Д. Б. Рохлин, Критерий отсутствия арбитража в дискретной модели рынка ценных бумаг при выпуклых ограничениях на портфель, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2004, том 7, номер 1, 95–108

Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–март, 2004. Том VII, № 1(17)

УДК 519.864

КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ ПРИ ВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОРТФЕЛЬ

Д. Б. Рохлин

В случае конечного вероятностного пространства получен критерий отсутствия арбитража в модели рынка ценных бумаг при единственном предположении о замкнутости и выпуклости множеств ограничений на инвестиционные стратегии (портфели). Для формулировки соответствующей версии первой фундаментальной теоремы теории расчетов финансовых активов использован язык нестандартного анализа. Показано, что две топологические версии условия отсутствия арбитража сводятся к нему путем замены ограничений.

1. Постановка задачи. Хорошо известная дискретная модель рынка ценных бумаг [1–5] описывается следующим образом. Введем фильтрованное вероятностное пространство $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathbf{P}\big)$. Здесь $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ — конечное множество; $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$; алгебра $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ порождается одноточечными множествами, а алгебра $\mathcal{F}_n$ — некоторым разбиением $\mathcal{D}_n$. Предполагается, что вероятностная мера $\mathbf{P}$ является невырожденной: $\mathbf{P}(\omega) > 0$ для любого $\omega \in \Omega$.

Пусть цены активов описываются d-мерной стохастической последовательностью $S_n = \big(S_n^1, \dots, S_n^d\big)$, согласованной с фильтрацией. Количество единиц каждого актива, которыми владеет инвестор, определяется предсказуемой последовательностью $\gamma_n = \big(\gamma_n^1, \dots, \gamma_n^d\big)$. Иначе говоря, векторные случайные величины S_n постоянны на атомах $\mathcal{D}_n$, а γ_n — на атомах $\mathcal{D}_{n-1}$. Последнее связано с тем, что портфель γ_n выбирается в момент времени $n-1$.

Обозначим через cl, ri, conv, lin, cone замыкание, относительную внутренность, выпуклую, линейную и коническую оболочки множества соответственно [6], а через $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\cdot|\mathcal{F}_{n-1})$ — условное математическое ожидание относительно алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$ по мере $\mathbf{Q}$ [7]. Если $V \subset \mathbb{R}^d$ — конус, то $V^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d : xy \le 0,\ x \in V\}$ — полярный конус. Пусть, кроме того, $C_1 \pm C_2 = \{z = x \pm y : x \in C_1,\ y \in C_2\}$ и $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^d$.

Для описания ограничений на портфели активов введем последовательность многозначных отображений $\omega \mapsto B_n(\omega) \subset \mathbb{R}^d$. Далее предполагается, что множества $B_n(\omega)$ замкнуты, выпуклы и содержат $0 \in \mathbb{R}^d$, т. е.

$$0 \in B_n(\omega) = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}\, B_n(\omega)). \tag{1.1}$$

Допустимые портфели γ_n являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми сечениями B_n такими, что $\gamma_n(\omega) \in B_n(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. Множество соответствующих предсказуемых процессов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ обозначим через Γ. Не ограничивая общности, будем считать, что отображения B_n являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми, т. е. постоянными на атомах $D \in \mathcal{D}_{n-1}$. В противном случае можно перейти к ограничениям вида $B_n'(\omega) = \bigcap\limits_{\omega' \in D} B_n(\omega')$, $\omega \in D$.

Пусть $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$. Обычное скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^d$ для краткости обозначим через ab. Приращение капитала инвестора после n торговых операций имеет вид

$$X_n^\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Конус неотрицательных случайных величин обозначим через L^+. Введем также множество $\mathcal{G} = \{X_N^\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Условие отсутствия арбитража NA (No Arbitrage) состоит в следующем.

Условие NA. $\mathcal{G} \cap L^+ = \{0\}$.

Иначе говоря, если выигрыш X_N^γ инвестора в конечный момент времени N неотрицателен при всех ω, то он тождественно равен нулю: нельзя получить прибыль без риска.

Несложные рассуждения (см. [8]) показывают, что условие NA является, по существу, локальным и сводится к следующему:

$$\gamma_n \Delta S_n \geq 0 \Rightarrow \gamma_n \Delta S_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \ \gamma \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Пусть D — произвольный атом разбиения $\mathcal{D}_{n-1}$. Рассмотрим последовательность $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримых многозначных отображений

$$K_n(\omega) = \{\Delta S_n(\omega') : \omega' \in D\}, \quad \omega \in D.$$

Отметим, что $K_n(\omega)$ при каждом ω является носителем условного распределения ΔS_n относительно $\mathcal{F}_{n-1}$. Введем также последовательность случайных ортопроекторов $\Pi_n(\omega) \colon \mathbb{R}^d \to \operatorname{lin} K_n(\omega)$. Очевидно, что элементы соответствующей матрицы $(\Pi_n)^{ij}$ являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми.

Условие (1.2) можно выразить следующим образом: если $\eta \in B_n(\omega)$ и $\eta x = (\Pi_n(\omega)\eta)x \geq 0$ для всех $x \in \operatorname{cone} K_n(\omega)$, то $\Pi_n(\omega)\eta \perp \operatorname{lin} K_n(\omega)$ и, значит, $\Pi_n(\omega)\eta = 0$. Отсюда вытекает, что для выполнения условия NA необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$(\Pi_n B_n) \cap (-\operatorname{cone} K_n)^\circ = \{0\}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество эквивалентных $\mathbf{P}$ (т. е. невырожденных) вероятностных мер. При отсутствии ограничений на портфель для безарбитражности рынка необходимо и достаточно, чтобы существовала вероятностная мера $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, относительно которой процесс S_n цен активов является мартингалом. Этот факт хорошо известен как для конечных [1–4], так и для общих вероятностных пространств [5, 8–11]. В [5, 10] его доказательство опирается на локальный критерий, основанный на соображениях отделимости: условие NA эквивалентно неотделимости точки $0 \in \mathbb{R}^d$ и множества $\operatorname{conv} K_n(\omega)$ при всех ω и n.

Таким образом, справедлив результат, называемый первой фундаментальной теоремой теории расчетов финансовых активов.

Теорема 1. *Пусть $B_n = \mathbb{R}^d$, тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) *выполнено условие NA;*
(b) *существует такая вероятностная мера $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, что*

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q}(\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})(\omega) = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \ \omega \in \Omega;$$

(c) $0 \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n(\omega))$, $n = 1, \ldots, N$, $\omega \in \Omega$.

Обобщение утверждения об эквивалентности условий (a) и (b) теоремы 1 при наличии конических или выпуклых ограничений на портфель в случае общих вероятностных пространств дано в работах [12–16]. В [17] рассматривались конечные вероятностные пространства. Аналог условия (c) и доказательство соответствующей теоремы при наличии конических ограничений на портфель (в случае общих вероятностных пространств) анонсированы в сообщении [18].

В указанных работах отмечено, что для получения непосредственного аналога условия (b) (для (c) аналогично) требуется наложить дополнительные условия на цены активов S_n или ограничения B_n. Один из способов обойти эту особенность состоит в том, чтобы заменить NA условиями отсутствия бесплатного ленча NFL (No Free Lunch) или асимптотического бесплатного ленча NAsFL (No Asymptotic Free Lunch) (см. [17] и п. 5 настоящей работы).

Цель данной работы, однако, состоит в обобщении теоремы 1 при сохранении условия NA и отсутствии каких-либо дополнительных предположений относительно цен активов и ограничений на портфель, кроме (1.1).

В п. 2 дано обобщение теоремы 1 при типичных, но наиболее точных из числа известных предположениях относительно S_n и B_n. Метод доказательства теоремы 2 допускает обобщение на случай общих вероятностных пространств; именно такое обобщение использовалось для доказательства результатов [18]. Здесь же приводятся два примера, демонстрирующие указанный эффект нарушения эквивалентности. В п. 3, который носит вспомогательный характер, приводятся необходимые сведения, связанные с нестандартным расширением (см., например, [19–21]) конечномерного пространства, основанным на понятии ультрафильтра. Затем вводится и обсуждается важное для дальнейшего понятие гиперполяры конуса. В п. 4 установлен основной результат работы (теорема 3). В ней дается «нестандартный» ответ на «стандартный» вопрос о критерии безарбитражности. В п. 5 рассматриваются топологические версии (NFL и NAsFL) условия отсутствия арбитража. Показано, что с помощью замены ограничений они сводятся к NA и, таким образом, допускают характеризацию в рамках доказанных теорем 2 и 3.

Следует отметить, что использование языка нестандартного анализа не является обязательным и может быть исключено за счет удлинения формулировок.

2. Стандартное обобщение основной теоремы. Положим для краткости $U_n = \Pi_n(\operatorname{cone} B_n)$.

Лемма 1. *Пусть* $(\operatorname{cone} B_n(\omega))^\circ \cap \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n(\omega)) = \emptyset$ *на некотором атоме* $D \in \mathcal{D}_{n-1}$. *Тогда существует* $\mathcal{F}_{n-1}$*-измеримый случайный вектор* $\xi(\omega) \in \operatorname{cl} U_n(\omega)$ *такой, что*

$$\xi \Delta S_n \geq 0, \quad \mathbf{P}(\xi \Delta S_n > 0) > 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$(\operatorname{cone} B_n)^\circ \cap \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n) = U_n^\circ \cap \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n) = \emptyset, \quad \omega \in D. \tag{2.2}$$

Действительно, для элементов $y \in \operatorname{lin} K_n$ верно равенство $xy = (\Pi_n x)y$. Далее, по теореме отделимости [6, теорема 11.3] найдется такой ненулевой вектор $\eta \in \mathbb{R}^d$, что

$$\sup\left\{\eta x : x \in U_n^\circ(\omega)\right\} \leq \inf\{\eta y : y \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n)(\omega)\}, \quad \omega \in D.$$

Ввиду того, что U_n° — конус, отсюда немедленно вытекают неравенства

$$\eta x \leq 0,\ x \in U_n^\circ(\omega); \quad \eta y \geq 0,\ y \in K_n(\omega).$$

Первое из них вместе с теоремой о биполяре ($U_n^{\circ\circ} = \operatorname{cl} U_n$) показывает, что $\eta \in \operatorname{cl} U_n(\omega) \subset \operatorname{lin} K_n(\omega)$, $\omega \in D$. Равенство $\eta y = 0$ при всех $y \in K_n(\omega)$ невозможно, так как оно означало бы, что $K_n(\omega)$ порождает собственное подпространство $\operatorname{lin} K_n(\omega)$. Таким образом, случайная величина $\eta \Delta S_n$ неотрицательна и отлична от тождественного нуля на атоме D. Остается положить $\xi(\omega) = I_D(\omega)\eta$, где I_D — индикатор множества D. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть конусы U_n замкнуты при всех n и ω. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *выполнено условие NA;*

(b) *существует такая вероятностная мера $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, что*

$$\mathbf{E_Q}(\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1})(\omega) \in (\operatorname{cone} B_n)^\circ(\omega), \quad n = 1, \ldots, N, \ \omega \in \Omega;$$

(c) $(\operatorname{cone} B_n)^\circ(\omega) \cap \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n(\omega)) \neq \emptyset$, $n = 1, \ldots, N$, $\omega \in \Omega$.

Доказательство. (b) $\Rightarrow$ (a). Если выполнено условие (b), то

$$\gamma_n \mathbf{E_Q}(\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1}) \le 0 \tag{2.3}$$

для любого допустимого портфеля γ и

$$\mathbf{E_Q} X_N^\gamma = \sum_{n=1}^N \mathbf{E_Q}(\gamma_n \Delta S_n) = \sum_{n=1}^N \mathbf{E_Q}(\gamma_n \mathbf{E_Q}(\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1})) \le 0.$$

Отсюда следует, что если $X_N^\gamma(\omega) \ge 0$, то $X_N^\gamma \equiv 0$, поскольку $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$.

(c) $\Rightarrow$ (b). Пусть $a_0 = 0$ и a_n — любые $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримые случайные величины, удовлетворяющие условию

$$a_n(\omega) \in (\operatorname{cone} B_n)^\circ(\omega) \cap \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n(\omega)).$$

Введем случайные процессы

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad M_n = S_n - A_n, \quad n = 0, \ldots, N. \tag{2.4}$$

Поскольку $\Delta M_n = \Delta S_n - a_n$ и a_n постоянны на атомах $D \in \mathcal{D}_{n-1}$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{ri}(\operatorname{conv}\{\Delta M_n(\omega') : \omega' \in D\}) &= \operatorname{ri}(\operatorname{conv}\{\Delta S_n(\omega') : \omega' \in D\}) - a_n(\omega) \\ &= \operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n(\omega)) - a_n(\omega) \ni 0\end{aligned}$$

для любого $\omega \in D$. Согласно импликации (c) $\Rightarrow$ (b) теоремы 1 отсюда вытекает существование такой вероятностной меры $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, что M_n является $\mathbf{Q}$-мартингалом, т. е. $\mathbf{E_Q}(\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Данная мера является искомой:

$$\mathbf{E_Q}(\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E_Q}(\Delta A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = a_n \in (\operatorname{cone} B_n)^\circ.$$

Отметим, что представление $S_n = A_n + M_n$ есть не что иное, как разложение Дуба S_n относительно $\mathbf{Q}$ [7].

(a) $\Rightarrow$ (c). Предположим, что условие (c) не выполнено и

$$\xi(\omega) \in \operatorname{cl} U_n(\omega) = \Pi_n(\operatorname{cone} B_n)(\omega)$$

— элемент, указанный в лемме 1 (здесь использована замкнутость U_n). Легко видеть, что справедливо представление $\xi(\omega) = \lambda(\omega)\Pi_n\zeta(\omega)$, где $\lambda > 0$ и $\zeta \in B_n$ являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми.

Полагая $\gamma_k = 0$, $k \neq n$, $\gamma_n = \zeta$, получаем допустимый арбитражный портфель

$$X_N^\gamma = \zeta \Delta S_n = (\Pi_n \zeta)\Delta S_n = \lambda^{-1}\xi \Delta S_n \in L^+ \setminus \{0\}$$

в силу (2.1). Таким образом, условие (a) нарушается. Теорема доказана.

Условие замкнутости U_n в случае общих вероятностных пространств и конических ограничений введено в [18]. Оно автоматически выполняется, если

B_n является полиэдральным конусом, как в [16]. Ранее, в работе [13] рассматривалось условие обратимости матрицы условных ковариаций S_n относительно $\mathcal{F}_{n-1}$. В работе [14] накладывалось менее жесткое условие, состоящее в требовании замкнутости конусов $\operatorname{cone} B_n$ вместе с условием невырожденности

$$(\gamma_n \Delta S_n = 0,\, \gamma_n \in B_n) \Rightarrow \gamma_n = 0. \tag{2.5}$$

Данное условие является более сильным, чем условие теоремы 2. Действительно, условие (2.5) означает, что $(\ker \Pi_n) \cap \operatorname{cone} B_n = \{0\}$. Если конусы $\operatorname{cone} B_n$ замкнуты, то отсюда вытекает замкнутость U_n.

В [15] было введено еще одно условие, которое можно представить в следующей форме. При каждом ω и n рассмотрим множество функций

$$v_a\colon\ \operatorname{lin} K_n(\omega) \to \mathbb{R}, \quad v_a(b) = ab,\ a \in \operatorname{cone} B_n(\omega), \tag{2.6}$$

с топологией, например, поточечной сходимости и потребуем, чтобы множество (2.6) было замкнутым (в [15] предполагалось также, что конусы типа $\operatorname{cone} B_n$ замкнуты). Данное условие эквивалентно замкнутости $U_n \subset \operatorname{lin} K_n(\omega)$, поскольку отображение $a \mapsto v_a(\cdot)$ является линейным гомеоморфизмом конечномерных пространств $\operatorname{lin} K_n(\omega)$ и $\{v_a(\cdot) : a \in \operatorname{lin} K_n(\omega)\}$, и множество (2.6) не изменится, если рассматривать $a \in U_n(\omega)$.

Дальнейшее изучение задачи мотивируется примерами, которые показывают, что условие замкнутости U_n существенно [17].

Пример 1. Рассмотрим одношаговую биномиальную модель с двумя активами ($N = 1$, $d = 2$). Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B_1 = \bigl\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le -x_2^2\bigr\}$ и

$$\Delta S_1(\omega_1) = (1, 0), \quad \Delta S_1(\omega_2) = (0, 1).$$

Множество возможных выигрышей инвестора отождествляется с B_1 в силу соотношения $\bigl(X_1^\gamma(\omega_1), X_1^\gamma(\omega_2)\bigr) = \bigl(\gamma_1^1, \gamma_1^2\bigr)$, и рынок является безарбитражным, так как B_1 не содержит ненулевых точек первого квадранта. С другой стороны, условие (c) теоремы 2 не выполнено:

$$(\operatorname{cone} B_1)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 0,\, x_2 = 0\},$$
$$\operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1,\, x_1 > 0,\, x_2 > 0\}.$$

В примере 1 множество $\operatorname{cone} B_1$ было незамкнутым. В следующем примере B_1 — замкнутый конус, но его проекция $\Pi_1 B_1$ незамкнута.

Пример 2. Пусть снова $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Рассмотрим одношаговую биномиальную модель с тремя активами ($N = 1$, $d = 3$), цены которых имеют следующие приращения:

$$\Delta S_1(\omega_1) = (1, 0, 0), \quad \Delta S_1(\omega_2) = (0, 1, 0).$$

Пусть выпуклое компактное множество $F \subset \mathbb{R}^3$ является пересечением плоскости и двух круговых цилиндров:

$$F = \bigl\{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \le 1\bigr\} \cap \bigl\{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\bigr\} \cap \{x_3 = 1\}.$$

Положим $B_1 = \operatorname{cone} F$. Поскольку $0 \notin F$, то B_1 — замкнутый конус [6].

Множество $\operatorname{conv} K_1 \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой отрезок, соединяющий точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Ортогональной проекцией F на плоскость $\operatorname{lin} K_1$ будет пересечение двух кругов:

$$\Pi_1 F = \bigl\{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \le 1\bigr\} \cap \bigl\{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\bigr\} \cap \{x_3 = 0\},$$

а проекцией B_1 — незамкнутый конус

$$\Pi_1 B_1 = \{x_1 < 0\} \cap \{x_2 > 0\} \cap \{x_3 = 0\} \cup \{x = 0\}.$$

Поскольку $X_1^\gamma(\omega_i) = \gamma_1^i$, $i = 1, 2$, то множество возможных выигрышей инвестора отождествляется с $\Pi_1 B_1$. Следовательно, рынок является безарбитражным. Однако условие (c) теоремы 2 не выполнено:

$$\begin{aligned} \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_1) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1,\, x_3 = 0,\, x_1 > 0,\, x_2 > 0\}, \\ B_1^\circ \cap \{x_3 = 0\} &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\, x_2 \leq 0,\, x_3 = 0\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

3. Нестандартные расширения и гиперполяра. Из всего арсенала нестандартного анализа (см. [19–21]) далее используется лишь идея нестандартного расширения, связанная с понятием ультрафильтра. Напомним, что фильтром на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется семейство его подмножеств $\mathfrak{F}$, обладающее свойствами:

(a) $\mathbb{N} \in \mathfrak{F}$, $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;

(b) $A_1, \ldots, A_l \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_l \in \mathfrak{F}$;

(c) $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$.

Фильтр называется ультрафильтром на $\mathbb{N}$, если для любого $E \subset \mathbb{N}$ он содержит либо E, либо его дополнение. Фильтр, состоящий из кофинитных (т. е. дополнений конечных) множеств обозначается через Cof. Пусть $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр, являющийся расширением фильтра Cof. (Отметим, впрочем, что для наших целей достаточно было рассматривать фильтры.) На множестве всех последовательностей $(x(i))_{i=1}^\infty$, $x(i) \in \mathbb{R}^d$, введем отношение эквивалентности

$$x \sim_{\mathfrak{F}} y \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} : x(i) = y(i)\} \in \mathfrak{F}.$$

Фактор-множество множества $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ по отношению эквивалентности $\sim_{\mathfrak{F}}$ будем обозначать через ${}^*\mathbb{R}^d$. Класс эквивалентности последовательности $(x(i))_{i=1}^\infty$ в ${}^*\mathbb{R}^d$ (гипервектор) обозначается через $x_{\mathfrak{F}}$. Следуя обычной терминологии, элементы множества ${}^*\mathbb{R}^d$, отличные от образов стационарных последовательностей $x(i) = x$, будем называть нестандартными. Нестандартное расширение ${}^*C$ любого подмножества $C \subset \mathbb{R}^d$ состоит из гипервекторов $x_{\mathfrak{F}}$, удовлетворяющих условию $\{i \in \mathbb{N} : x(i) \in C\} \in \mathfrak{F}$. Если C бесконечно, естественное вложение $*\colon C \to {}^*C$ является строгим.

«Скалярное произведение» элементов $x \in \mathbb{R}^d$ и $y_{\mathfrak{F}} \in {}^*\mathbb{R}^d$ является элементом ${}^*\mathbb{R}$ и определяется следующим образом:

$$xy_{\mathfrak{F}} = z_{\mathfrak{F}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} : xy(i) = z(i)\} \in \mathfrak{F}.$$

Аналогичным образом продолжаются и другие операции и отношения, имеющиеся в $\mathbb{R}^d$ или в $\mathbb{R}$. Например, пусть $x_{\mathfrak{F}}$ и $y_{\mathfrak{F}}$ принадлежат ${}^*\mathbb{R}$, тогда

$$x_{\mathfrak{F}} \leq y_{\mathfrak{F}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} : x(i) \leq y(i)\} \in \mathfrak{F}.$$

Определение. Гиперполярой конуса $V \subset \mathbb{R}^d$ назовем множество

$$V^{\circledast} = \{y_{\mathfrak{F}} \in {}^*\mathbb{R}^d : xy_{\mathfrak{F}} \leq 0_{\mathfrak{F}},\, x \in V\}.$$

Легко видеть, что гиперполяра содержит нестандартное расширение поляры: ${}^*(V^\circ) \subset V^{\circledast}$, причем даже для замкнутого выпуклого конуса V включение может быть строгим. В качестве иллюстрации рассмотрим конус B_1 из примера 2. В силу (2.7) элемент $y_{\mathfrak{F}}$, определяемый последовательностью

$$y(j) = (1 - 1/j, 1/j, 0), \tag{3.1}$$

не принадлежит нестандартному расширению множества B_1°. Однако $y_{\mathfrak{F}} \in B_1^{\circledast}$, поскольку если $x \in B_1$, то $y(j)x = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$ и $\lim\limits_{j\to\infty} xy(j) = x_1 < 0$ в противном случае.

Введем класс конусов, которые являются объединением элементов последовательности расширяющихся замкнутых выпуклых конусов:

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k, \quad V_k = \operatorname{cl}(\operatorname{cone} V_k),\ V_k \subset V_{k+1}. \tag{3.2}$$

Прежде всего отметим, что для таких конусов верно включение

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} {}^*\big(V_k^\circ\big) \subset V^{\circledast}. \tag{3.3}$$

Действительно, для любого $x \in V$ существует k такое, что $x \in V_k$, поэтому если $y_{\mathfrak{F}}$ принадлежит левому множеству (3.3), то $y_{\mathfrak{F}} \in {}^*\big(V_k^\circ\big)$ и $xy_{\mathfrak{F}} \le 0_{\mathfrak{F}}$.

В стандартном исчислении поляр незамкнутый выпуклый конус V не восстанавливается по своей поляре: $V^{\circ\circ} = \operatorname{cl} V \ne V$. Следующее предложение демонстрирует полезность введенных объектов: показано, что конусы, допускающие представление (3.2), восстанавливаются по своей гиперполяре. (Дальнейшие рассуждения не опираются на этот результат.)

Предложение. *Пусть V допускает представление (3.2), тогда*

$$V = (V^{\circledast})^\circ,$$

где $(V^{\circledast})^\circ = \{x \in \mathbb{R}^d : xy_{\mathfrak{F}} \le 0_{\mathfrak{F}},\ y_{\mathfrak{F}} \in V^{\circledast}\}$.

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что $V \subset (V^{\circledast})^\circ$. Пусть $x \in (V^{\circledast})^\circ$, но

$$x \notin V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k^{\circ\circ}.$$

Тогда $x \notin V_k^{\circ\circ}$ для любого k и существует последовательность $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ такая, что $y_k \in V_k^\circ$, $xy_k > 0$. Соответствующий элемент $y_{\mathfrak{F}}$ не принадлежит $V^{\circledast}$, поскольку $xy_{\mathfrak{F}} > 0_{\mathfrak{F}}$.

С другой стороны, $y_{\mathfrak{F}} \in {}^*\big(V_k^\circ\big)$ для любого k. Действительно, поскольку $V_{k+1}^\circ \subset V_k^\circ$, то $y_j \in V_k^\circ$ при $j \ge k$. Из соотношения (3.3) теперь следует, что $y_{\mathfrak{F}} \in V^{\circledast}$; получаем противоречие. Предложение доказано.

Не любой выпуклый конус представи́м в виде (3.2).

Пример 3. Рассмотрим конус $K \subset \mathbb{R}^3$, порожденный выпуклой оболочкой множества

$$C = \{x : x_3 = 1,\ x_1 = \cos\varphi,\ x_2 = \sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \varphi \text{ иррационально}\},$$

представляющего собой всюду плотное подмножество соответствующей окружности. Если конус K является объединением счетного числа замкнутых множеств, то хотя бы одно из них содержит несчетное подмножество множества C. Но замыкание такого множества содержит точки, не принадлежащие K: $(\operatorname{cl} C \setminus C) \cap K = \emptyset$; приходим к противоречию. Класс конусов V вида (3.2) весьма широк. Он включает конусы, порожденные замкнутыми выпуклыми множествами, и их линейные образы. Именно такой вид имеют конусы $U_n(\omega)$.

Лемма 2. *Пусть B — замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$, содержащее нуль, и $A\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — линейный оператор. Тогда конус $A(\operatorname{cone} B)$ допускает представление (3.2).*

Доказательство. Сначала предположим, что A — тождественный оператор, и проведем доказательство индукцией по размерности подпространства M, содержащего B. Если $\dim M = 1$, то $\operatorname{cone} B$ замкнут (он либо является лучом, либо совпадает с M). В качестве V_k можно взять $\operatorname{cone} B$.

Пусть лемма верна в размерности $m-1$, и предположим, что $B \subset M$, $\dim M = m$. Дальнейшее рассмотрение ведется в рамках пространства M, т. е. $x \in M$ и т. п.

Пусть $H = \{x : cx = 0\}$ — опорная гиперплоскость множества B в нуле. Так как $cx \geq 0$ для каждого $x \in B$, то любой элемент $x \in B$ принадлежит либо гиперплоскости H, либо одному из выпуклых компактов:

$$G_k = \{y : cy \geq 1/k\} \cap \{y : \|y\| \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cone} B = \operatorname{cone}(B \cap H) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k', \quad V_k' = \operatorname{cone} G_k,$$

причем конусы $V_k' \subset V_{k+1}'$ замкнуты, так как $0 \notin G_k$ [6].

По предположению индукции существует последовательность замкнутых выпуклых конусов $V_k'' \subset V_{k+1}''$ такая, что $\operatorname{cone}(B \cap H) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k''$. Итак,

$$\operatorname{cone} B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(V_k' \cup V_k''\big),$$

а поскольку $\operatorname{cone} B \supset V_k' + V_k'' \supset V_k' \cup V_k''$, то

$$\operatorname{cone} B = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k, \quad V_k = V_k' + V_k''.$$

Конусы $V_k \subset V_{k+1}$ замкнуты, так как $V_k' \cap \big(-V_k''\big) \subset V_k' \cap H = \{0\}$ [6, следствие 9.1.3].

Пусть теперь A — произвольный линейный оператор в $\mathbb{R}^d$. Представим B в виде объединения счетного набора вложенных друг в друга выпуклых компактов:

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B^j, \quad B^j = B \cap \{x : \|x\| \leq j\}.$$

Имеем

$$A(\operatorname{cone} B) = A\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{cone} B^j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A(\operatorname{cone} B^j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{cone}(AB^j).$$

Множества AB^j выпуклы, компактны и содержат нуль. По доказанному существует последовательность замкнутых выпуклых конусов $C_k^j \subset C_{k+1}^j$ такая, что

$$\operatorname{cone}(AB^j) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^j.$$

Более того, поскольку $AB^j \subset AB^{j+l}$, $l \geq 1$, то из приведенного выше доказательства ясно, что можно считать выполненным включение $C_k^j \subset C_k^{j+l}$.

Рассмотрим «диагональную» последовательность $V_k = C_k^k$. Имеем

$$V_k \subset C_{k+1}^k \subset C_{k+1}^{k+1} = V_{k+1} \subset \operatorname{cone}(AB^{k+1}) \subset A(\operatorname{cone} B).$$

С другой стороны,

$$\operatorname{cone}(AB^j) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^j = \bigcup_{k=j}^{\infty} C_k^j \subset \bigcup_{k=j}^{\infty} V_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Таким образом,

$$A(\operatorname{cone} B) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{cone}(AB^j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset A(\operatorname{cone} B).$$

Лемма доказана.

4. Нестандартное обобщение основной теоремы. Любое множество заданных на Ω вероятностных мер естественным образом отождествляется с подмножеством $\mathbb{R}^m$. Если $\mathfrak{Q}$ принадлежит нестандартному расширению такого множества и определяется последовательностью $\mathbf{Q}(j)$, то через $\mathbf{E}_{\mathfrak{Q}}(x|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)$ обозначим класс эквивалентности последовательности $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}(j)}(x|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)$. Здесь x — случайный вектор.

В следующей теореме снимается условие замкнутости U_n, наложенное в теореме 2.

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*
(a) *выполнено условие NA;*
(b) *существует такой элемент $\mathfrak{Q} \in {}^*\mathcal{P}$, что*

$$\mathbf{E}_{\mathfrak{Q}}(\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1})(\omega) \in (\operatorname{cone} B_n)^{\circledast}(\omega), \quad n = 1, \ldots, N, \ \omega \in \Omega;$$

(c) $(\operatorname{cone} B_n)^{\circledast}(\omega) \cap {}^*\operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n(\omega)) \neq \emptyset$, $n = 1, \ldots, N$, $\omega \in \Omega$.

Доказательство. (b) $\Rightarrow$ (a). Пусть выполнено условие (b), элемент $\mathfrak{Q}$ определяется последовательностью $\mathbf{Q}(j) \in \mathcal{P}$ и $\gamma \in \Gamma$. Поскольку $\gamma_n(\omega) \in B_n(\omega) \subset \operatorname{cone} B_n(\omega)$, то из определения гиперполяры вытекает, что

$$T(\omega, n, \gamma) = \{j : \gamma_n(\omega)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}(j)}(\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1})(\omega) \leq 0\} \in \mathfrak{F} \tag{4.1}$$

для всех ω и n. Следовательно, $T(\gamma) = \bigcap\limits_{\omega,n} T(\omega, n, \gamma) \in \mathfrak{F}$ по определению фильтра. Пусть $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(j)$, где j — любой элемент $T(\gamma)$, тогда выполнено неравенство (2.3). В данном случае $\mathbf{Q}$ зависит от γ, но дальнейшее доказательство справедливости условия (a) остается таким же, как в теореме 2.

(c) $\Rightarrow$ (b). Пусть выполнено условие (c). Фактически нужно доказать существование такой последовательности вероятностных мер $\mathbf{Q}(j) \in \mathcal{P}$, что для всех $\gamma_n \in \operatorname{cone} B_n$ выполнено включение (4.1).

Рассмотрим любые постоянные на атомах $\mathcal{D}_{n-1}$ функции $\alpha_n \colon \Omega \mapsto {}^*\mathbb{R}^d$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0 = 0_{\mathfrak{F}}, \quad \alpha_n \in (\operatorname{cone} B_n)^{\circledast} \cap {}^*\operatorname{ri}(\operatorname{conv} K_n)$$

при всех ω. Пусть класс эквивалентности $\alpha_n(\omega)$ определяется последовательностью $\big(a_n^j(\omega)\big)_{j=1}^{\infty}$. Если $\gamma_n \in \operatorname{cone} B_n$, то $\gamma_n(\omega)\alpha_n(\omega) \leq 0_{\mathfrak{F}}$ и

$$E_1(\gamma) = \bigcap_{\omega,n} \{j : \gamma_n(\omega)a_n^j(\omega) \leq 0\} \in \mathfrak{F}.$$

Далее, для всех j из множества

$$E_2 = \bigcap_{\omega,n} \{j : a_n^j(\omega) \in \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n)(\omega)\} \in \mathfrak{F}$$

введем случайные процессы A_n^j, M_n^j по формулам вида (2.4):

$$A_n^j = \sum_{k=0}^n a_k^j, \quad M_n^j = S_n^j - A_n^j, \quad n = 0, \dots, N.$$

Как и при доказательстве теоремы 2, включение $a_n^j \in \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n)$ позволяет указать для M_n^j эквивалентную $\mathbf{P}$ мартингальную меру $\mathbf{Q}(j)$ такую, что $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}(j)}\big(\Delta M_n^j | \mathcal{F}_{n-1}\big) = 0$. Меры $\mathbf{Q}(j) \in \mathcal{P}$, $j \in \mathbb{N} \setminus E_2$, определим произвольным образом.

Построенная последовательность мер является искомой, так как

$$\gamma_n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}(j)}(\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \gamma_n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}(j)}\big(\Delta A_n^j | \mathcal{F}_{n-1}\big) = \gamma_n a_n^j \le 0, \quad j \in E(\gamma) \in \mathfrak{F},$$

для любого $\gamma_n \in \mathrm{cone}\, B_n$, где $E(\gamma) = E_1(\gamma) \cap E_2$.

(a) $\Rightarrow$ (c). Применяя лемму 2, представим $U_n = \Pi_n(\mathrm{cone}\, B_n)$ в виде

$$U_n(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k(\omega),$$

где многозначные отображения $\omega \mapsto V_k(\omega)$ постоянны на атомах $\mathcal{D}_{n-1}$ и обладают свойствами (3.2).

Пусть условие (c) не выполнено при некотором n на атоме $D \in \mathcal{D}_{n-1}$. Используя легко проверяемый нестандартный аналог соотношения (2.2)

$$(\mathrm{cone}\, B_n)^{\circledast} \cap {}^*\, \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n) = U_n^{\circledast} \cap {}^*\, \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n) = \emptyset, \quad \omega \in D$$

и свойство (3.3), находим

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} {}^*\big(V_k^\circ\big)\right) \cap {}^*\, \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n) = \emptyset, \quad \omega \in D. \tag{4.2}$$

Покажем, что существует номер k такой, что

$${}^*\big(V_k^\circ\big) \cap {}^*\, \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n) = \emptyset, \quad \omega \in D. \tag{4.3}$$

Пусть это не так. Тогда при каждом k стандартные части множеств (4.3) имеют непустое пересечение. Рассмотрим последовательность

$$y_k \in V_k^\circ \cap \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n), \quad \omega \in D.$$

Гипервектор $y_{\mathfrak{F}}$, определяемый этой последовательностью, принадлежит каждому из множеств (4.3), так как $V_{k+1}^\circ \subset V_k^\circ$ и $y_j \in V_k^\circ$ при $j \ge k$. Следовательно, множество (4.2) непусто.

Полученное противоречие показывает, что равенство (4.3) верно для некоторого k. При этом

$$V_k^\circ \cap \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n) = \emptyset, \quad \omega \in D.$$

Применим лемму 1, заменив B_n на V_k. Поскольку выпуклый конус V_k замкнут и $\Pi_n V_k = V_k$, то существует $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримый случайный вектор $\xi(\omega) \in V_k(\omega) \subset U_n(\omega)$, удовлетворяющий условиям (2.1). Отсюда вытекает существование арбитражного портфеля и условие (a) нарушается (см. доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (c) теоремы 2). Теорема доказана.

Для примеров 1 и 2 элемент, принадлежащий пересечению множеств из условия (c), легко указать, что это класс эквивалентности последовательности $y(j) = (1 - 1/j, 1/j)$ и последовательности (3.1) соответственно.

5. Модификации условия отсутствия арбитража. Часто рассматривается более «грубая» топологическая версия условия NA — условие отсутствия бесплатного ленча (NFL) (см. [8, 13, 22, 23]).

Условие NFL. $(\mathrm{cl}\,\mathcal{G}) \cap L^+ = \{0\}$.

Отметим, что используется также название «условие отсутствия аппроксимационного арбитража NAA» (No Approximate Arbitrage) [23], а условие NFL обычно формулируется следующим образом:

$$\mathrm{cl}(\mathcal{G} - L^+) \cap L^+ = \{0\}. \tag{5.1}$$

В данном случае, однако, это приводит к эквивалентному определению.

Докажем последнее утверждение. Ясно, что из условия (5.1) вытекает NFL. Пусть теперь условие NFL выполнено, а (5.1) нарушается. Тогда существуют последовательности $x_i \in \mathcal{G}$, $y_i \in L^+$ такие, что

$$\lim_{i\to\infty}(x_i - y_i) = z \in L^+ \setminus \{0\}.$$

Последовательность y_i неограниченная, так как в противном случае можно считать, что $y_i \to y \in L^+$ и

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{G} \ni \lim_{i\to\infty} x_i = z + y \in L^+ \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим неслучайную последовательность $\alpha_i = \max\limits_{\omega\in\Omega}\|y_i(\omega)\|$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\alpha_i > 1, \quad \lim_{i\to\infty}\alpha_i = +\infty, \quad \lim_{i\to\infty}\frac{y_i}{\alpha_i} \in L^+ \setminus \{0\}.$$

Представляя x_i в виде $X_N^{\gamma^i}$, $\gamma^i \in \Gamma$, находим

$$w = \lim_{i\to\infty}\frac{X_N^{\gamma^i}}{\alpha_i} = \lim_{i\to\infty} X_N^{\gamma^i/\alpha_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{y_i}{\alpha_i} \in L^+ \setminus \{0\}.$$

Но $\gamma_n^i/\alpha_i \in B_n$ и, значит, $w \in \mathrm{cl}\,\mathcal{G}$. Полученное противоречие с условием NFL доказывает его эквивалентность условию (5.1).

В работах [17, 24] рассматривалось условие отсутствия асимптотического бесплатного ленча (NAsFL). Оно нарушается, если существуют такая последовательность $x_j \in \mathcal{G}$ и неслучайная последовательность $\alpha_j > 0$, что

$$\alpha_j x_j \to z \in L^+ \setminus \{0\}.$$

Замечание. Во избежание недоразумений отметим, что в модели «больших» рынков (см. [5]) аналогичное название употребляется в другом смысле [25].

Для формального определения введем множество $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{\alpha>0}(\alpha\mathcal{G})$.

Условие NAsFL. $(\mathrm{cl}\,\mathcal{V}) \cap L^+ = \{0\}$.

В примере 1 выполнены условия NA и NFL, а условие NAsFL нарушается. В примере 2 выполнено лишь условие NA.

Оказывается, что путем замены ограничений можно свести условия NFL и NAsFL к условию NA. Доказательству этих утверждений предпошлем лемму.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие NA и* $\Pi_n B_n = B_n$, *тогда множество* $\mathcal{G}$ *замкнуто.*

Доказательство. Множество $\mathcal{G}$ является образом замкнутого подмножества Γ конечномерного пространства при линейном отображении $\gamma \mapsto X_N^\gamma$. Поэтому для доказательства замкнутости $\mathcal{G}$ достаточно проверить, что пересечение ядра данного отображения с Γ тривиально [6, теорема 9.1].

Пусть $X_N^\gamma = 0$, тогда на каждом атоме D разбиения $\mathcal{D}_{N-1}$ имеем

$$\gamma_N \Delta S_N = -X_{N-1}^\gamma = \mathrm{const}\,.$$

Теперь из условия NA вытекает, что $\gamma_N \Delta S_N = 0$, так как в противном случае один из портфелей

$$(0, \ldots, 0, \gamma_N I_D), \quad (\gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1}, 0)$$

реализует арбитражную возможность. Повторяя это рассуждение, устанавливаем соотношения $\gamma_n \Delta S_n = (\Pi_n \gamma_n)\Delta S_n = 0$ при всех n. Отсюда следует, что $\gamma_n = \Pi_n \gamma_n = 0$, так как иначе существуют такие ω, что $K_n(\omega)$ лежит в собственном подпространстве $\operatorname{lin} K_n(\omega)$, что невозможно. Лемма доказана.

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*
(a) *NFL при ограничениях* $\gamma_n \in B_n$;
(b) *NA при ограничениях* $\gamma_n \in \mathrm{cl}(\Pi_n B_n)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (b), тогда по лемме 3 множество

$$\mathcal{G}' = \left\{X_N^\gamma : \gamma_n \in \mathrm{cl}(\Pi_n B_n)\right\}$$

замкнуто. Из равенства $X_N^\gamma = X_N^{\Pi\gamma}$ следует, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$. Следовательно, условие (b) влечет (a):

$$(\mathrm{cl}\,\mathcal{G}) \cap L^+ \subset \mathcal{G}' \cap L^+ = \{0\}.$$

С другой стороны, легко видеть, что $\mathcal{G}' \subset (\mathrm{cl}\,\mathcal{G})$. Отсюда следует обратное утверждение.

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны:*
(a) *NAsFL при ограничениях* $\gamma_n \in B_n$;
(b) *NA при ограничениях* $\gamma_n \in \mathrm{cl}\, U_n$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (b). В силу леммы 3 множество

$$\mathcal{G}'' = \left\{X_N^\gamma : \gamma_n \in \mathrm{cl}\, U_n\right\}$$

замкнуто. Далее, из соотношения

$$\mathcal{V} \subset \left\{X_N^\gamma : \gamma_n \in \mathrm{cone}\, B_n\right\} = \left\{X_N^\gamma : \gamma_n \in U_n\right\} \subset \mathcal{G}''$$

вытекает, что (b) влечет (a).

Пусть теперь условие (a) выполнено, но (b) не выполнено. Ограничения $\mathrm{cl}\, U_n$ удовлетворяют условиям теоремы 2, поэтому существуют такие номер n и атом $D \in \mathcal{D}_{n-1}$, что

$$(\mathrm{cl}\, U_n)^\circ(\omega) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, K_n(\omega)) = \emptyset, \quad \omega \in D.$$

Следуя рассуждениям леммы 1, построим $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримый случайный вектор $\xi(\omega) = I_D(\omega)\eta \in \mathrm{cl}\, U_n$, для которого выполнены соотношения (2.1). Здесь η — неслучайный вектор.

Положим $\gamma_k = 0$, $k \neq n$, $\gamma_n = \xi$ и рассмотрим любую последовательность $\eta^j \in U_n$, $\eta^j \to \eta$. Пусть $\eta^j = \alpha^j \Pi_n \delta^j$, где $\alpha^j > 0$, $\delta^j \in B_n(\omega)$, $\omega \in D$. Имеем

$$X_N^\gamma = \lim_{j\to\infty} I_D \eta^j \Delta S_n = \lim_{j\to\infty} I_D \alpha^j (\Pi_n \delta^j) \Delta S_n = \lim_{j\to\infty} \alpha^j I_D \delta^j \Delta S_n \in \mathrm{cl}\, \mathcal{V}.$$

Поскольку $X_N^\gamma \in L^+ \setminus \{0\}$, то условие (a) не выполнено; получаем противоречие. Теорема доказана.

Теорема 5 подтверждает вывод работы [17]: условие NAsFL всегда допускает эквивалентную «стандартную» характеризацию, поскольку ограничения $\mathrm{cl}\, U_n$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Кроме того, сопоставление с результатами [17] показывает, что другие описания условия NAsFL, указанные в упомянутой работе, эквивалентны приведенному выше.

Из теоремы 4 следует, что если конусы, порожденные множествами $\mathrm{cl}(\Pi_n B_n)$, замкнуты, то для условия NFL также работает теорема 2. В противном случае (см. пример 1) следует воспользоваться «нестандартной» теоремой 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harrison J. M., Kreps D. M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // J. Econom. Theory. 1979. V. 20. P. 381–408.
2. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Process. Appl. 1981. V. 11, N 3. P. 215–260.
3. *Taqqu M. S., Willinger W.* The analysis of finite security markets using martingales // Adv. in Appl. Probab. 1987. V. 19. P. 1–25.
4. *Мельников А. В., Феоктистов К. М.* Вопросы безарбитражности и полноты дискретных рынков и расчеты платежных обязательств // Обозрение прикл. и промышл. математики. 2001. Т. 8, №1. С. 28–40.
5. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
6. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
7. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
8. *Schachermayer W.* A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time // Insurance: Mathematics and Economics. 1992. V. 11. P. 249–257.
9. *Dalang R. C., Morton A., Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models // Stochastics Stochastic Rep. 1990. V. 29, N 2. P. 185–201.
10. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case // Finance Stochastics. 1998. V. 2, N 3. P. 259–273.
11. *Kabanov Yu., Stricker C.* A teacher's note on no-arbitrage criteria // Lecture Notes in Math. Berlin; Heidelberg: Springer, 2001. V. 1755. P. 149–152.
12. *Brannath W.* No arbitrage and martingale measures in option pricing: Doct. diss. Wien Univ., 1997.
13. *Pham H., Touzi N.* The fundamental theorem of asset pricing with cone constraints // J. Math. Econom. 1999. V. 31. P. 265–279.
14. *Carassus L., Pham H., Touzi N.* No arbitrage in discrete time under portfolio constraints // Math. Finance. 2001. V. 11, N 3. P. 315–329.
15. *Evstigneev I. V., Shürger K., Taksar M. I.* On the fundamental theorem of asset pricing: random constraints and bang-bang no-arbitrage criteria // Discussion paper 24/2002. Univ. Bonn, 2002.
16. *Napp C.* The Dalang—Morton—Willinger theorem under cone constraints // J. Math. Econom. 2003. V. 39. P. 111-126.

17. *Рохлин Д. Б.* Критерий отсутствия асимптотического бесплатного ленча на конечномерном рынке при выпуклых ограничениях на портфель и выпуклых операционных издержках // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, №1(9). С. 133–144.

18. *Рохлин Д. Б.* Расширенная версия первой фундаментальной теоремы финансовой математики при конических ограничениях на портфель // Обозрение прикл. и промышл. математики. 2002. Т. 9, №1. С. 131–132.

19. *Успенский В. А.* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.

20. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.

21. *Гордон И. Е., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001.

22. *Kreps D. M.* Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities // J. Math. Econom. 1981. V. 8. P. 15–35.

23. *Clark S. A.* Arbitrage approximation theory // J. Math. Econom. 2000. V. 33. P. 167–181.

24. *Jouini E., Kallal H.* Viability and equilibrium in securities markets with frictions // Math. Finance. 1999. V. 9, N3. P. 275–292.

25. *Klein I.* A fundamental theorem of asset pricing for large financial market // Math. Finance. 2000. V. 10, N4. P. 443–458.

г. Ростов-на-Дону
Ростовский государственный университет
E-mail: rokhlin@math.rsu.ru

Статья поступила 17 февраля 2003 г.
Окончательный вариант 17 ноября 2003 г.