1957 г. март—апрель т. XII, вып. 2(74)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ВИДА $\{f(z+\alpha_n)\}$ и $\{f^{(n)}(z)\}$

Ю. А. Казьмин

В заметке с помощью бесконечных систем линейных уравнений исследуются вопросы, связанные с проблемой полноты систем функций вида $\{f(z+\alpha_n)\}$ и $\{f^{(n)}(z)\}$.

Обозначим через A_R [1]) комплексное координатное пространство точек $x(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leqslant \frac{1}{R},$$

а через $\overline{A}_R$ — условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < \frac{1}{R}.$$

Очевидно, что A_R изоморфно пространству функций, аналитических в круге $|z| < R$, а $\overline{A}_R$ — в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Поэтому в дальнейшем соответственные пространства аналитических функций мы будем обозначать теми же символами. Из текста всегда будет ясно, что́ понимать под A_R или $\overline{A}_R$ в том или ином случае.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < R$, а $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — бесконечное множество различных точек, причем $\sup\limits_n |\alpha_n| = \alpha$, $\alpha < R$. Тогда системы функций*

$$\{f(z+\alpha_n)\} \quad \text{и} \quad \{f^{(n)}(z)\} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

одновременно полны или нет в круге $|z| < r$, $r = R - \alpha$.

Доказательство. Для того чтобы первая система функций $\{f(z+\alpha_n)\}$ была полной в A_r, необходимо и достаточно, чтобы для всякого линейного функционала $F[\varphi]$ в A_r из выполнения условий

$$F[f(z+\alpha_n)] = 0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

вытекало, что $F[\varphi] = 0$ для любой функции $\varphi(z) \in A_r$ [2], а это эквивалентно тому (учитывая общий вид линейного функционала в A_r [3]), что

[1]) Символика заимствована из работы [1].

бесконечная система линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha_0)x_0+\frac{f'(\alpha_0)}{1!}x_1+\frac{f''(\alpha_0)}{2!}x_2+\ldots&=0,\\ f(\alpha_1)x_0+\frac{f'(\alpha_1)}{1!}x_1+\frac{f''(\alpha_1)}{2!}x_2+\ldots&=0,\\ f(\alpha_2)x_0+\frac{f'(\alpha_2)}{1!}x_1+\frac{f''(\alpha_2)}{2!}x_2+\ldots&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

имела бы в $\overline{A}_{1/r}$ единственное решение.

Предположим, что система функций $\{f(z+\alpha_n)\}$ не является полной в A_r, тогда система (1) имеет в $\overline{A}_{1/r}$ нетривиальное решение $\{x_n\}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x_n|}=\rho<r.$$

Представив $\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha_n)$ в виде

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=l}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\alpha_n)^{k+1}}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\rho+\alpha<l<R$, перепишем систему (1) следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=l}f(\zeta)\left[\frac{x_0}{\zeta-\alpha_n}+\frac{x_1}{(\zeta-\alpha_n)^2}+\ldots+\frac{x_k}{(\zeta-\alpha_n)^{k+1}}+\ldots\right]d\zeta=0$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=l}f(\zeta)\left[\frac{x_0}{\zeta-z}+\frac{x_1}{(\zeta-z)^2}+\ldots+\frac{x_k}{(\zeta-z)^{k+1}}+\ldots\right]d\zeta; \tag{2}$$

$\Phi(z)$ регулярна в замкнутом круге $|z|\leqslant\alpha$ [4] и на множестве $\{\alpha_n\}$ обращается в нуль. Учитывая характер множества $\{\alpha_n\}$, отсюда мгновенно заключаем, что $\Phi(z)\equiv 0$. Найдем последовательные производные $\Phi(z)$ [4]:

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=l}f(\zeta)\left[\frac{n!}{1}\,\frac{x_0}{(\zeta-z)^{n+1}}+\frac{(n+1)!}{1!}\,\frac{x_1}{(\zeta-z)^{n+2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(n+k)!}{k!}\,\frac{x_k}{(\zeta-z)^{n+k+1}}+\ldots\right]d\zeta$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Все $\Phi^{(n)}(z)$, очевидно, тождественно равны нулю; в частности,

$$\Phi^{(n)}(0)=0\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Но (3) как раз является бесконечной системой линейных уравнений

$$F[f^{(n)}(z)]=0$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

соответствующей второй системе функций. Следовательно, если система (1) имеет в $\overline{A}_{1/r}$ нетривиальное решение, то и система (3) имеет также нетривиальное решение в том же пространстве. Таким образом, мы показали, что если первая система $\{f(z+\alpha_n)\}$ не полна в A_r, то и вторая система $\{f^{(n)}(z)\}$ тоже не полна в A_r. Но мы установили бо́льшее: зависимость между полнотой обеих систем. Теперь ясно, что обе системы полны или нет в A_r одновременно: если $\{f^{(n)}(z)\}$ — полная система в A_r, то, предполагая, что система $\{f(z+\alpha_n)\}$ не полна в A_r, и следуя по изложенному выше пути, мы придем к противоречию (система (3) имеет в $\overline{A}_{1/r}$ нетривиальное решение); если же $\{f(z+\alpha_n)\}$ полна в A_r, то, предполагая, что система $\{f^{(n)}(z)\}$ не является полной в A_r, и отправляясь от равенств (3) в путь, обратный изложенному, мы опять придем к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если относительно множества $\{\alpha_n\}$ известно только то, что оно имеет предельную точку α^*, $|\alpha^*|<R$, то системы функций*

$$\{f(z+\alpha_n)\} \quad и \quad \{f^{(n)}(z)\}$$

полны или нет одновременно в круге $|z|<r$,

$$r=R-|\alpha^*|-\varepsilon, \text{ где } \varepsilon>0 —$$

сколь угодно малое число.

Примечание. При $R=\infty$ получается результат, установленный А. И. Маркушевичем в [3].

Теорема 2. *Если система функций $\{f^{(n)}(z)\}$ полна в некотором круге*

$$|z-\gamma_0|<r, \quad |\gamma_0|+r\leqslant R,$$

то она является полной в любом круге

$$|z-\gamma|<\rho, \quad \rho\leqslant r, \quad |\gamma|+\rho\leqslant R.$$

В самом деле, допустим, что система функций $\{f^{(n)}(z)\}$, полная в круге $|z-\gamma_0|<r$, неполна в некотором круге $|z-\gamma|<\rho$, $\rho\leqslant r$. Тогда бесконечная система линейных уравнений

$$\Phi^{(n)}(\gamma)=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

где функция $\Phi(z)$ определяется формулой (2), имеет в $\overline{A}_{1/\rho}$ нетривиальное решение $\{x_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x_n|}=\rho_0<\rho$.

Отсюда без труда заключаем, что функция $\Phi(z)$ является аналитической в замкнутом круге $\overline{k}$: $|z|\leqslant R-\rho$, а благодаря (4) $\Phi(z)\equiv 0$ (так как $\gamma\in\overline{k}$). Тогда

$$\Phi^{(n)}(\gamma_0)=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{5}$$

($\gamma_0\in\overline{k}$). Но из (5) немедленно вытекает, что система функций $\{f^{(n)}(z)\}$ не является полной в круге $|z-\gamma_0|<r$, что абсурдно.

Ясно, что для системы функций $\{f(z+\alpha_n)\}$ справедливо предложение, аналогичное теореме 2.

В заключение отметим, что локальная полнота во всей области аналитичности системы функций $\{f_j(z)\}$ $(j=0,\ 1, 2,\ \ldots)$, вытекающая из полноты этой системы в некотором фиксированном круге (как это имеет место (см. теорема 2) для последовательных производных $\{f^{(n)}(z)\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и для $\{f(z+\alpha_n)\}$) наблюдается и у некоторых других систем функций. Этим свойством, например, обладают: $\{f(\zeta_n z)\}$, $\{z^n f^{(n)}(z)\}$ и др.

Поступило в редакцию 20 октября 1955 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Хапланов, Некоторые свойства аналитического пространства, ДАН **79**, № 6 (1951), 929—932.

[2] М. Г. Хапланов, Матричный признак полноты системы аналитических функций, ДАН **83**, № 1 (1952), 35—38.

[3] А. И. Маркушевич, О базисе и пространстве аналитических функций, Матем. сб. **17** (59): 2 (1945), 211—252.

[4] Е. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1951.