ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XXIII 1987 Вып. 4

УДК 621.391.156

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ДЕКОДИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Балакирский В. Б.

Исследуется трудоемкость алгоритма последовательного декодирования при использовании изменяющегося во времени линейного сверточного кода. Получена асимптотическая верхняя граница для распределения числа вычислений, производимых декодером в начальном узле кодовой решетки, с точностью до константы совпадающая с известной границей для линейных древовидных кодов [1].

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассматривается передача информации с помощью изменяющегося во времени линейного сверточного кода, имеющего длину кодового ограничения ν и скорость $R=\ln 2/n_0$ нат на символ канала по ДСК с переходной вероятностью p. Пусть $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots)$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots)$ и $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots)$, где $u_j\in\{0, 1\}$, x_j, $y_j\in\{0, 1\}^{n_0}$, $j=1, 2, \dots$ обозначают информационную, кодовую и принятую последовательности соответственно. Каждой информационной последовательности взаимно однозначно сопоставлен путь в кодовой решетке сверточного кода. Поэтому переданную информационную последовательность будем называть также правильным путем, а последовательности, которым сопоставлены пути, отличающиеся от правильного во всех ребрах,— путями из первого неправильного поддерева. Пусть

$$\mathbf{u}_j=(u_{j-\nu}, \dots, u_j), \mathbf{x}_j=(x_1, \dots, x_j), \mathbf{y}_j=(y_1, \dots, y_j), j=1, 2, \dots,$$

где $u_0=u_{-1}=\dots=u_{-\nu+1}=0$. Тогда в силу линейности кода имеем

$$x_j=\mathbf{u}_jG_j, \quad j=1, 2, \dots, \tag{1}$$

где G_j — двоичная матрица размерности $(\nu+1)\times n_0$. Обозначим через $\mathbf{M}_G[\cdot]$ осреднение по ансамблю матриц $G_1, G_2, \dots$, каждый элемент которых выбирается случайно и независимо от остальных элементов с вероятностью 1/2.

Пусть декодирование принятой последовательности производится по алгоритму Фано [2] с приращением порога Δ. Это означает, что если декодер в некоторый момент времени находится в j-м узле пути $\mathbf{u}$, то цена

$$\Gamma_j(\mathbf{u})=-d(\mathbf{x}_j, y_j)\ln((1-p)/p)+n_0j[\ln 2(1-p)-R]$$

сравнивается с текущим значением порога и в зависимости от результата сравнения принимается решение о дальнейшем движении вперед (F-проверка), назад или вбок ($d(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ обозначает расстояние Хемминга между n_0j символами в $\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{y}_j$).

Число вычислений, производимых декодером Фано для построения оценки переданного сообщения, является случайной величиной в ансамбле шумов канала. Хорошо известно [2—4], что приближением для распределения вероятностей этой случайной величины является распределение

$$\pi(L)=\Pr\{W\geqslant L\}, \quad L=1, 2, \dots,$$

где W — число F-проверок, которые выполняет декодер при исследовании путей из первого неправильного поддерева.

В настоящее время известно [1, 4, 5], что верхняя граница для распределения π асимптотически совпадает с распределением Парето, показатель которого один и тот же как для сверточных кодов, выбранных из полностью рандомизированного ансамбля, так и для изменяющихся во времени линейных древовидных кодов (имеется в виду сверточный код, при использовании которого оценка переданного сообщения выдается получателю, когда декодер достигнет некоторого яруса на глубине, меньшей, чем длина кодового ограничения). Для изменяющихся во времени линейных сверточных кодов со скоростями, меньшими вычислительной, до настоящего момента была известна более слабая граница [2, 3]. Цель данной работы — доказательство справедливости границы работы [1] для изменяющихся во времени линейных сверточных кодов [1].

Теорема. *Существует $\nu_0<\infty$ и изменяющийся во времени линейный сверточный код с $\nu>\nu_0$, для которого справедливо неравенство $\pi(L)\leqslant CL^{-\rho}$ для всех $\rho<\rho_R$. Здесь C — константа, ρ_R — корень уравнения*

$$R=E_0(\rho_R)/\rho_R$$

и

$$E_0(\rho)=\rho\ln 2-(1+\rho)\ln(p^{1/(1+\rho)}+(1-p)^{1/(1+\rho)})$$

— функция Галлагера.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть D_l — множество путей из первого неправильного поддерева, состоящие из l ребер. Тогда если считать, что получателю будет выдана правильная оценка переданного сообщения $\mathbf{u}$ (длина кодового ограничения ν достаточно велика), то в l-м узле пути $\mathbf{u}'\in D_l$ может быть произведено h F-проверок лишь в том случае, когда для некоторого $m=0, 1, \ldots$ справедливо неравенство [2] $\Gamma_l(\mathbf{u}')\geqslant\Gamma_m(\mathbf{u})+(h-2)\Delta$. Поэтому

$$W\leqslant\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{u}'\in D_l}\sum_{m=0}^{\infty}\chi\{\Gamma_l(\mathbf{u}')\geqslant\Gamma_m(\mathbf{u})+(h-2)\Delta\}. \tag{2}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $\chi\{\cdot\}$ обозначает индикаторную функцию события, записанного в фигурных скобках. Применяя в (2) хорошо известную оценку для индикаторной функции [4, 5], получим

$$W\leqslant C_1\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{u}'\in D_l}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{p(\mathbf{y}_l|\mathbf{x}_l')p(\mathbf{y}_m)}{p(\mathbf{y}_l)p(\mathbf{y}_m|\mathbf{x}_m)}\right)^{1/(1+\rho)}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{n_0R}{1+\rho}(m-l)\right\},\quad \rho>0, \tag{3}$$

где

$$C_1=e^{-\Delta/(1+\rho)}/(1-e^{-\Delta/(1+\rho)}),\quad p(\mathbf{y}_j)=2^{-n_0j},\quad j=1, 2, \ldots$$

и считается, что $\mathbf{x}_m$ и $\mathbf{x}_l'$ — начальные отрезки кодовых последовательностей, полученных из информационных последовательностей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ по формуле (1).

Теорема будет доказана, если показать, что ρ-й момент случайной величины W, вычисленный в ансамбле шумов канала и в ансамбле порождающих матриц $G_1, G_2, \ldots,$ конечен при всех $\rho<\rho_R$. Обозначим этот момент через $\overline{W^\rho}$ и ограничимся рассмотрением случая $\rho_R>\rho>1$. Тогда, при-

---

[1] Внимание автора на эту проблему было обращено К. Ш. Зигангировым.

меняя в (3) неравенство Минковского, получим [1, 5]

$$(4)\qquad (W^\rho)^{1/\rho}\leqslant C_1\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{mn_0}{\rho(1+\rho)}(E_0(\rho)-\rho R)\right\}\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{\infty}\Bigl[\sum_{\mathbf{y}_l} f^{(1+\rho)/\rho}(\rho)\Bigr]^{1/(1+\rho)}\exp\left\{-\frac{n_0R}{1+\rho}l\right\}$$

$$f(\rho)=\mathbf{M}_G\Bigl[\Bigl(\sum_{\mathbf{u}'\in D_l}p^{1/(1+\rho)}(\mathbf{y}_l\,|\,\mathbf{x}_l')\Bigr)^\rho\Bigr].$$

Пусть n — целое число, выбранное из условия

$$n-1<\rho\leqslant n,$$

и пусть U_{nl} — матрица размерности $n\times l$, i-я строка которой $\mathbf{u}^i=(u_1^i,\dots,u_l^i)$ является путем из D_l. Пусть $\mathbf{x}_l^i=(x_1^i,\dots,x_l^i)$ — кодовая последовательность, сопоставленная пути $\mathbf{u}^i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда на основании неравенства Иенсена [2] и отсутствия памяти в канале связи имеем:

$$(5)\qquad f(\rho)\leqslant\Bigl\{\sum_{U_{nl}}\mathbf{M}_G\Bigl[\prod_{i=1}^{n}p^{1/(1+\rho)}(\mathbf{y}_l\,|\,\mathbf{x}_l^i)\Bigr]\Bigr\}^{\rho/n}=\Bigl\{\sum_{U_{nl}}\prod_{j=1}^{l}\varphi_j(\rho)\Bigr\}^{\rho/n},$$

$$\varphi_j(\rho)=\mathbf{M}_G\Bigl[\prod_{i=1}^{n}p^{1/(1+\rho)}(y_j\,|\,x_j^i)\Bigr].$$

Отличие изменяющихся во времени линейных сверточных кодов от кодов, выбранных из полностью рандомизированного ансамбля, проявляется в исследовании правой части (5). Во втором случае операция $\mathbf{M}_G[\cdot]$ заменяется на операцию осреднения по ансамблю, в котором каждый символ последовательностей x_j^i, $i=\overline{1,n}$, выбирается случайно и независимо от остальных символов, после чего математическое ожидание произведения записывается как произведение математических ожиданий. Для линейных сверточных кодов этот переход в общем случае неверен.

Зафиксируем матрицу U_{nl} и обозначим

$$(6)\qquad \mathbf{u}_j^i=(u_{j-\nu}^i,\dots,u_j^i),\quad i=\overline{1,n},$$

где, как и ранее, считается, что

$$(7)\qquad u_0^i=u_{-1}^i=\dots=u_{-\nu+1}^i=0,\qquad i=\overline{1,n},\qquad j=\overline{1,l}.$$

Заметим, что на основании (1) линейная зависимость между векторами $\mathbf{u}_j^1,\dots,\mathbf{u}_j^n$ определяет также линейную зависимость между подблоками $x_j^1,\dots,x_j^n$. Пусть k_j — ранг матрицы, строками которой являются векторы $\mathbf{u}_j^1,\dots,\mathbf{u}_j^n$, $j=\overline{1,l}$, и пусть

$$\mathbf{k}(U_{nl})=(k_1,\dots,k_l).$$

Вектор $\mathbf{k}(U_{nl})$ назовем вектором рангов матрицы U_{nl}.

Вскоре для дальнейших рассуждений потребуются некоторые важные свойства вектора рангов. Поэтому сделаем небольшое отступление от хода доказательства и приведем эти свойства. Прежде всего заметим, что при любом выборе матрицы U_{nl} компоненты вектора $\mathbf{k}(U_{nl})$ являются положительными целыми числами, не превосходящими n, причем каждая последующая компонента отличается от предыдущей не более чем на единицу:

(8) $\quad |k_j-k_{j+1}|\leqslant 1, \quad j=\overline{1, l-1}.$

Кроме того, на основании (7) заключаем, что первые $\nu+1$ компонент $k_1, \ldots, k_{\nu+1}$ не убывают, и при $l\leqslant\nu+1$ вектор $\mathbf{k}(\mathbf{k}=\mathbf{k}(U_{nl}))$ однозначно задается своей композицией:

(9) $$N_i(\mathbf{k})=\sum_{j=1}^{l}\chi\{k_j=i\}, \quad i=\overline{1, n}.$$

Пусть $\mathscr{K}_{nl}$ — множество целочисленных векторов длины l таких, что для каждого $\mathbf{k}\in\mathscr{K}_{nl}$ существует матрица U_{nl}, имеющая $\mathbf{k}$ в качестве вектора рангов: $\mathbf{k}=\mathbf{k}(U_{nl})$. Пусть $K_{nl}=|\mathscr{K}_{nl}|$ и пусть $M(\mathbf{k})$ — число матриц U_{nl}, которые приводят к одному и тому же вектору рангов $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\in\mathscr{K}_{nl}$. В Приложении доказана следующая

Лемма. *Справедливы неравенства*

(10) $$K_{nl}\leqslant((l^2/\nu)e^{2lH(1/\nu)})^T,$$

(11) $$M(\mathbf{k})\leqslant 2^{n^2(l/(\nu+1)+1)}\exp\left\{n_0R\sum_{i=1}^{n}iN_i(\mathbf{k})\right\},$$

где

$$T=2^n-n-1, \quad H(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$$

и $N_i(\mathbf{k})$, $i=\overline{1, n}$, *определены в* (9).

Обсуждение. 1. Используя неравенство (8), величину K_{nl} можно оценить сверху функцией 3^l. Однако, как показывает неравенство (10), число возможных векторов рангов существенно меньше по крайней мере для больших ν.

2. Из (10) следует, что $\lim\limits_{l\to\infty}\ln K_{nl}/l$ при фиксированном n мажорируется сверху монотонно убывающей функцией от ν.

3. Неравенство (11) можно усилить в случае, когда в векторе рангов найдутся убывающие компоненты. Однако усиление оценки (11) не приводит к усилению результата теоремы, поскольку наибольшие вычислительные затраты связаны с просмотром путей с неубывающими компонентами вектора рангов.

Вернемся к доказательству теоремы. Зафиксируем некоторое j и матрицу U_{nl}, в которой j-я компонента вектора рангов равна k:

(12) $\quad k_j=k.$

Пусть векторы $\mathbf{u}_j^1, \ldots, \mathbf{u}_j^n$, определенные в (6), занумерованы таким образом, что первые k векторов линейно независимы. Тогда

$$\mathbf{u}_j^\alpha=\sum_{i=1}^{k}a_{i,\alpha}\mathbf{u}_j^i, \quad \alpha=\overline{k+1, n},$$

причем для всех α найдется минимальный индекс i_α, при котором $a_{i,i_\alpha}=1$. Пусть

$$t_i=\begin{cases} 1+\sum\limits_{\alpha=k+1}^{n}\chi\{i_\alpha=i\}, & \text{если} \quad i=\overline{1, k},\\ 1, & \text{если} \quad i=\overline{k+1, n},\end{cases}$$

и пусть

$$I_k=\{1, 2, \dots, k\}, \quad I_\alpha=(I_k \setminus \{i_\alpha\}) \cup \{\alpha\}, \quad \alpha=\overline{k+1, n}.$$

Тогда перегруппировка сомножителей в правой части (5) и использование неравенства Гельдера [2] приводит к следующей оценке:

$$(13) \qquad \varphi_j(\rho)=\mathbf{M}_G\left[\prod_{\alpha=k}^{n}\prod_{i\in I_\alpha} p^{1/(t_i(1+\rho))}(y_j|x_j^i)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{\alpha=k}^{n}\left\{\mathbf{M}_G\left[\prod_{i\in I_\alpha} p^{(n-k+1)/(t_i(1+\rho))}(y_j|x_j^i)\right]\right\}^{1/(n-k+1)}.$$

По построению, векторы $\mathbf{u}_j^i$, $i\in I_\alpha$, линейно независимы, причем это утверждение справедливо для всех $\alpha=\overline{k, n}$. Вследствие (1) это означает, что в рассматриваемом ансамбле порождающих матриц $G_1, G_2, \dots$ кодовые подблоки x_j^i, $i\in I_\alpha$, статистически независимы в совокупности. Поэтому операцию осреднения и произведения по $i\in I_\alpha$ в правой части (13) можно поменять местами, после чего получим

$$(14) \qquad \varphi_j(\rho)\leqslant\prod_{\alpha=k}^{n}\prod_{i\in I_\alpha}\left[\sum_{x\in\{0,1\}^{n_0}} 2^{-n_0}p^{\xi_i/(1+\rho)}(y_j|x)\right]^{1/(n-k+1)}=$$

$$=2^{-kn_0}\prod_{\alpha=k}^{n}\prod_{i\in I_\alpha}\left[\sum_{x\in\{0,1\}^{n_0}} p(y_j|x)\,p^{-(1+\rho-\xi_i)/(1+\rho)}(y_j|x)\right]^{1/(n-k+1)}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-kn_0}\prod_{\alpha=k}^{n}\prod_{i\in I_\alpha}\left[\sum_{x\in\{0,1\}^{n_0}} p^{1/(1+\rho)}(y_j|x)\right]^{(1+\rho-\xi_i)/(\rho(n-k+1))},$$

где $\xi_i=(n-k+1)/t_i$ и, поскольку $\xi_i\in[1, 1+\rho)$, $i=\overline{1, n}$, использовано неравенство Иенсена. Из-за симметрии рассматриваемого канала связи выражение в правой части (14) не зависит от y_j и может быть записано через функцию Галлагера, определенную в условиях теоремы:

$$(15) \qquad \varphi_j(\rho)\leqslant 2^{-kn_0}\exp\left\{n_0\frac{\rho\ln 2-E_0(\rho)}{1+\rho}\sum_{\alpha=k}^{n}\sum_{i\in I_\alpha}\frac{1+\rho-\xi_i}{\rho(n-k+1)}\right\}=$$

$$=2^{-kn_0}\exp\{n_0[\rho\ln 2-E_0(\rho)][(1+\rho)k-n]/(1+\rho)\rho\}=$$

$$=2^{-(n_0n)/(1+\rho)}\exp\{-(n_0/\rho)(k-n/(1+\rho))E_0(\rho)\},$$

где использовано очевидное равенство

$$\sum_{\alpha=k}^{n}\sum_{i\in I_\alpha}\xi_i=n(n-k+1).$$

Для произвольного дискретного канала без памяти такой переход неверен. Однако в этом случае доказательство можно продолжить, следуя методам анализа, развитым в [1], в результате чего получается результат, аналогичный приведенному в теореме.

Разобъем множество матриц U_{nl} на подмножества в соответствии с векторами рангов. Тогда, вспоминая условие (12) и подставляя (15) в (5), получим

$$(16)\qquad \Big[\sum_{y_l} f^{(1+\rho)/\rho}(\rho)\Big]^{1/(1+\rho)} \leqslant 2^{n_0 l/(1+\rho)}\Big[\sum_{\mathbf{k}} M(\mathbf{k})\, 2^{-n n_0 l/(1+\rho)}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{n_0}{\rho}\sum_{j=1}^{l}\Big(k_j-\frac{n}{1+\rho}\Big)E_0(\rho)\Big\}\Big]^{1/n}.$$

Определение композиции вектора $\mathbf{k}$ формулой (9), оценка (11) и неравенство $\sum_{i=1}^{n} iN_i(\mathbf{k})\geqslant l$ дают возможность записать (16) в виде

$$(17)\qquad \Big[\sum_{y_l} f^{(1+\rho)/\rho}(\rho)\Big]^{1/(1+\rho)} \leqslant 2^{n(l/(\nu+1)+1)}\exp\Big\{\frac{n_0 l}{\rho(1+\rho)}E_0(\rho)\Big\}\times$$

$$\times\Big[\sum_{\mathbf{k}}\exp\Big\{-\frac{n_0}{\rho}(E_0(\rho)-\rho R)\sum_{i=1}^{n} iN_i(\mathbf{k})\Big\}\Big]^{1/n}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{n(l/(\nu+1)+1)}K_{nl}^{1/n}\exp\Big\{-\frac{n_0 l}{\rho n}(E_0(\rho)-\rho R)+\frac{n_0 l}{\rho(1+\rho)}E_0(\rho)\Big\}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, остается подставить (17) в (4) и использовать оценку (10):

$$(18)\qquad \overline{(W^{1/\rho})^{\rho}}\leqslant C_2\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\frac{l^2}{\nu}\Big)^{T/n} 2^n\exp\{l\varepsilon(\nu)\}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{n_0 l}{\rho}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{1+\rho}\Big)(E_0(\rho)-\rho R)\Big\},$$

где

$$C_2=C_1/[1-\exp\{-n_0(E_0(\rho)-\rho R)\}],$$
$$\varepsilon(\nu)=(2T/n)H(1/\nu)+n/(\nu+1).$$

Функция $\varepsilon(\nu)$ монотонно убывает с ростом ν. Поэтому, так как $n<1+\rho$, величину ν_0 можно выбрать таким образом, что

$$\varepsilon(\nu_0)\leqslant 1/n-1/(1+\rho).$$

Тогда при всех $\nu>\nu_0$ ряд в правой части (18) сходится и, следовательно, ρ-й момент случайной величины W, вычисленный в ансамбле кодов и ансамбле шумов канала, конечен при всех $\rho<\rho_R$. Это утверждение доказывает теорему.

Заметим в заключение, что приведенные рассуждения могут быть перенесены как на произвольный канал без памяти, так и на случай произвольной скорости передачи ($R\neq\ln 2/n_0$).

Автор признателен К. Ш. Зигангирову и Б. Д. Кудряшову за полезные обсуждения результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. 1. Неравенство (10) устанавливается с помощью анализа матрицы U_{nl}, построенной последовательным присоединением строк. Пусть U_{il} — двоичная матрица размерности $n\times l$, $(i+1)$-, ..., n-я строки которой состоят из одних нулей, и пусть $\mathbf{k}(U_{il})$ —

вектор рангов матрицы U_{il}. В линейное подпространство, натянутое на строки матрицы U_{il}, входит не более 2^i-1 ненулевых векторов; обозначим их $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{2^i-1}$,

$$\mathbf{v}^t=(v_1{}^t, \ldots, v_l{}^t), \quad t=\overline{1, 2^i-1}.$$

Пусть $\mathbf{u}^{i+1}$ — некоторый вектор длины l. Обозначим через $U_{i+1,l}$ матрицу, $1, 2, \ldots, i$, $(i+2), \ldots, n$-я строки которой совпадают с соответствующими строками матрицы U_{il}, а $(i+1)$-я строка равна $\mathbf{u}^{i+1}$. Пусть, как и ранее,

$$\mathbf{u}_j{}^m=(\overset{m}{u}_{j-\nu}, \ldots, u_j{}^m), \qquad m=\overline{1, i+1}$$

и пусть

$$\mathbf{v}_j{}^t=(\overset{t}{v}_{j-\nu}, \ldots, v_j{}^t), \quad t=\overline{1, 2^i-1}, \quad j=\overline{1, l}.$$

Тогда j-я компонента вектора рангов $\mathbf{k}(U_{i+1,l})$ матрицы $U_{i+1,l}$ равна j-й компоненте вектора $\mathbf{k}(U_{il})$ лишь в том случае, когда найдется t такое, что

$$\mathbf{v}_j{}^t=\overset{i+1}{\mathbf{u}_j}.$$

В противном случае, j-я компонента вектора $\mathbf{k}(U_{i+1,l})$ на единицу больше, чем j-я компонента вектора $\mathbf{k}(U_{il})$. Формально эти условия можно записать следующим образом:

$$\text{(П.1)} \qquad \mathbf{k}(U_{i+1,\,l})=\mathbf{k}(U_{il})+\mathbf{\Delta}(\mathbf{u}^{i+1}, U_{il}),$$

где

$$\text{(П.2)} \qquad \mathbf{\Delta}(\mathbf{u}^{i+1}, U_{il})=\bigwedge_{t=1}^{2^i-1}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}^t), \quad \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}^t)=(\delta_1, \ldots, \delta_l),$$

$$\delta_j=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad \overset{i+1}{\mathbf{u}_j}=\mathbf{v}_j{}^t, \\ 1, & \text{если} \quad \overset{i+1}{\mathbf{u}_j}\neq\mathbf{v}_j{}^t, \end{cases}$$

$\bigwedge$ обозначает операцию покомпонентного логического умножения бинарных векторов.

Если векторы $\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{2^i-1}$ интерпретировать как пути в кодовой решетке сверточного кода с длиной кодового ограничения ν, то по терминологии работы [6] вектор $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}^t)$ называется конфигурацией путей $\mathbf{u}^{i+1}$ и $\mathbf{v}^t$ в решетке сверточного кода. Важное свойство конфигурации состоит в том, что если $\delta_{j-1}=0$ и $\delta_j=1$, то $\delta_{j+1}=\ldots=\delta_{j+\nu}=1$, т. е. отрезок из единиц в векторе $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}^t)$, разделенных нулями, обозначает петли в решетке.

Для оценки числа конфигураций воспользуемся рассуждениями работы [7]. Пусть конфигурация путей $\mathbf{u}^{i+1}$ и $\mathbf{v}^t$ состоит из m петель (заметим, что $m\leqslant l/(\nu+1)$). Существует не более $C_{l-\nu}^m$ возможностей для выбора ярусов, на которых начинаются эти петли. Столько же возможностей существует для выбора ярусов, на которых рассматриваемые петли заканчиваются. Кроме того, не более чем $l-m(\nu+1)$ способами может быть выбран ярус, на котором начинается сегмент последнего несовпадения путей $\mathbf{u}^{i+1}$ и $\mathbf{v}^t$, не являющийся петлей. Поэтому если L_l — число всех возможных конфигураций двух путей в решетке сверточного кода, то

$$\text{(П.3)} \qquad L_l\leqslant\sum_{m=0}^{\lfloor l/(\nu+1)\rfloor}(l-m(\nu+1))(C_{l-\nu}^m)^2\leqslant(l^2/\nu)e^{2lH(1/\nu)},$$

где $\lfloor z\rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее z.

Поскольку (П.1) справедливо для любых векторов $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^{i+1}$, используя (П.2), получим

$$\text{(П.4)} \qquad K_{i+1,\, l} \leqslant K_{il} (L_l)^{2^i - 1}.$$

Подставляя в (П.4) $K_{1l}=1$ и оценку (П.3), получим

$$K_{nl} \leqslant L_l^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} (2^i-1)} \leqslant ((l^2/\nu)\, e^{2lH(1/\nu)})^{2^n - n - 1},$$

что доказывает неравенство (10).

2. Пусть $c=l/(\nu+1)$ является целым числом. Разобьем матрицу U_{nl} на подматрицы U_α, $\alpha=\overline{1, c}$ размерности $n\times(\nu+1)$

$$U_{nl} = (U_1, \ldots, U_c)$$

и представим их в виде

$$U_\alpha = Z_\alpha A_\alpha, \quad \alpha=\overline{1, c},$$

где Z_α и A_α — двоичные матрицы размерности $n\times n$ и $n\times(\nu+1)$, соответственно. Если $\mathbf{k}=(k_1, \ldots, k_l)$ — вектор рангов матрицы U_{nl}, то существует линейное преобразование над строками A_α и столбцами Z_α, после которого не более $k_{\alpha'+j}$ первых компонент j-го столбца матрицы A_α будут отличны от нуля, $\alpha'=(\alpha-1)(\nu+1)$, $j=\overline{1, l}$. Число матриц $A_1, \ldots, A_c$, обладающих этим свойством, оценивается сверху величиной

$$2^{\sum\limits_{i=1}^{n} iN_i(\mathbf{k})} = \exp\left\{n_0 R \sum_{i=1}^{n} iN_i(\mathbf{k})\right\},$$

а общее число матриц $Z_1, \ldots, Z_c$ есть 2^{n^2c}, откуда следует неравенство (11). Обобщение доказательства на случай, когда l не кратно $\nu+1$, очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hashimoto T., Arimoto S.* Computational Moments for Sequential Decoding of Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. № 5. P. 584–591.
2. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974.
3. *Зигангиров К. Ш.* Процедуры последовательного декодирования. М.: Связь, 1974.
4. *Savage J. E.* Sequential Decoding — The Computation Problem // Bell Syst. Techn. J. 1966. V. 45. № 1. P. 149–175.
5. *Jelinek F.* An Upper Bound on Moments of Sequential Decoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1969. V. 15. № 1. P. 140–149.
6. *Forney G. D.* Convolutional Codes. II. Maximum Likelihood Decoding // Inform. and Control. 1974. V. 25. № 4. P. 222–266.
7. *Полтырев Г. Ш.* Кодирование в канале с асинхронным множественным доступом // Пробл. передачи информ. 1983. Т. 19. № 3. С. 12–21.

Поступила в редакцию
29.VII.1985