А. Э. Пасенчук, Обратимость абстрактных тёплицевых операторов в счетно-нормированных пространствах, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 7, 49–57

$x=x^*\in(0,\ \infty)$, где $x^*=x^*(y)$ — единственное решение уравнения $1/x^*=(e^{(x^*-y)/2}-1)/((x^*-y)/2)$.

Итак, мы пришли к окончательному неравенству

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}e(-y)+e\left(\frac{x^*-y}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\frac{1}{x^*}-\frac{1}{2}C+\frac{2y}{2n+1},\quad (**)$$

где $y=-(2n+1)\log r$, $x^*=x^*(y)$.

Из предыдущего вытекает, что неравенство $(**)$ усиливает неравенство (11′) при всех $r\in(0,\ 1]$. Действительно, обозначая правую часть неравенства $(**)$ через $\varphi_1(y)$, на основании (29) имеем

$$\varphi_1(y)=\min_x\varphi_1(x,\ y)\leqslant\min_x\left\{\varphi(y)+\frac{1}{2}\left[e(x)+\log\frac{1}{x}-C\right]-\delta\right\}=\varphi(y).$$

При $y=0$, т. е. при $r=1$ и $x^*=\log(9/4)$, неравенство $(**)$ усиливает и неравенство (11): при $r=1$ неравенство $(**)$ дает оценку

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+e\left(\log\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\log\frac{9}{4}\right)^{-1}-\frac{1}{2}C=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\delta_0,$$

где $\delta_0\approx 0{,}2668$, а неравенство (11) — более грубую оценку

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\delta,$$

где $\delta<0{,}312$.

В заключение отметим, что из $(**)$ нельзя получить предельным переходом при $n\to\infty$ точную оценку для $\sum\limits_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Branges L. de. A proof of the Bieberbach conjecture // Препринт №Е 5. ЛОМИ АН СССР.— 1984.— 21 с.
2. Милин И. М. Оценка интегральных средних однолистных функций // Тез. сообщ. Всесоюзн. конф. по геометрич. теории функций.— Новосибирск, 1988.— С. 70.
3. Milin I. M., Grinshpan A. Z. Logarithmic coefficients means of univalent functions // Complex Variables.— 1986.— V. 7.— P. 139—147.
4. Милин И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы.— М.: Наука, 1971.— 256 с.
5. Лебедев Н. А., Милин И. М. Об одном неравенстве // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр.— 1965, вып. 19.— С. 157—158.
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.

г. Ставрополь

Поступили
первый вариант 13.12.1988
окончательный вариант 09.04.1990

А. Э. Пасенчук

УДК 517.968

ОБРАТИМОСТЬ АБСТРАКТНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Через Γ будем обозначать единичную окружность $\Gamma=\{\xi\in C:|\xi|=1\}$, а через $Z_\pm$ — следующие подмножества группы целых чисел Z: $Z_\pm=\{i\in Z:i\gtrless 0\}$.

Для линейного пространства L через $R(L, \Gamma)$ обозначим линеал функций следующего вида:

$$R(L, \Gamma)=\{r(\xi)=\sum_{j=-k}^{m} r_j\xi^j,\ r_j\in L,\ \xi\in\Gamma;\ m,\ k\in Z_+\}.$$

В случае, когда L — топологическое пространство, на $R(L, \Gamma)$ можно ввести топологию, связанную с топологией пространства L. В частности, через $R_n(H, \Gamma)$ обозначим $R(H, \Gamma)$, рассматриваемое с топологией, порожденной нормой

$$\|r(\xi)\|_n=\Big(\sum_{j=-k}^{m}(|j|+1)^{2n}\|r_j\|^2\Big)^{1/2}.$$

Положим $L_2\{n, H, \Gamma\}=\overline{R_n(H, \Gamma)}$. Подпространства $L_2\{n, H, \Gamma\}$, состоящие из функций, у которых $r_j=0$, $j\in Z_{\mp}$, будем обозначать через $L_2^{\pm}\{n, H, \Gamma\}$ соответственно. Ясно, что пространство $L_2\{n, H, \Gamma\}$ является прямой суммой своих подпространств $L_2^{\pm}\{n, H, \Gamma\}$. Операторы проектирования, порождаемые этим разложением, будем обозначать через $P^{\pm}$ соответственно.

Положим $C^{\infty}(H, \Gamma)=\bigcap_{n\in Z_{\pm}} L_2\{n, H, \Gamma\}$, $C^{\infty}_{\pm}(H, \Gamma)=\bigcap_{n\in Z_+} L_2^{\pm}\{n, H, \Gamma\}$ и будем рассматривать $C^{\infty}(H, \Gamma)$ как счетно-гильбертово пространство с порождающей системой норм $\|\cdot\|_n$, $n\in Z_+$. В силу очевидных неравенств $\|P^{\pm}r\|_n\leqslant\|r\|_n$, $r\in R(H, \Gamma)$, операторы проектирования продолжаются до линейных ограниченных операторов на пространство $C^{\infty}(H, \Gamma)$ и при этом $C^{\infty}_{\pm}(H, \Gamma)=P^{\pm}(C^{\infty}(H, \Gamma))$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — банахова подалгебра $B(H)$, имеющая общую с $B(H)$ единицу. На линеале $R(\mathfrak{A}, \Gamma)$ введем топологию, индуцируемую нормой $|r(\xi)|_n=\sum_{j\in Z}(|j|+1)^n\|r_j\|_{B(H)}$, и положим

$$W_n(\mathfrak{A}, \Gamma)=\overline{R(\mathfrak{A}, \Gamma)},\quad C^{\infty}(\mathfrak{A}, \Gamma)=\bigcap_{n\in Z_+} W_n(\mathfrak{A}, \Gamma).$$

Через $W_n^{\pm}(\mathfrak{A}, \Gamma)$, $C^{\infty}_{\pm}(\mathfrak{A}, \Gamma)$ обозначим подалгебры алгебр $W_n(\mathfrak{A}, \Gamma)$, $C^{\infty}(\mathfrak{A}, \Gamma)$, состоящие из $\mathfrak{A}$-значных функций, аналитически продолжимых в области $|\xi|\lessgtr 1$ соответственно.

В данной работе в пространстве $C^{\infty}_{+}(H, \Gamma)$ рассматривается следующий оператор:

$$T_a=P^{+}a(\xi)P^{+}, \tag{1.1}$$

где $a(\xi)\in C^{\infty}(\mathfrak{A}, \Gamma)$, $\mathfrak{A}\subseteq B(H)$.

Оператору (1.1) и родственному оператору краевой задачи Римана в случае $H=C^m$ посвящено огромное количество публикаций. Современное состояние теории этих операторов отражено в монографиях [1]—[6] и обзорных статьях [7], [8]. Отметим, что оператор (1.1) и близкие ему операторы наиболее полно исследованы в случае банаховых пространств. В работе [9] рассмотрен абстрактный тёплицев оператор, несколько отличающийся от оператора (1.1) в гильбертовом пространстве. В случае счетно-нормированных пространств оператор (1.1) и родственные операторы изучены значительно меньше. Это объясняется тем, что даже в случае $H=C$ во множестве обратимых в пространстве $C^{\infty}_{+}(C, \Gamma)$ операторов (1.1) имеются операторы, символы которых обращаются в нуль на Γ (см. [10]—[12]). Это обстоятельство затрудняет применение техники, развитой для банаховых пространств. Обычно при исследованиях тёплицевых операторов в счетно-нормированных пространствах применяют так называемый метод специальной факторизации, состоящий в разложении символа $a(\xi)$ в произведение сравнительно простого множителя, который может аннулироваться на Γ, и достаточно общего множителя, не имеющего особенностей на Г. Этот метод практически не применим в случае бесконечномерного H. В предлагаемой работе вводится понятие правой (левой) вырожденной факторизации, в терминах такой факторизации получен критерий обратимости оператора (1.1) в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$. При некоторых ограничениях на банахову алгебру $\mathfrak{A}$ получены эффективные критерии существования вырожденной факторизации. Описанные результаты применяются к конкретным классам операторов (1.1).

2. Обозначим через π_i оператор, действующий в пространстве $C^\infty(H, \Gamma)$ по правилу $\pi_i(\sum_{j\in Z} a_j\xi^j) = a_i\xi^i$, $i \in Z$. Каждому линейному оператору A, действующему в $C^\infty(H, \Gamma)$, поставим в соответствие матрицу $[a_{ij}]_{(i,j)\in Z^2}$, где $a_{ij} = \xi^{-i}\pi_i A\pi_j$. Хорошо известно, что тёплицевым операторам (1.1) соответствуют матрицы вида $[a_{i-j}]_{(i,j)\in Z_+^2}$, где a_i — коэффициенты Фурье функции $a(\xi)$.

Теорема 2.1. *Линейный оператор A, действующий в пространстве $C^\infty(H, \Gamma)$, является ограниченным в этом пространстве тогда и только тогда, когда $a_{ij} \in B(H)$ и по любому $n \in Z_+$ найдутся $c_n > 0$ и $m_n \in Z_+$ такие, что*

$$\|a_{ij}\| < c_n(|i|+1)^{-n}(|j|+1)^{m_n}, \quad (i, j) \in Z^2.$$

Δ Хорошо известно (см., напр., [5], с. 23), что линейный оператор ограничен в счетно-нормированном пространстве тогда и только тогда, когда $A\varphi\|_n \leqslant c_n\|\varphi\|_{m_n}$, $\varphi \in C^\infty(H, \Gamma)$, для любого $n \in Z_+$ и найденных по нему $c_n > 0$ и $m_n \in Z_+$. Пользуясь оценкой коэффициентов a_{ij}, приведенной в формулировке теоремы, нетрудно получить, что оператор A ограничен в пространстве $C^\infty(H, \Gamma)$. Докажем необходимость теоремы. Пусть $\varphi_0 \in H$, тогда, очевидно, $\|\varphi_0\xi^j\|_{m_n} = (|j|+1)^{m_n}\|\varphi_0\|$. Из ограниченности оператора A следует $(|i|+1)^n\|a_{ij}\varphi_0\| = (|i|+1)^n\|\pi_i A\varphi_0\xi^j\|_n \leqslant c_n\|\varphi_0\xi^j\|_{m_n} = (|j|+1)^{m_n}\|\varphi_0\|$. Последнее означает, что $a_{ij} \in B(H)$ и имеют место оценки операторов a_{ij}, указанные в формулировке теоремы. ▲

Следствие 2.1. Оператор умножения на $a(\xi) = \sum_{j\in Z} a_j\xi^j$, $a_j \in B(H)$, ограничен в пространстве $C^\infty(H, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда $a(\xi) \in C^\infty(B(H), \Gamma)$.

Будем говорить, что оператор (1.1) треуголен, если треугольна его матрица $[a_{i-j}]_{(i,j)\in Z_+^2}$. При этом будем различать случаи верхнетреугольных ($a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$) и нижнетреугольных ($a_i = 0$, $i = -1, -2, \dots$) операторов (1.1).

Справедливы следующие утверждения, доказываемые аналогично теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Нижнетреугольный оператор* (1.1) *ограничен в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда его символ $a(\xi) \in C^\infty(B(H), \Gamma)$.*

Теорема 2.3. *Верхнетреугольный оператор* (1.1) *ограничен в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда его символ имеет вид $a(\xi) = \sum_{j\in Z_+} a_j\xi^{-j}$ и $\|a_j\| \leqslant c(j+1)^m$, $j \in Z_+$, для некоторых $c > 0$ и $m \in Z_+$.*

Замечание 2.1. Разумеется, при помощи теорем 2.2, 2.3 может быть сформулирован критерий ограниченности произвольного оператора (1.1) в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$. Однако ниже этот критерий не потребуется.

3. Пусть банахова алгебра $\mathfrak{A}\subseteq B(H)$ такова, что в ней найдется набор идемпотентов $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in N}$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j=\delta_{ij}\mathbf{P}_i$, $\sum\limits_{i\in N}\mathbf{P}_i=I$, где сходимость ряда понимается в сильном смысле.

Пусть $N=\bigcup\limits_{j\in\mathfrak{N}}\mathfrak{N}_j$ — конечное разбиение N, положим $P_j=\sum\limits_{i\in\mathfrak{N}_j}\mathbf{P}_i$. Будем говорить, что $a(\xi)\in C^\infty(\mathfrak{A},\Gamma)$ допускает правую вырожденную факторизацию типа минус, если

$$a(\xi)=a_-(\xi)\sum_{j\in\mathfrak{N}}\xi^{\varkappa_j}P_j a_+(\xi), \tag{3.1}$$

где $a_\mp^{\pm1}(\xi)\in C_\mp^\infty(\mathfrak{A},\Gamma)$, $a_-(\xi)\in C_-^\infty(\mathfrak{A},\Gamma)$, $a_-(\xi)\in G\mathfrak{A}$ при $|\xi|>1$, и если $a_-^{-1}(\xi)=\sum\limits_{j\in Z_+}b_j\xi^{-j}$, $\xi\to\infty$, то $\|b_j\|\leqslant c(j+1)^m$ для некоторых $c>0$, $m\in Z_+$.

Не ограничивая общности, будем считать разбиение N таким, что в представлении (3.1) все $\varkappa_j$ различны.

Будем говорить, что $a(\xi)\in C^\infty(\mathfrak{A},\Gamma)$ допускает правую вырожденную факторизацию типа плюс, если в выражении (3.1) $a_-^{\pm1}(\xi)\in C_-^\infty(\mathfrak{A},\Gamma)$, а $a_+(\xi)\in G\mathfrak{A}$ при $|\xi|<1$, и если $a_+^{-1}(\xi)=\sum\limits_{j\in Z_+}c_j\xi^j$, $\xi\to 0$, то $\|c_j\|<c(j+1)^m$ для некоторых $c>0$ и $m\in Z_+$. Аналогичным образом определяются понятия левой вырожденной факторизации типов минус и плюс.

Имеет место

Теорема 3.1. *Пусть функция* $a(\xi)$ *допускает факторизацию* (3.1) *и* $a(\xi)=b_-(\xi)\sum\limits_{i\in\widetilde{\mathfrak{N}}}\xi^{\widetilde{\varkappa}_i}\widetilde{P}_i b_+(\xi)$ — *также правая вырожденная факторизация типа минус функции* $a(\xi)$, *тогда для каждого* $i\in\mathfrak{N}$ *найдется* $n(i)\in\widetilde{\mathfrak{N}}$ *такое, что* $\varkappa_i=\widetilde{\varkappa}_{n(i)}$, $\dim P_i=\dim\widetilde{P}_{n(i)}$.

Δ Не ограничивая общности, будем считать, что $\varkappa_i\leqslant 0$, $\widetilde{\varkappa}_i\leqslant 0$. В противном случае рассмотрим функцию $\xi^{-M}a(\xi)$, где $M\in Z_+$ — достаточно большое число.

Выберем из чисел $\varkappa_i$, $i\in\mathfrak{N}$, и $\widetilde{\varkappa}_i$, $i\in\widetilde{\mathfrak{N}}$, наименьшее. Пусть, напр., таким является $\varkappa_r$. Если $\varkappa_r=0$, то $\varkappa_i=0$, $\widetilde{\varkappa}_i=0$, и теорема доказана. Предположим, что $\varkappa_r<0$. Рассмотрим абстрактный тёплицев оператор T_a. В силу частичной мультипликативности из наличия двух факторизаций $a(\xi)$ вытекает равенство

$$T_{a_-}\sum_{\in\mathfrak{N}}P^+\xi^{\varkappa_i}P_iP^+T_{a_+}=T_{b_-}\sum_{i\in\widetilde{\mathfrak{N}}}P^+\xi^{\widetilde{\varkappa}_i}\widetilde{P}_iP^+T_{b_+}.$$

Из определения правой вырожденной факторизации и теорем 2.2, 2.3 следует, что операторы $T_{a_\pm}$, $T_{b_\pm}$ обратимы в пространстве $C_+^\infty(H,\Gamma)$. Тогда из последнего представления имеем

$$\sum_{i\in\mathfrak{N}}P^+\xi^{\varkappa_i}P_iP^+=T_{a_-^{-1}b_-}\sum_{i\in\widetilde{\mathfrak{N}}}P^+\xi^{\widetilde{\varkappa}_i}\widetilde{P}_iP^+T_{b_+a_+^{-1}}. \tag{3.2}$$

Обозначая оператор (3.2) через B, найдем, что

$$\ker B\big|_{\operatorname{Im}P_r}=\{\varphi=\sum_{i=0}^{-\varkappa_r-1}c_i\xi^i,\ c_i\in\operatorname{Im}P_r\}.$$

В частности, для любого $c \in \operatorname{Im} P_r$ имеем $c\xi^{-\varkappa_r-1} \in \ker B$. В таком случае из (3.2) и обратимости оператора $T_{a_- b_-^{-1}}$ вытекает

$$\sum_{i \in \widetilde{\mathfrak{N}}} P^+ \xi^{\widetilde{\varkappa}_i - \varkappa_r - 1} \widetilde{P}_i P^+ T_{b_+ a_+^{-1}} c = 0. \tag{3.3}$$

По построению $\varkappa_r \leqslant \widetilde{\varkappa}_i$. Предположим, что $\varkappa_r < \widetilde{\varkappa}_i$, $i \in \widetilde{\mathfrak{N}}$, тогда $\widetilde{\varkappa}_i - \varkappa_r - 1 \geqslant 0$ и из (3.3) получаем $\widetilde{P}_i T_{b_+ a_+^{-1}} c = 0$, $i \in \widetilde{\mathfrak{N}}$. Последнее означает, что $T_{b_+ a_+^{-1}} c = 0$, $c \in \operatorname{Im} P_r$. Но это противоречит обратимости оператора $T_{b_+ a_+^{-1}}$. Следовательно, найдется $n(r) \in \widetilde{\mathfrak{N}}$ такое, что $\varkappa_r = \widetilde{\varkappa}_{n(r)}$. Так как среди чисел $\varkappa_i$, $i \in \mathfrak{N}$, и $\widetilde{\varkappa}_i$, $i \in \widetilde{\mathfrak{N}}$, нет одинаковых, то $\varkappa_r < \widetilde{\varkappa}_i$, $i \neq n(r)$. Предполагая теперь, что $\dim P_r \neq \dim \widetilde{P}_{n(r)}$, получим противоречие, вычислив двумя способами $\dim \operatorname{Rer} B|_{\operatorname{Im} P_r}$. Возвращаясь к (3.3) и пользуясь произвольностью $c \in \operatorname{Im} P_r$, получим

$$P_i T_{b_+ a_+^{-1}} P_r = 0, \; i \in \widetilde{\mathfrak{N}}, \; i \neq n(r). \tag{3.4}$$

Умножим равенство (3.3) справа на $(I - P_r) + \xi^{-\varkappa_r} P_r$ и, используя тогда (3.4), получим

$$\sum_{i \in \mathfrak{N}_1} P^+ \xi^{\varkappa_i} P_i P^+ = T_{a_-^{-1} b_-} \sum_{i \in \widetilde{\mathfrak{N}}_1} P^+ \xi^{\widetilde{\varkappa}_i} P_i P^+ T_{b_+ a_+^{-1}} \tag{3.5}$$

где $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \setminus \{r\}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}_1 = \widetilde{\mathfrak{N}} \setminus \{n(r)\}$.

Исходя из (3.5), продолжим описанный выше процесс. Поскольку множества $\mathfrak{N}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ конечны, то после конечного числа шагов придем к утверждениям теоремы. ▲

Замечание 3.1. Теорема о сохранении частных индексов справедлива лишь для одинаковых типов факторизаций. Примеры, приводящие к изменению частных индексов при переходе от правых факторизаций к левым, общеизвестны. Оказывается, что и при переходе от правой вырожденной факторизации типа плюс к правой вырожденной факторизации типа минус частные индексы, вообще говоря, не сохраняются. Например, при $H = C$ $a(\xi) = 1 - \xi^{-1}$ и $a(\xi) = -(1 - \xi)\xi^{-1}$, $\xi \in \Gamma$. Первое из этих выражений представляет собой вырожденную факторизацию типа минус с нулевым индексом, а второе — вырожденную факторизацию типа плюс с индексом -1.

Замечание 3.2. Доказательство теоремы 3.1 по существу является алгебраическим и поэтому может быть использовано и для других типов факторизаций. Оно имеет место всякий раз, когда ограничены операторы $T_{a_\pm}$, $T_{b_\pm}$ и обратные к ним операторы $T_{a_\pm^{-1}}$, $T_{b_\pm^{-1}}$.

Теорема 3.2. *Оператор T_a, $a(\xi) \in C^\infty(B(H), \Gamma)$, обратим в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда его символ $a(\xi)$ допускает правую вырожденную факторизацию типа минус в алгебре $C^\infty(B(H), \Gamma)$ с нулевыми частными индексами.*

Δ Если $a(\xi) = a_-(\xi) a_+(\xi)$, то $T_a = T_{a_-} T_{a_+}$ и $T_a^{-1} = T_{a_+^{-1}} T_{a_-^{-1}}$, причем операторы $T_{a_\pm^{-1}}$ ограничены в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$ согласно определению вырожденной факторизации типа минус и теоремам 2.2, 2.3.

Предположим теперь, что оператор T_a обратим в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$. Пусть $[a_{ij}]_{(i,j)\in Z_+^2}$ — матрица, соответствующая оператору T_a^{-1}. Из равенств $T_a^{-1}T_a=I$, $T_aT_a^{-1}=I$, $a(\xi)=\sum_{j\in Z} a_j\xi^j$ вытекает, что

$$\sum_{i\in Z_+} a_{-i}a_{i0}=I,\quad \sum_{i\in Z_+} a_{-i+k}a_{i0}=0,\ k=1,2,\ldots, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j\in Z_+} a_{0j}a_j=I,\quad \sum_{j\in Z_+} a_{0j}a_{j-k}=0,\ k=1,2,\ldots \tag{3.7}$$

Кроме того, в силу теоремы 2.1 для любых $n\in Z_+$ и $c_n>0$, $m_n\in Z_+$ имеет место оценка

$$\|a_{ij}\|\leqslant c_n(|i|+1)^{-n}(|j|+1)^{m_n}. \tag{3.8}$$

Положим $a_+^{-1}(\xi)=\sum_{i\in Z_+} a_{i0}\xi^i$. В силу оценок (3.8) $a_+^{-1}(\xi)\in C_+^\infty(B(H), \Gamma)$, кроме того, из (3.6) следует, что

$$a(\xi)\,a_+^{-1}(\xi)=a_-(\xi), \tag{3.9}$$

где $a_-(\xi)\in C_-^\infty(B(H), \Gamma)$.

Положим $b_-(\xi)=\sum_{j\in Z_+} a_{0j}\xi^{-j}$, $|\xi|>1$. Из оценки (3.8) вытекает, что согласно теореме 2.3 оператор T_{b_-} ограничен в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$. Используя соотношения (3.7), легко получить, что $T_{b_-}T_a=T_{b_-a}\overset{\text{def}}{=}T_{b_+}$, причем оператор T_{b_+} ограничен в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$ как композиция ограниченных операторов. В силу теоремы 2.2 имеем $b_+(\xi)\in C_+^\infty(B(H), \Gamma)$.

Таким образом, из (3.9) и последнего равенства в силу обратимости оператора T_a получаем $T_{a_+^{-1}}=T_a^{-1}T_{a_-}$, $T_{b_+}=T_{b_-}T_a$. Следовательно, $T_{b_+a_+^{-1}}=T_{b_-}T_{a_-}=T_\alpha$, где $\alpha\in B(H)$. Покажем, что оператор α обратим в H. В самом деле, из равенства $\alpha=P_0T_a^{-1}|_{\operatorname{Im} P_0}$ следует, что $\operatorname{Im}\alpha$ замкнут. Пусть $\varphi\in\ker\alpha$, тогда $\varphi\in\ker T_{b_-}$ $(b_-(\infty)=\alpha)$. Это означает, что $\varphi\in\ker T_{b_+}T_a^{-1}$. Но $\ker T_{b_+}T_a^{-1}=\{0\}$, т. к. $b_+(0)=I$, а T_a^{-1} — обратимый оператор. Следовательно, $\varphi=0$ и $\ker\alpha=\{0\}$. Аналогичным образом $\ker\alpha^*=\{0\}$. Полагая $a_+(\xi)=$ $=\alpha^{-1}b_+(\xi)$, $a_-^{-1}(\xi)=\alpha^{-1}b_-(\xi)$, получим $T_{a_+}T_{a_+^{-1}}=T_I$, $T_{a_-^{-1}}T_{a_-}=T_I$. Эти равенства означают, что

$$a_+(\xi)\,a_+^{-1}(\xi)=I,\ \ a_-^{-1}(\xi)\,a_-(\xi)=I.$$

Покажем, что в левых частях последних равенств операторы коммутируют. В самом деле, заметим прежде всего, что $\ker T_{a_-^{-1}}T_a=\{0\}$, и положим $\psi=$ $=(T_{a_+^{-1}}T_{a_+}-I)\varphi$, $\varphi\in C_+^\infty(H, \Gamma)$. Тогда $T_{a_-^{-1}}T_a\psi=T_{a_-^{-1}}T_a(T_{a_+^{-1}}T_{a_+}-I)\varphi=0$. Следовательно, $\psi=0$, поэтому $T_{a_+^{-1}}T_{a_+}\varphi=\varphi$ для любого $\varphi\in C_+^\infty(H, \Gamma)$. Это и означает, что $a_+^{-1}(\xi)\,a_+(\xi)=I$. Равенство $a_-(\xi)\,a_-^{-1}(\xi)=I$ доказывается аналогично.

Возвращаясь к (3.9), получаем, что $a(\xi)=a_-(\xi)\,a_+(\xi)$, где $a_+^{\pm1}(\xi)\in$ $\in C_+^\infty(B(H), \Gamma)$, $a_-(\xi)\in C_-^\infty(B(H), \Gamma)$, $a_-^{-1}(\xi)=\alpha^{-1}b(\xi)=\sum_{j\in Z_+}\alpha^{-1}a_{0j}\xi^{-j}$, $\xi\to\infty$, и $\|\alpha^{-1}a_{0j}\|\leqslant\|\alpha^{-1}\|c(j+1)^m$ в силу оценки (3.8). ▲

4. В этом пункте мы рассмотрим некоторые алгебры $\mathfrak{A}$, для которых факторизуемость может быть описана в эффективно проверяемых терминах.

Предположим сначала, что $\mathfrak{A} \subseteq \boldsymbol{B}(H)$ — коммутативная C^*-алгебра. В этом случае факторизуемость функции может быть описана при помощи семейства функций, строящихся по $a(\xi)$ и пространству максимальных идеалов $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}$. Результаты этого пункта приводятся без доказательств (по поводу доказательств см. [14]).

Пусть $a(\xi) = \sum_{j \in Z} a_j \xi^j \in C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ и $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Обозначим через $a(\xi, \chi)$ определенную на $\Gamma \times \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ функцию $a(\xi, \chi) = \sum_{j \in Z} \chi(a_j) \xi^j$. Предположим, что функция $a(\xi, \chi)$ при любом фиксированном χ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Через $n_a(\chi)$ обозначим число нулей $a(\xi, \chi)$ с учетом кратностей при фиксированном $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Назовем сингулярным индексом величину

$$\varkappa_c(a) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma a'_\xi(\xi, \chi) a^{-1}(\xi, \chi) d\xi.$$

Пусть $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i \in \mathfrak{N}} \mathfrak{M}_i$, где $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = \Phi$ при $i \neq j$.

Теорема 4.1. *Функция $a(\xi) \in C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ допускает вырожденную факторизацию типа минус (плюс) в алгебре $C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда функция $a(\xi, \chi)$ удовлетворяет условиям:*

i) *при любом фиксированном $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ функция $a(\xi, \chi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков;*

ii) *величины $\varkappa_c(a) - n_a(\chi)(\varkappa_c(a) + n_a(\chi))$, $\chi \in \mathfrak{M}_i$, $i \in \mathfrak{N}$, не зависят от χ.*

При выполнении этих условий частные индексы факторизации могут быть найдены по формуле

$$\varkappa_i = (1/2)(\varkappa_c(a) - n_a(\chi))(\varkappa_i = (1/2)(\varkappa_c(a) + n_a(\chi))),\ \chi \in \mathfrak{M}_i,\ i \in \mathfrak{N}.$$

Предположим теперь, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathbf{R}$, где $\mathfrak{A}_0$ — коммутативная C^*-алгебра, а $\mathbf{R}$ — нильпотентный радикал Джекобсона алгебры $\mathfrak{A}$ с индексом нильпотентности m. Ясно, что $C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma) = C^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma) \oplus C^\infty(\mathbf{R}, \Gamma)$. Оказывается, факторизуемость функции $a(\xi)$ и $C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ и ее проекции $a_0(\xi): a(\xi) = a_0(\xi) + a_r(\xi)$ связаны в некотором смысле.

Теорема 4.2. *Если $a(\xi) \in C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ допускает вырожденную факторизацию в алгебре $C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ с набором частных индексов $\{\varkappa_i\}_{i \in \mathfrak{N}}$, то функция $a_0(\xi)$ допускает факторизацию того же типа с теми же частными индексами в алгебре $C^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$.*

Δ Пусть для определенности функция $a(\xi)$ допускает факторизацию (3.1). Тогда $a_0(\xi) = (a_-(\xi))_0 \sum_{i \in \mathfrak{N}} \xi^{\varkappa_i} P_i (a_+(\xi))_0$. Покажем, что функция $(a_+(\xi))_0$ обратима в $C_+^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$. В самом деле, $a_+^{-1}(\xi) = (a_+^{-1})_0 + (a_+^{-1})_r$, тогда, проектируя равенство $a_+^{-1} a_+ = I$ на подпространство $C_+^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$, получаем, что $(a_+)_0$ обратима в $C_+^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$. Аналогично доказывается, что $(a_-)_0$ является компонентой факторизации (3.1) в $C^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$. ▲

Замечание 4.1. Утверждение, обратное теореме 4.1, неверно. В качестве контрпримера достаточно рассмотреть алгебру нижнетреугольных матриц второго порядка.

Тем не менее справедлива

Теорема 4.3. *Пусть $a(\xi) = a_0(\xi) + a_r(\xi)$ и $a_0(\xi)$ допускает вырожденную факторизацию с нулевыми частными индексами в алгебре $C^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$. Тогда $a(\xi)$ допускает правую (левую) вырожденную факторизацию того же типа с нулевыми частными индексами.*

Δ Для определенности будем считать, что $a_0(\xi)$ допускает вырожденную факторизацию типа минус. В силу теоремы 3.2 достаточно доказать, что оператор T_a обратим в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$. Пусть $a_0(\xi)=a_-(\xi)\,a_+(\xi)$ — вырожденная факторизация типа минус в алгебре $C^\infty(\mathfrak{A}_0, \Gamma)$ функции $a_0(\xi)$. В силу теоремы 3.2 оператор T_{a_0} обратим, и поэтому имеет место равенство

$$T_{a_-^{-1}}T_aT_{a_+^{-1}}=I+T_{a_-^{-1}a_ra_+^{-1}}.$$

Поскольку операторы $T_{a_\pm^{-1}}$ обратимы, то достаточно убедиться в том, что оператор $I+T_{a_-^{-1}a_ra_+^{-1}}$ обратим в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$. Пусть $a_r(\xi)=\sum_{j\in Z}r_j\xi^j$, $r_j\in\mathbf{R}$, тогда, очевидно,

$$T^m_{a_-^{-1}a_ra_+^{-1}}=\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m}P^+a_-^{-1}r_{j1}a_+^{-1}P^+\ldots P^+a_-^{-1}r_{j_m}a_+^{-1}P^+=0.$$

Это означает, что оператор $I+T_{a_-^{-1}a_ra_+^{-1}}$ действительно обратим, и обратный к нему оператор может быть записан в виде ряда Неймана, который состоит из m слагаемых. ▲

Из теорем 3.2, 4.1, 4.3 вытекает

Теорема 4.4. *Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\oplus\mathbf{R}$, где $\mathfrak{A}_0$ — коммутативная C^*-алгебра, $\mathbf{R}$ — нильпотентный радикал Джекобсона алгебры $\mathfrak{A}$. Для того чтобы оператор* (3.1) *с символом $a(\xi)\in C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$ был обратим в пространстве $C_+^\infty(H, \Gamma)$, достаточно, чтобы:*

i) *при любом фиксированном $\chi\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_0)$ функция $a_0(\xi, \chi)$ имела на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков;*

ii) $\varkappa_c(a_0)=n_{a_0}(\chi)$, $\chi\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_0)$.

5. Пусть I, $G_1, \ldots, G_p$ — набор матриц размером $m\times m$. Будем говорить, что этот набор полон, если:

1) матрицы I, $G_1, \ldots, G_p$ линейно независимы;

2) матрицы $G_1, \ldots, G_p$ попарно коммутируют;

3) набор нельзя расширить, добавив к нему матрицу так, чтобы выполнялись условия 1), 2).

Лемма 5.1. *Если набор I, $G_1, \ldots, G_p$ полон, то $p=m-1$.*

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ коммутативную банахову алгебру, порожденную в алгебре $B(\boldsymbol{C}^m)$ полным набором I, $G_1, \ldots, G_{m-1}$. Пусть $a=\alpha_0I+\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_jG_j$, $\alpha_j\in\boldsymbol{C}$, и $\{(\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{m-1, k})\}_{k=1}^s$ — совместный спектр операторов $G_1, \ldots, G_{m-1}$. Положим

$$\chi_k(a)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j\lambda_{jk},\quad k=1, 2, \ldots, s.$$

Лемма 5.2. *Пространство максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}_0$ имеет вид $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_0)=\{\chi_k\}_{k=1}^s$.*

Пусть $L=[\lambda_{jk}]_{j=1, k=0}^{s, m-1}$, где $\lambda_{j0}=1$ и $x_1, \ldots, x_s$ — совместные собственные векторы операторов $G_1, \ldots, G_{m-1}$. Обозначим через V матрицу размеров $m\times s$, столбцами которой являются векторы $x_1, \ldots, x_s$.

Лемма 5.3. *Если $s=m$, то* $\det L\neq 0$, $\det V\neq 0$.

Обозначим через e_j, $j=1, 2, \ldots, m$, диагональную матрицу с единицей на j-м месте и остальными нулями и положим $\mathbf{P}_j=Ve_jV^{-1}$.

Лемма 5.4. *Если $s=m$, то $\mathbf{P}_j\in\mathfrak{A}$ и в качестве образующих алгебры $\mathfrak{A}_0$ можно выбрать операторы $\mathbf{P}_j$, $j=1, 2, \ldots, m$.*

Пусть $a=\sum_{j=1}^m\beta_j\mathbf{P}_j\in\mathfrak{A}_0$. Введем в $\mathfrak{A}_0$ структуру C^*-алгебры, полагая $a^*=\sum_{j=1}^m\bar\beta_j\mathbf{P}_j$. Пусть J_k, $k=1, 2, \ldots, m(m-1)/2$, — верхнетреугольные линейно независимые матрицы, все элементы которых, кроме одного, равного единице, равны нулю. Через $\mathbf{R}$ обозначим подалгебру $B(C^m)$, порожденную элементами $r_k = VJ_kV^{-1}$. Нетрудно видеть, что алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathbf{R}$ удовлетворяет всем условиям п. 4.

Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$, тогда $a(\xi) = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j(\xi) \mathrm{P}_j + \sum_k \omega_k(\xi) r_k$. В силу леммы 5.2 имеем $a_0(\xi, \chi_l) = \Delta_l(\xi)$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Из сделанных замечаний и результатов п. 4 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\mathfrak{A}, \Gamma)$, где $\mathfrak{A}$ — банахова алгебра, построенная в п. 5. Оператор T_a обратим в пространстве $C_+^\infty(C^m, \Gamma)$, если:*

i) *каждая из функций $\Delta_l(\xi)$ имеет на Γ не более, чем конечное число нулей конечных порядков;*

ii) $\varkappa_c(\Delta_l) = n_l$, $l = 1, 2, \dots, m$, *где n_l — число нулей Δ_l на Γ с учетом кратностей.*

Замечание 5.1. Класс рассмотренных в этом пункте матричных тёплицевых операторов по существу совпадает с классом операторов с треугольными матричными символами, поскольку рассматриваемая здесь алгебра $\mathfrak{A}$ постоянным преобразованием переводится в алгебру нижнетреугольных матриц (см., напр., [15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 511 с.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
3. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М.: Наука, 1971.— 352 с.
4. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.— Кишинев, 1973.— 426 с.
5. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 493 с.
6. Крупник Н. Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы.— Кишинев, 1984.— 138 с.
7. Meister E., Speck F.-O. Some multi-dimensional Wiener — Hopf equations with applications // Trends. Appl. Pure Math., Poland, 1977.— № 2.— P. 217—262.
8. Малышев В. А. Уравнения Винера — Хопфа и их применения в теории вероятностей // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. теория вероятностей, матем. стат., теор. кибернет.— 1976.— Т. 13.— С. 5—35.
9. Devinatz A., Shinbrot M. General Wiener — Hopf operators // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 145.— P. 467—494.
10. Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К. Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Изв. вузов. Математика.— 1967.— № 10.— С. 39—49.
11. Карапетянц Н. К. Дискретные уравнения типа свертки в одном исключительном случае // Сиб. матем. журн.— 1970.— Т. 11.— № 1.— С. 80—90.
12. Prössdorf S. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs // Math. Ann.— 1969.— Bd. 183.— № 2.— P. 130—150.
13. Хайкин М. И. Сингулярное интегральное уравнение с непрерывными коэффициентами в особом случае // Тр. семин. по краев. задачам.— Казань, 1973, вып. 10.— С. 152—162.
14. Пасенчук А. Э. О факторизации функций со значениями в некоторых топологических коммутативных алгебрах и ее приложениях к вопросам обратимости и нетеровости.— Новочеркасск, 1986.— 34 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 24.03.27, № 8008—В86.
15. Литвинчук Г. С., Спитковский И. М. Факторизация матриц-функций.— Одесса, 1984.— 460 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 17.04.84, № 2410—84.

г. Новочеркасск

Поступили
первый вариант 18.05.1988
окончательный вариант 24.01.1989