\left(\exp\left[-\frac{1}{2}(ax-by)\right]\right). \tag{9}$$

Значит, $C(z)$ должна быть решением задачи Гильберта (8), непрерывным в точках разрыва ее коэффициентов ($z=0$ и $z=\infty$) и удовлетворяющим условию (9).

Будем искать решение задачи (8) в таком виде

$$C(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}(a+ib)z\right]\cdot C_1(z), \tag{10}$$

где аналитическая функция $C_1(z)$ в силу условия (9) должна быть ограничена в D_1. На основании (10) соотношения (8) можно переписать так

$$\exp(-ibx)\cdot C_1(x) + \exp(ibx)\cdot\overline{C_1(x)} = 2f(x), \quad -\infty < x \leqslant 0,$$

$$(1+i)\exp(-ibx)\cdot C_1(x) + (1-i)\exp(ibx)\cdot\overline{C_1(x)} = \tag{11}$$

$$= 4\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)x\right]\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + N(0)\exp(ax), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Сведем полученную краевую задачу (11) к задаче Римана. Для этого введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \overline{C_1(\bar z)}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда и из условия симметрии $\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar z)}$ находим $\Phi^+(x) = \overline{\Phi^-(x)} = C_1(x)$, $-\infty < x < +\infty$, и от задачи Гильберта (11) приходим к задаче Римана с краевым условием

$$\Phi^+(x) = G_0(x)G_1(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{13}$$

$$G_0(x) = \exp(2ibx), \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$G_1(x) = \{-1, \ -\infty < x < 0; \ i, \ 0 < x < +\infty\};$$

$$g(x) = \begin{cases} 2\exp(ibx)\cdot f(x), \quad -\infty < x < 0, \\ 2(1-i)\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)x + ibx\right]\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \\ + \frac{1-i}{2}N(0)\exp[(a+ib)x], \quad 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение будем искать в классе кусочно-аналитических симметричных функций, непрерывных в точках $z=0$ и $z=\infty$.

Рассмотрим сначала однородную задачу

$$\Phi^+(x)=G_0(x)G_1(x)\Phi^-(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

Чтобы построить каноническую функцию $X_0(z)$, удовлетворяющую условию

$$X_0^+(x)=G_0(x)X_0^-(x),\quad -\infty<x<+\infty,$$

надо вычислить аналог интеграла типа Коши по бесконечному промежутку с плотностью $\ln G_0(x)=2ibx$, взяв в качестве ядра произведение $(x-z)^{-1}$ на z/x. Этот интеграл

$$\gamma(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}2ib\frac{dx}{x-z}$$

будет сходящимся. Вычисляя его с помощью формулы (4.23) из монографии [3], с. 52, получим

$$\gamma(z)=\begin{cases} ibz, & \operatorname{Im} z>0,\\ -ibz, & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

Тогда

$$X_0(z)=\exp[\gamma(z)]=\begin{cases}\exp(ibz), & \operatorname{Im} z>0,\\ \exp(-ibz), & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

Легко видеть, что функция $X_0(z)$ условию симметрии удовлетворяет и при $b\geqslant 0$ на бесконечности ограничена.

Перейдем к построению канонической функции $X_1(z)$ задачи

$$X_1^+(x)=G_1(x)X_1^-(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

Эту задачу удобнее решать на вспомогательной плоскости ζ, на которую легко перейти с помощью преобразования $\zeta=(z-i)/(z+i)$. При этом полуплоскость D_1 перейдет во внутренность единичного круга с центром в начале координат, луч Γ перейдет в верхнюю полуокружность, а положительная вещественная полуось — в нижнюю.

Разбивая эту задачу на две: одну с коэффициентом -1 на верхней полуокружности, другую — с коэффициентом i на нижней полуокружности, в конечном итоге в плоскости z получим $X_1(z)=\sqrt{z}\sqrt[4]{\frac{1}{z}}$, где в радикалах разрезы соответственно $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Функция $X_1(z)$ симметрична, в точке $z=0$ ограничена, а в точке $z=\infty$ имеет бесконечность порядка меньше единицы.

Каноническую функцию исходной задачи получим в виде

$$X(z) = X_0(z) X_1(z) = z^{\frac{1}{2}} \cdot z^{-\frac{1}{4}} \begin{cases} \exp(ibz), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \exp(-ibz), & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

При решении неоднородной задачи Римана (13) переписываем краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = \frac{g(x)}{X^+(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{14}$$

Здесь отношение $\Phi(z)/X(z)$ на бесконечности обращается в нуль. Следовательно, задача (14) имеет единственное симметричное исчезающее на бесконечности решение

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x - z} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{0} \frac{f(x)}{X_1^+(x)} \frac{dx}{x - z} -$$

$$- \frac{1+i}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\exp(ax)}{X_1^+(x)} \left\{ 2\exp\left[-\frac{1}{2}(a+b)x\right] \cdot \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{N(0)}{2} \right\} \frac{dx}{x - z}. \tag{15}$$

Из последнего представления видно, что в силу условий (3), (4) и свойств $X_1(z)$ все интегралы в формуле (15) сходятся. Однако, в силу обращения $X_1(z)$ в точке $z = 0$ в нуль и из-за разрыва $g(x)$ в $x = 0$, функция $\Psi(z)$ в этой точке имеет особенность того же типа, что и плотность $g(x)/X^+(x)$. Обеспечить непрерывность $\Psi(z)$ в точке $z = 0$ можно лишь за счет условия $g(+0) = g(-0)$, которое выполняется только при $N(0) = 0$ и $f(0) = \varphi(0) = 0$. При этих условиях единственное всюду ограниченное и непрерывное вплоть до границы решение задачи (13) получится в виде

$$\Phi(z) = X(z)\, \Psi(z).$$

Этому единственному решению формулы (12), (10) и (7) поставят в соответствие единственное решение исходной задачи в D_1. В области D_2 по известной $C(z)$ единственное решение получится по формулам (5).

Для дифференцируемости найденного решения необходимо потребовать дополнительно к условиям (3), чтобы $\varphi_1(x)$, $\varphi_1'(x) \in H[0, +\infty]$, где $\varphi_1(x) = g(x)/X^+(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$, и чтобы $\varphi(x) = O(x^\lambda)$, $\lambda > \frac{1}{4}$, в окрестности нуля. В случае конечных контуров эти условия были получены в работе [4].

2°. Рассмотрим теперь случай, когда в качестве D взята область, ограниченная характеристиками $L_1: x - y = 0$ и

$L_2: x+y=0$ системы (1). Здесь D_1 по-прежнему верхняя полуплоскость, а гиперболическая область D_2 состоит из двух углов: левого D_2' и правого D_2''.

Требуется найти пару функций (u, v) при условиях:

1) в области D при $y \neq 0$ u, v — решение системы (1), в которой $b \geqslant 0$;

2) u, v непрерывны и ограничены в $\bar{D}$;

3) на характеристиках L_1 и L_2 $u(x, y)$ принимает заданные значения:

$$u|_{L_1} = f(x),\ u|_{L_2} = \varphi(x),\ f(0) = \varphi(0);$$

$$f'(x) \in H[-\infty, 0];\quad \varphi'(x) \in H[0, +\infty];\ f(-\infty) = \varphi(+\infty). \tag{16}$$

Рассуждая как в предыдущей задаче, получим соотношение вида (7) между функциями u и v в области D_1. Что касается области D_2, то в D_2'' выражение $u(x, y)$ и $v(x, y)$ через произвольные пока $N(x+y)$ и $N(0)$ запишется по формулам (5), а в D_2' — по аналогичным формулам через неизвестные $M(y-x)$ и $M(0)$. Используя эти соотношения и непрерывность $v(x, y)$ в точке $z=0$, получим

$$M(0) = -[N(0) + 4\varphi(0)]. \tag{17}$$

Применяя рассмотренный ранее прием, придем к задаче Гильберта:

В области D_1 требуется найти аналитическую функцию $C(z)$, удовлетворяющую на границе следующим условиям:

$$(1-i)\exp\left[\frac{1}{2}(a-ib)x\right]C(x) + (1+i)\exp\left[\frac{1}{2}(a+ib)x\right]\overline{C(x)} =$$

$$= 4\exp\left[\frac{1}{2}(a+b)x\right]f\left(\frac{x}{2}\right) + M(0)\exp(ax),\ -\infty < x \leqslant 0,$$

$$(1+i)\exp\left[\frac{1}{2}(a-ib)x\right]C(x) + (1-i)\exp\left[\frac{1}{2}(a+ib)x\right]\overline{C(x)} =$$

$$= 4\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)x\right]\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + N(0)\exp(ax),\ 0 \leqslant x < +\infty.$$

Здесь $C(z)$ должна удовлетворять тому же условию (9). Будем искать ее в виде (10). Тогда для вспомогательной функции (12) получим краевую задачу Римана с разрывными коэффициентами:

$$\Phi^+(x) = G_0(x)G_1(x)\Phi^-(x) + g(x),\ -\infty < x < +\infty, \tag{18}$$

$$G_0(x) = \exp(2ibx),\ -\infty < x < +\infty;$$

$$G_1(x) = \{-i,\ -\infty < x < 0;\ i,\ 0 < x < +\infty\};$$

$$
g(x)=\begin{cases} 2(1+i)\exp\left[\frac{1}{2}(a+b)x+ibx\right]f\left(\frac{x}{2}\right)+ \\ +\frac{1+i}{2}M(0)\cdot\exp[(a+ib)x], \ -\infty<x<0, \\ 2(1-i)\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)x+ibx\right]\cdot\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+ \\ +\frac{1-i}{2}N(0)\cdot\exp[(a+ib)x], \ 0<x<+\infty. \end{cases} \tag{19}
$$

Решение ищем в том же классе, что и в случае 1°.

Каноническая функция задачи (18) имеет вид

$$
X(z)=iz^{-\frac{1}{8}}\cdot z^{-\frac{1}{8}}\cdot z\begin{cases}\exp(ibz), & \operatorname{Im} z>0, \\ \exp(-ibz), & \operatorname{Im} z<0,\end{cases}
$$

где в качестве значений $z^{-\frac{1}{8}}$ выбрана в первом случае однозначная ветвь в плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$, а во втором — в плоскости с разрезом вдоль полуоси $(0, +\infty)$.

Функция $X(z)$ всюду конечна, кроме точки $z=\infty$, где она имеет бесконечность порядка меньше единицы. Она удовлетворяет условию $X(z)=-\overline{X(\bar{z})}$.

Общее решение задачи Римана имеет вид

$$
\Phi(z)=X(z)\Psi(z), \tag{20}
$$

где, как и раньше,

$$
\Psi(z)=\Phi(z)/X(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\frac{dx}{x-z}.
$$

Легко проверить, что $\Psi(z)=-\overline{\Psi(\bar{z})}$.

Обеспечить непрерывность функции $\Phi(z)$ в точке $z=0$ можно за счет выполнения условия $g(+0)=g(-0)$, которое в данном случае в силу соотношений (17) и (19) и равенства $f(0)=\varphi(0)$ имеет вид

$$
M(0)=N(0)=0. \tag{21}
$$

Если интеграл $\Psi(z)$ расписать подробно, то получим, что при выполнении условия (21), для которого необходимо выполнение условия $f(0)=\varphi(0)=0$, входящие в выражение $\Psi(z)$ интегралы будут сходиться, если

$$
0\leqslant a\leqslant b.
$$

В этом случае единственное решение задачи (18) определится формулой (20), если положить там $M(0)=N(0)=0$ и считать $0\leqslant a\leqslant b$.

По известной $\Phi(z)$ решение исходной задачи для системы (1) строится известным путем.

Дифференцируемость функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ и в этом случае обеспечивается условиями (16) и дополнительным требованием: $\varphi_1(x)$, $\varphi_1'(x) \in H[-\infty, 0]$, где $\varphi_1(x) = g(x)/X^+(x)$, $-\infty \leqslant x \leqslant 0$; $\varphi_2(x)$, $\varphi_2'(x) \in H[0, +\infty]$, где $\varphi_2(x) = g(x)/X^+(x)$, $0 \leqslant x \leqslant +\infty$; $\varphi(x) = O(x^\lambda)$, $\lambda > \frac{1}{2}$, в окрестности нуля.

3°. Пусть D — область, ограниченная мнимой полуосью $\Gamma_1: x=0$, $y \geqslant 0$, лучом $\Gamma_2: x=1$, $y \geqslant 0$ и характеристиками $L_1: x+y=0$ и $L_2: x-y=1$ системы (1).

Требуется определить пару функций (u, v) при условиях:

1) в области D при $y \neq 0$ u, v — решение системы (1);

2) u, v непрерывны и ограничены в $\bar{D}$;

3) на лучах Γ_1, Γ_2 и характеристике L_1 $u(x, y)$ принимает заданные значения:

$$u\big|_{\Gamma_1} = \psi,\ u\big|_{\Gamma_2} = f,\ u\big|_{L_1} = \varphi(x),\ \psi(0) = \varphi(0);$$

$$\psi \in H \text{ на } \Gamma_1,\ f \in H \text{ на } \Gamma_2,\ \varphi'(x) \in H \text{ на } [0, 1]; \tag{22}$$

$$|\psi \cdot \exp[(b+\varepsilon)y]| < \text{const},\ |f \cdot \exp[(b+\varepsilon)y] < \text{const},$$

$$\text{любое } \varepsilon > 0,\ y > y_0;$$

4) a — любое вещественное число, $b \geqslant 0$. (23)

Известным уже образом от исходной задачи для системы придем в полуполосе D_1 сначала к краевой задаче Гильберта для аналитической функции $C_1(z)$, а затем — к задаче Римана с разрывными коэффициентами для кусочно-аналитической функции

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1(z), & z \in D_1, \\ \overline{C_1(\bar{z})}, & z \in D_1^*, \end{cases}$$

которая определена на всей плоскости по закону [5]

$$\Phi(\pm z + 2k) = \Phi(z),\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots,$$

а область D_1^* симметрична области D_1 относительно вещественной оси.

Функция $\Phi(z)$ является функцией четной, периодической с основным периодом 2 и симметричной относительно вещественной оси. Области D_1 и D' (через D' обозначена полуполоса, симметричная D_1 относительно мнимой оси) составляют фундаментальную область группы $\{\pm z + 2k\}$, $k=0, \pm 1, \dots$.

Краевые условия для $\Phi(z)$ имеют вид

$$\Phi^+(t) = G_0(t)\, G_1(t)\, \Phi^-(t) + g(t),\ t \in \partial D_1,$$

$$G_0(t) = \exp[(a+ib)t - (a-ib)\bar{t}],\ t \in \partial D_1,$$

$$G_1(t) = \{-1,\ t \in \Gamma_1;\ -1,\ t \in \Gamma_2;\ i,\ t \in (0, 1)]\},$$

$$
g(t)=\begin{cases} 2\exp(at)\cdot\psi(t), \ t\in\Gamma_1, \\ 2\exp(at-a+ib)\cdot f(t), \ t\in\Gamma_2, \\ 2(1-i)\exp\left[\frac{1}{2}(a-b)t+ibt\right]\cdot\varphi\left(\frac{t}{2}\right)+ \\ +\frac{1-i}{2}N(0)\exp\left[(a+ib)t-\frac{1}{2}(a+b)\right], \ t\in(0, 1). \end{cases}
$$

При решении полученной задачи необходимо учесть, что функция $\Phi(z)$ периодическая и четная, поэтому в качестве аналога ядра Коши будем брать следующее выражение [6]

$$
K(z, t)=\frac{\pi}{2}\left\{\operatorname{ctg}\frac{t-z}{2}\pi+\operatorname{ctg}\frac{t+z}{2}\pi\right\}.
$$

Заметим, что это ядро обращается в нуль на конце полосы периода функции $\Phi(z)$.

Весь счет удобно проводить в плоскости ζ, на которую можно перейти с помощью конформного преобразования $\zeta=\exp(i\pi z)$. При этом область D_1 перейдет в область $D_{1\zeta}: |\zeta|<1$, $\operatorname{Im}\zeta>0$. Ядро $K(z, t)$ в плоскости ζ будет иметь следующий вид

$$
K(\zeta, \tau)=\frac{\pi i}{2}\left\{\frac{\tau+\zeta}{\tau-\zeta}+\frac{\tau\zeta+1}{\tau\zeta-1}\right\}\frac{1}{\tau}.
$$

Не приводя выкладок, запишем только вид канонической функции $X_0(z)$ в плоскости z

$$
X_0(z)=\begin{cases} \exp[(a+ib)z], \ z\in D_1, \\ \exp[(a-ib)z], \ z\in D_1^*, \\ \exp[(-a+ib)z], \ z\in D', \\ \exp[-(a+ib)z], \ z\in D'^*, \end{cases}
$$

где $X_0^+(t)=G_0(t)X_0^-(t)$, $t\in\partial D_1$ (D'^* симметрична D' относительно вещественной оси).

При построении функции $X_1(z)$ по условию $X_1^+(t)=G_1(t)X_1^-(t)$, $t\in\partial D_1$, разбиваем эту задачу на три: с коэффициентом -1 на Γ_1, с таким же коэффициентом на Γ_2 и с коэффициентом i на отрезке $(0, 1)$. В той же плоскости ζ функция $X_1(\zeta)$ будет иметь следующий вид

$$
X_1(\zeta)=\sqrt[4]{\frac{\zeta}{\zeta+1}}\sqrt[4]{\frac{1}{\zeta+1}}\sqrt[4]{\frac{\zeta-1}{\zeta}}\sqrt[4]{1-\zeta}\sqrt[8]{\frac{(\zeta+1)^2}{(\zeta-1)(1-\zeta)}},
$$

где под первым корнем понимается однозначная ветвь в плоскости с разрезом по $\Gamma_{2\zeta}$, под вторым — однозначная ветвь в плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$, у третьего и четвертого корня разрезы соответственно по $\Gamma_{1\zeta}$ и по $(1, +\infty)$, а у пятого — разрез по верхней полуокружности.

Возвращаясь в плоскость z, получим функцию $X_1(z)$, симметричную относительно вещественной оси, ограниченную в нуле и бесконечности и имеющую интегрируемую особенность в единице.

Произведение $X(z) = X_0(z) X_1(z)$ будет канонической функцией однородной задачи Римана того же класса, что и $X_1(z)$.

С помощью известной канонической функции частное симметричное решение неоднородной задачи Римана можно записать в виде

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2}[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(\bar{z})}], \quad \Phi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{g(t)}{X^+(t)} K(z, t)\,dt.$$

Общее ограниченное на бесконечности решение этой задачи дается формулой

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + CX(z). \tag{24}$$

Здесь в силу условия симметрии C есть вещественная постоянная. Полагая $\Psi(z) = \Phi^*(z)/X(z)$, перепишем (24) так

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) + C\}. \tag{25}$$

Так как решение $\Phi(z)$ должно быть ограничено в точке $z = 1$, то в формуле (25) выражение в фигурных скобках должно в этой точке равняться нулю: $\Psi(1) + C = 0$. Отсюда C определяется единственным образом

$$C = -\Psi(1) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{g(t)}{2X^+(t)}\{K(1, t)\,dt + \overline{K(1, t)}\,d\bar{t}\}.$$

Тогда решение (25) примет вид

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) - \Psi(1)\}. \tag{26}$$

Нетрудно убедиться, что вблизи $z = 1$ имеет место представление $\Psi(z) - \Psi(1) = \tilde{\Psi}(z)(z-1)$, где $\tilde{\Psi}(z)$ ограничена в этой точке. Поэтому функция (26) в точке $z = 1$ ограничена и непрерывна.

При исследовании функции $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = 0$ запишем $\Psi(z)$ в виде

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_1(-z), \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{4i}\int_{\partial D_1} \frac{g(t)}{X^+(t)} \operatorname{ctg}\frac{t-z}{2}\pi\,dt. \tag{27}$$

Из (27) видно, что достаточно провести такое исследование лишь для $\Psi_1(z)$. Но эту функцию на основании представления

$$\operatorname{ctg}\frac{t-z}{2}\pi = \frac{2}{\pi(t-z)} + P(t, z),$$

где функция $P(t, z)$ всюду на ∂D_1 непрерывна, можно переписать так

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_1} \frac{g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t - z} + \Psi_0(z),$$

здесь $\Psi_0(z)$ — вполне определенная непрерывная в нуле функция. Но интеграл типа Коши в окрестности $z = 0$, когда у плотности в этой точке степенная интегрируемая особенность сочетается с разрывом первого рода, исследуется известным образом. Таким путем получим, что функция $\Phi(z)$ будет непрерывна в нуле тогда и только тогда, если $g(+0) = g(-0)$. В данном случае отсюда получаем условие $N(0) = 0$ и ограничение $\psi(0) = \varphi(0) = 0$. При этих ограничениях единственное решение задачи Римана, удовлетворяющее всем требованиям, дается формулой (26). Сходимость интегралов, входящих в $\Psi(z)$, обеспечивается условиями (22) и (23).

Нахождение по известной $\Phi(z)$ искомых $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не представляет трудности.

Те же условия (22) обеспечивают и дифференцируемость функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, если еще потребовать, чтобы $\varphi_1(t)$, $\varphi_1'(t) \in H[0, 1]$, где $\varphi_1(t) = g(t)/2X^+(t)$, $t \in [0, 1]$, и чтобы $\varphi(x) = O(x^\lambda)$, $\lambda > \frac{1}{4}$, в окрестности нуля.

Во всех трех рассмотренных задачах решение единственно. Это следствие эквивалентности этих задач соответствующим задачам Гильберта.

В заключение приношу благодарность доценту Ю. М. Крикунову и профессору Л. И. Чибриковой за ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теут О. М. Задача Коши для одной системы гиперболического типа.— В кн.: Краевые задачи теории аналитических функций. Казань, Изд-во КГУ, 1962.
2. Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Матем. сб. 31/73 : 2, 1952.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций.— В кн.: Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань, Изд-во КГУ, 1962.
5. Чибрикова Л. И. Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей.— „Уч. зап. КГУ“, 1957, т. 117, кн. 2, с. 22—26.
6. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций.—„Уч. зап. КГУ“, 1956, т. 116, кн. 4, с. 59—109.