A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, Asymptotic analysis of integro-differential systems with an unstable spectral value of the integral operator's kernel, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2007, Volume 47, Number 1, 67–82

УДК 519.642.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© 2007 г. А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов

(111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, МЭИ(ТУ), каф. высш. матем.)

e-mail: BobojanovA@mpei.ru

Поступила в редакцию 27.12.2005 г.

Рассматривается система интегродифференциальных уравнений с быстро изменяющимися ядрами, одно из которых имеет нестабильное спектральное значение. Предлагается алгоритм, позволяющий получать асимптотические решения (любого порядка) с помощью метода нормальных форм. На основе анализа главного члена асимптотики исследуются контрастные структуры (внутренние переходные слои) в решениях данной задачи. Показывается, что контрастные структуры являются следствием нестабильности спектрального значения и наличия неоднородности. Выясняется также роль ядра интегральных операторов при формировании контрастных структур. Библ. 7.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, асимптотический анализ, контрастные структуры.

Внутренний переходный слой в решениях дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с малым параметром при производной является объектом внимания математиков в продолжении уже не одного десятка лет. Исследовались переходные слои (контрастные структуры) в нелинейных задачах, обусловленные специальным видом нелинейностей (см., например, [1], [2]), переходные слои в системах дифференциальных уравнений и в системах оптимального управления, в линейных интегродифференциальных системах, вызванные нестабильностью спектра соответствующего предельного оператора (см. [3]–[5]). В последнее время интерес к этой тематике возрос, так как появились новые задачи, структура переходных слоев которых описывается нетрадиционно (см., например, [6], где контрастные структуры являются следствием негладкости "составного корня" вырожденного уравнения). В настоящей работе продолжаются исследования, связанные с возникновением внутренних переходных слоев в условиях нестабильности спектрального значения ядра интегрального оператора.

Рассматривается интегродифференциальная система

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_0(\theta)d\theta\right)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + M(t)\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_1(\theta)d\theta\right)N(s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \quad (1)$$
$$y(0,\varepsilon) = y^0,$$

с двумя быстро изменяющимися ядрами, одно из которых имеет нестабильное спектральное значение ($\mu_1(t) \equiv 0\ \forall t \in S \subset [0, T]$), другое – стабильное спектральное значение ($\mu_0(t) \neq 0\ \forall t \in [0, T]$). Ставится задача о построении асимптотического решения (любого порядка) системы (1) при $\varepsilon \longrightarrow +0$. В ходе исследования этой задачи обсуждается (как самостоятельный объект) проблема описания контрастных структур в системе (1). Исчерпывающий ответ на вопрос о том, при каких условиях возникают такие структуры и какова их конструкция, может быть получен на основе анализа асимптотического решения задачи (1). Перейдем к разработке алгоритма построения такого решения.

1. СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Введем вектор-функцию

$$z = \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_1(\theta)d\theta\right)N(s)y(s,\varepsilon)ds.$$

Дифференцируя ее по t, получаем систему $\varepsilon\dot{z} = \mu_1(t)z + \varepsilon N(t)y$ и сводим исходную задачу (1) к эквивалентной системе

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y + M(t)z + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_0(\theta)d\theta\right)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0,$$

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = \mu_1(t)z + \varepsilon N(t)y, \quad z(0,\varepsilon) = 0.$$

Эта система является частным случаем более общей системы

$$\varepsilon\frac{dw}{dt} = A_0(t)w + \varepsilon A_1(t)w + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_0(\theta)d\theta\right)G(t,s)w(s,\varepsilon)ds + H(t), \quad w(0,\varepsilon) = w^0, \tag{2}$$

где $w = \{y, z\} \equiv \{w_1, \ldots, w_{m+n}\}$, $H(t) = \{H_1(t), \ldots, H_{m+n}(t)\}$, $w^0 = \{w_1^0, \ldots, w_{m+n}^0\}$, $A_0(t)$, $A_1(t)$, $G(t,s)$ суть $(m+n)\times(m+n)$-матрицы. В исходной системе (1) $B(t)$ и $K(t,s)$ – квадратные матрицы порядка n, а $M(t)$ и $N(t)$ – прямоугольные матрицы размеров $n\times m$ и $m\times n$ соответственно. Система (2) превращается в систему (1), если в ней положить

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} B(t) & M(t) \\ 0 & \mu_1(t)I_m \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad G(t,s) = \begin{pmatrix} K(t,s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы включить систему (1) в класс систем типа (2), необходимо предположить, что спектр матрицы $A_0(t)$ имеет вид $\sigma(A_0(t)) \equiv \{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{m+n}(t)\}$ и состоит из двух частей: $\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)\}$, т.е. что последние m точек спектра матрицы $A_0(t)$ совпадают со спектральным значением $\mu_1(t)$ ($\lambda_j(t) \equiv \mu_1(t)$, $j = \overline{n+1, m+n}$). Обозначая $\mu_0(t) = \lambda_{m+n+1}(t)$ и вводя обозначение $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_j(t)\}$ для биортогональных систем собственных векторов матрицы $A_0(t)$ и $A_0^*(t)$ соответственно ($A_0(t)\varphi_i(t) \equiv \lambda_i(t)\varphi_i(t)$, $A_0^*(t)\chi_j(t) = \bar{\lambda}_j(t)\chi_j(t)$, $(\varphi_i(t), \chi_j(t)) \equiv \delta_{ij}$ – символ Кронекера, $i, j = \overline{1, m+n}$), опишем условия, при которых будет рассматриваться задача (2):

1) $A_0(t), A_1(t) \in \mathbb{C}^\infty([0,T], \mathbb{C}^{(m+n)^2})$, $G(t,s) \in \mathbb{C}^\infty(0 \le s \le t \le T, \mathbb{C}^{(m+n)^2})$, $H(t) \in \mathbb{C}^\infty([0,T], \mathbb{C}^{m+n})$;

2) спектр $\sigma(A_0(t)) = \{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{m+n}(t)\}$ таков, что $\lambda_{n+2}(t) \equiv \ldots \equiv \lambda_{m+n}(t) \equiv \lambda_{n+1}(t)$; $\lambda_i(t) \ne 0$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda_{m+n+1}(t) \ne 0$ $\forall t \in [0,T]$; $\lambda_{n+1}(t) \equiv 0$ $\forall t \in S$, $\lambda_{n+1}(t) \ne 0$ $\forall t \in [0,T]/S$ (S – замкнутое подмножество отрезка $[0,T]$, не совпадающее с $[0,T]$);

3) $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t)$, $i \ne j$, $i, j = \overline{1, n+1}$; $\lambda_k(t) \ne \lambda_{m+n+1}(t)$, $k = \overline{1, n+1}$ $\forall t \in [0,T]$;

4) $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \le 0$ $\forall t \in [0,T]$, $j = \overline{1, m+n+1}$;

5) $(H(t), \chi_j(t)) \equiv 0$ $\forall t \in [0,T]$, $j = \overline{n+1, m+n}$.

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ (2)

Введем вектор $u = \{u_1, \ldots, u_{m+n+1}\}$ регуляризующих функций, удовлетворяющий нормальной форме

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = \Lambda(t)u + \sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r\sum_{j=n+1}^{m+n} g_{rj}(t)e_j, \quad u(0, \varepsilon) = \mathbf{1}, \tag{3}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{m+n+1}(t))$, $e_j = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$ есть j-й орт в $\mathbb{C}^{m+n+1}$, $\mathbf{1} = \{1, \ldots, 1\} \in \mathbb{C}^{m+n+1}$ – вектор, сплошь состоящий из единиц, а скалярные функции $g_{rj}(t)$ пока не известны и определяются в процессе построения асимптотического решения задачи (2). Для вектор-функции $\tilde{w} = \tilde{w}(t, u, \varepsilon)$ такой, что $\tilde{w}(t, u(t, \varepsilon), \varepsilon) \equiv w(t, \varepsilon)$ (где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (3), $w(t, \varepsilon)$ – точное решение системы (2)) естественно поставить следующую задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial u}\left(\Lambda(t)u + \sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r\sum_{j=n+1}^{m+n} g_{rj}(t)e_j\right) - A_0(t)\tilde{w} - \varepsilon A_1(t)\tilde{w} - \\ -\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t, s)\tilde{w}(s, u(s, \varepsilon), \varepsilon)ds = H(t), \quad \tilde{w}(0, \mathbf{1}, \varepsilon) = w^0,\end{gathered} \tag{4}$$

где $u(t, \varepsilon)$ – решение регуляризующей нормальной формы (3). Хотя (4) является расширением системы (2), в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$J\tilde{w}(t, u(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t, s)\tilde{w}(s, u(s, \varepsilon), \varepsilon)ds,$$

поэтому такое расширение практически ничего не дает для построения асимптотического решения задачи (2). Для регуляризации $J\tilde{w}$ надо ввести класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см. [3, с. 62]).

Определение 1. Будем говорить, что вектор-функция $w(t, u) = \{w_1, \ldots, w_{m+n}\}$ принадлежит пространству U, если она представима суммой

$$w(t, u) = \sum_{j=1}^{m+n+1} w_j(t)u_j + w_0(t), \tag{5}$$

в которой коэффициенты $w_j(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^{m+n})$, $j = 0, 1, \ldots, m+n+1$.

В качестве класса M_ε возьмем пространство $U|_{u=u(t,\varepsilon)}$, где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (3). Покажем, что M_ε асимптотически инвариантен относительно оператора J. Для этого надо обосновать, что его образ $Jw(t, u(t, \varepsilon))$ на элементах (5) пространства U представим в виде степенного ряда

$$\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k\left(\sum_{j=1}^{m+n+1} v_j^{(k)}(t)u_j(t, \varepsilon) + v_0^{(k)}(t)\right), \tag{6}$$

асимптотически сходящегося (при $\varepsilon \longrightarrow +0$) равномерно по $t \in [0, T]$. Сделаем это. На функциях (5) образ Jw имеет вид

$$\begin{gathered}Jw(t, u) = \sum_{j=n+1}^{m+n}\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t, s)w_j(s)u_j(s, \varepsilon)ds + \\ + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta\right)G(t, s)w_j(s)ds +\end{gathered}$$

$$+\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t,s)w_0(s)ds + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\int_0^t G(t,s)w_{m+n+1}(s)ds.$$

Здесь учтено, что

$$u_j(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta\right), \quad j = 1, 2, \dots, n, m+n+1.$$

Применяя интегрирование по частям, приходим (см. [7]) к тождествам

$$J_0(t,\varepsilon) \equiv \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t,s)w_0(s)ds =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[(I_0^{\nu}(G(t,s)w_0(s)))_{s=t} - (I_0^{\nu}(G(t,s)w_0(s)))_{s=0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\right], \tag{7а}$$

$$J_j(t,\varepsilon) \equiv \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta\right)G(t,s)w_j(s)ds = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\times$$
$$\times\left[(I_j^{\nu}(G(t,s)w_j(s)))_{s=t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta\right) - (I_j^{\nu}(G(t,s)w_j(s)))_{s=0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\right], \tag{7б}$$
$$j = \overline{1,n},$$

где введены операторы

$$I_0^0 = -\frac{1}{\lambda_{m+n+1}(s)}, \quad I_0^{\nu} = -\frac{1}{\lambda_{m+n+1}(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_0^{\nu-1} \quad (\nu \ge 1),$$

$$I_j^0 = \frac{1}{\lambda_j(s) - \lambda_{m+n+1}(s)}, \quad I_j^{\nu} = \frac{1}{\lambda_j(s) - \lambda_{m+n+1}(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{\nu-1}, \quad j = \overline{1,n} \quad (\nu \ge 1).$$

Нетрудно показать, что ряды (7а), (7б) сходятся асимптотически (при $\varepsilon \longrightarrow +0$) к соответствующим интегралам.

Займемся теперь интегралом

$$J_j(t,\varepsilon) \equiv \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t,s)w_j(s)u_j(s,\varepsilon)ds, \quad j = \overline{n+1, m+n}. \tag{8}$$

Для его регуляризации нам нужна

Лемма 1. *Пусть функции $b(t), c(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ таковы, что $b(t) \ne c(t)$ $\forall t \in [0,T]$ и функция $g(t,\varepsilon)$ непрерывна по $t \in [0,T]$ при каждом $\varepsilon > 0$. Если функция $v = v(t,\varepsilon)$ является решением уравнения*

$$\varepsilon\dot{v} = b(t)v + g(t,\varepsilon),$$

то при любых $t \in [0,T]$ и $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$v(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{b(t)-c(t)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)v(t,\varepsilon)\right) - \frac{g(t,\varepsilon)}{b(t)-c(t)}. \tag{9}$$

Доказательство вытекает из цепочки следующих преобразований:

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)v(t,\varepsilon)\right) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)\left(-\frac{c(t)}{\varepsilon}\right)v + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)\dot{v} \Leftrightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)v(t,\varepsilon)\right) = -c(t)v+\varepsilon\dot{v}\equiv -c(t)v+b(t)v+g(t,\varepsilon)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{\varepsilon}{b(t)-c(t)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(\theta)d\theta\right)v(t,\varepsilon)\right)-\frac{g(t,\varepsilon)}{b(t)-c(t)}.$$

Применяя к (8) лемму 1 при

$$c(t)\equiv\lambda_{m+n+1}(t),\quad b(t)\equiv\lambda_{n+1}(t),\quad g(t,\varepsilon)\equiv\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_{rj}(t),$$

и учитывая, что

$$\varepsilon\dot{u}_j = \lambda_{n+1}(t)u_j+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_{rj}(t),\quad j = \overline{n+1, m+n},$$

будем иметь

$$J_j(t,\varepsilon) = \int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)G(t,s)w_j(s)\frac{\varepsilon}{\lambda_{n+1}(s)-\lambda_{m+n+1}(s)}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\frac{d}{ds}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)u_j(s,\varepsilon)\right)ds-$$

$$-\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\frac{G(t,s)w_j(s)g_{rj}(s)}{\lambda_{n+1}(s)-\lambda_{m+n+1}(s)}ds = \tag{10}$$

$$= \varepsilon\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\left(\int_0^t I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s))\right)\left(\frac{d}{ds}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)u_j(s,\varepsilon)\right)\right)ds-$$

$$-\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s)g_{rj}(s))ds,$$

где введены обозначения

$$I_{n+1}^0\equiv\frac{1}{\lambda_{n+1}(s)-\lambda_{m+n+1}(s)},\quad I_{n+1}^{\nu} = \frac{1}{\lambda_{n+1}(s)-\lambda_{m+n+1}(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{n+1}^{\nu-1}\quad(\nu\geq 1).$$

Стоящие здесь интегралы берем по частям; при этом будем иметь

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\int_0^t I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s))\frac{d}{ds}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)u_j(t,\varepsilon)\right)ds =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\left[(I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s))_{s=t}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)u_j(t,\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-(I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s))_{s=0}u_j(0,\varepsilon)-\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s))\right)ds\right] =$$

$$= \left[(I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s))_{s=t}u_j(t,\varepsilon) - (I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s))_{s=0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\right] -$$

$$- \int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s))\right)u_j(s,\varepsilon)ds.$$

Здесь последний интеграл является интегралом типа (8) (в нем вместо $G(t, s)w_j(s)$ стоит вектор-функция $\frac{\partial}{\partial s}I^0_{n+1}(G(t, s)w_j(s))$, поэтому можно снова применить лемму 1. К остальным интегралам в (10) можно применить формулу (7а) для $J_0(t, \varepsilon)$ (в них роль $G(t, s)w_0(s)$ играют вектор-функции $I^0_{n+1}(G(t, s)w_j(s)g_{rj}(s)))$ и получить разложение

$$\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s))g_{rj}(s))ds = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\varepsilon^{\nu+1}\times$$

$$\times\left[(I^\nu_0(I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s)g_{rj}(s))))_{s=t} - (I^\nu_0(I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s)g_{rj}(s))))_{s=0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \lambda_{m+n+1}(\theta)d\theta\right)\right].$$

Таким образом, многократное применение леммы 1 и операции интегрирования по частям позволяет записать $J_j(t, \varepsilon)$ (при $j = \overline{n+1, m+n}$) в виде ряда (6) (в котором $v_s^{(k)}(t) \equiv 0$ при $s \neq j$). Нетрудно показать, что он будет сходиться к $J_j(t, \varepsilon)$ асимптотически при $\varepsilon \longrightarrow +0$ (равномерно по $t \in [0, T]$). Это означает, что класс $M_\varepsilon = U|_{u=u(t,\varepsilon)}$ инвариантен относительно оператора J. Группируя в $Jw(t, u)$ коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем иметь

$$Jw(t,u) = R_0w(t,u) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}R_{k+1}w(t,u),$$

где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (3), а операторы $R_k : U \longrightarrow U$ (операторы порядка по ε) таковы, что их образ $R_kw(t, u)$ является суммой всех коэффициентов при ε^k в $Jw(t, u)$. Явные выражения этих операторов при $k = 0, 1, 2$ таковы:

$$R_0w(t,u) = u_{m+n+1}\int\limits_0^t G(t,s)w_{m+n+1}(s)ds,$$

$$R_1w(t,u) = [(I^0_0(G(t,s)w_0(s)))_{s=t} - (I^0_0(G(t,s)w_0(s)))_{s=0}u_{m+n+1}] +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}[(I^0_j(G(t,s)w_j(s)))_{s=t}u_j - (I^0_j(G(t,s)w_j(s)))_{s=0}u_{m+n+1}] +$$

$$+\sum_{j=n+1}^{m+n}[(I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s)))_{s=t}u_j - (I^0_{n+1}(G(t,s)w_j(s)))_{s=0}u_{m+n+1}],$$

$$R_2w(t,u) = -[(I^1_0(G(t,s)w_0(s)))_{s=t} - (I^1_0(G(t,s)w_0(s)))_{s=0}u_{m+n+1}] - \qquad (11)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}[(I^1_j(G(t,s)w_j(s)))_{s=t}u_j - (I^1_j(G(t,s)w_j(s)))_{s=0}u_{m+n+1}] -$$

$$-\sum_{j=n+1}^{m+n}[(I^1_{n+1}(G(t,s)w_j(s)))_{s=t}u_j - (I^1_{n+1}(G(t,s)w_j(s)))_{s=0}u_{m+n+1}] -$$

$$-\sum_{j=n+1}^{m+n}[(I_0^0(I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s)g_{1j}(s))))_{s=t}-(I_0^0(I_{n+1}^0(G(t,s)w_j(s)g_{1j}(s))))_{s=0}u_{m+n+1}].$$

Явные выражения для R_k при $k \geq 3$ громоздки, и мы их не выписываем. Если теперь

$$\tilde{w}(t,u,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t,u) \tag{12}$$

есть ряд с коэффициентами $w_k(t, u) \in U$, то формальное расширение $\tilde{J}$ оператора J на рядах такого типа строится по известному правилу (см. [7])

$$\tilde{J}\tilde{w}(t,u,\varepsilon) \equiv \tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t,u)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\sum_{s=0,\,\nu-s\geq 0}^{\nu} R_{\nu-s}w_s(t,u).$$

Далее (ради упрощения выкладок) считаем $m = 1$. Регуляризованная (по отношению к (2)) задача будет иметь вид

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial u}\left(\Lambda(t)u+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_{r,n+1}(t)e_{n+1}\right)-A_0(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}-\tilde{J}\tilde{w} = H(t), \quad \tilde{w}(0,\mathbf{1},\varepsilon) = w^0. \tag{13}$$

Эта задача имеет смысл в классе функций $\tilde{w}(t, u, \varepsilon)$, представимых рядами (12), сходящимися асимптотически (при $\varepsilon \longrightarrow +0$) равномерно по $(t, u) \in [0, T] \times \Pi$ ($\Pi = \{u: |u_j| < 1 + \delta, j = \overline{1, n+2}\}$, $\delta > 0$ – малая постоянная).

Подставляя ряд (12) в (13) и производя приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε, получаем следующие итерационные задачи:

$$L_0w_0(t,u) \equiv \frac{\partial w_0}{\partial u}\Lambda(t)u - A_0(t)w_0 - R_0w_0 = H(t), \quad w_0(0,\mathbf{1}) = w^0, \tag{14_0}$$

$$L_0w_1(t,u) = -\frac{\partial w_0}{\partial t}+A_1(t)w_0-\frac{\partial w_0}{\partial u}g_{1,n+1}(t)e_{n+1}+R_1w_0, \quad w_1(0,\mathbf{1}) = 0, \tag{14_1}$$

$$L_0w_2(t,u) = -\frac{\partial w_1}{\partial t}+A_1(t)w_1-\frac{\partial w_0}{\partial u}g_{2,n+1}(t)e_{n+1}-\frac{\partial w_1}{\partial u}g_{1,n+1}(t)e_{n+1}+R_2w_0+R_1w_1, \quad w_2(0,\mathbf{1}) = 0, \tag{14_2}$$

....

$$L_0w_k(t,u) = -\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+A_1(t)w_{k-1}-\frac{\partial w_0}{\partial u}g_{k,n+1}(t)e_{n+1}-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{\partial w_r}{\partial u}g_{k-r,n+1}(t)e_{n+1}+\sum_{j=0}^{k-1}R_{k-j}w_j,$$
$$w_k(0,\mathbf{1}) = 0, \quad k \geq 2, \tag{14_k}$$

где $g_{r,n+1}(t) \equiv 0$ при $r > l + 1$, а u_j считаются независимыми переменными.

Решения итерационных задач (14_k) будем определять в подпространстве V пространства U, описываемого следующим образом:

$$V = \left\{w(t,u) \in U : w = \sum_{j=1}^{n+2}w_j(t)u_j + w_0(t), (w_0(t), \chi_{n+1}(t)) \equiv 0, \forall t \in [0,T]\right\}.$$

Правые части уравнений (14_k) могут не принадлежать пространству V. Вложение их в пространство V производится с помощью функций $g_{r,n+1}(t)$, участвующих в нормальной форме (3). Покажем это на примере итерационного уравнения (14_1). Поскольку в нем участвует решение $w_0(t, u)$ первой итерационной задачи (14_0), начнем с вычисления этого решения.

3. РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Будем определять решение задачи (14_0) в пространстве V в виде функции

$$w_0(t,u) = \sum_{j=1}^{n+2} w_j^{(0)}(t)u_j + w_0^{(0)}(t). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14_0), получаем равенство

$$\sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j(t)w_j^{(0)}(t)u_j - \sum_{j=1}^{n+2}A_0(t)w_j^{(0)}(t)u_j - A_0(t)w_0^{(0)}(t) - \left(\int_0^t G(t,s)w_{n+2}^{(0)}(s)ds\right)u_{n+2} = H(t).$$

Приравнивая здесь отдельно коэффициенты при u_j и свободные члены, приходим к соотношениям

$$[\lambda_j(t)I - A_0(t)]w_j^{(0)}(t) = 0, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{16}$$

$$[\lambda_{n+2}(t)I - A_0(t)]w_{n+2}^{(0)}(t) - \int_0^t G(t,s)w_{n+2}^{(0)}(s)ds = 0, \tag{17}$$

$$-A_0(t)w_0^{(0)}(t) = H(t). \tag{18}$$

Система (16) имеет решение $w_j^{(0)}(t) = \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)$, где $\alpha_j^{(0)}(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ – произвольная функция, $j = \overline{1, n+1}$. Интегральная система (17) имеет единственное решение $w_{n+2}^{(0)}(t) \equiv 0$ $(\forall t \in [0,T])$, так как $\lambda_{n+2}(t) \notin \sigma(A(t))$. Для вычисления решения системы (18) сделаем в ней преобразование $w_0^{(0)}(t) = \Phi(t)\xi$, где $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_{n+1}(t))$, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}\}$. Будем иметь

$$-A_0(t)\Phi(t)\xi = H(t) \Leftrightarrow -(\Phi^{-1}(t)A_0(t)\Phi(t))\xi = \Phi^{-1}(t)H(t) \Leftrightarrow -\Lambda_0(t)\xi =$$

$$= \Phi^{-1}(t)H(t) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1(t)\xi_1 = (H(t),\chi_1(t)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda_n(t)\xi_n = (H(t),\chi_n(t)), \\ -\lambda_{n+1}(t)\xi_{n+1} = (H(t),\chi_{n+1}(t)). \end{cases}$$

В силу условий 2) и 5) отсюда получим, что $\xi_j(t) = -\lambda_j^{-1}(t)(H(t),\chi_j(t))$ при $j = \overline{1, n}$, а при $j = n+1$ будем иметь

$$\xi_j(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,T]/S, \\ \gamma_j(t), & t \in S, \end{cases}$$

где $\gamma_j(t)$ – произвольное гладкое продолжение нуля с множества $[0,T]/S$ на множество S. При этом система (18) будет иметь следующее решение:

$$w_0^{(0)}(t) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{(H(t),\chi_j(t))}{\lambda_j(t)}\varphi_j(t) + \xi_{n+1}(t)\varphi_{n+1}(t). \tag{19}$$

Однако мы желаем, чтобы решение $w_0(t,u) \in V$, поэтому функция (19) должна удовлетворять условию $(w_0^{(0)}(t), \chi_{n+1}(t)) \equiv 0$ $(\forall t \in [0,T])$, откуда выводим, что $\xi_{n+1}(t) \equiv 0$ $\forall t \in [0,T]$ (т.е. $\gamma_{n+1}(t) \equiv$ $\equiv 0$ $\forall t \in S$). Таким образом, решение (15) системы (14_0) запишется в виде

$$w_0(t,u) = \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)u_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{(H(t),\chi_j(t))}{\lambda_j(t)}\varphi_j(t) \equiv \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)u_j + w_0^{(0)}(t), \tag{20}$$

где пока не вычислены скалярные функции $\alpha_j(t)$, $j = \overline{1, n+1}$. Подчиняя (20) начальному условию $w_0(0, \mathbf{1}) = w^0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^{(0)}(0)\varphi_j(0) = w^0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(H(0), \chi_j(0))}{\lambda_j(0)}\varphi_j(0).$$

Умножая это равенство скалярно на $\chi_s(0)$ и учитывая биортонормированность систем $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_s(t)\}$, вычисляем

$$\alpha_s^{(0)}(0) = (w^0, \chi_s(0)) + \frac{(H(0), \chi_s(0))}{\lambda_s(0)}, \quad s = \overline{1, n}, \quad \alpha_{n+1}^{(0)}(0) = (w^0, \chi_{n+1}(0)). \tag{21}$$

Окончательное вычисление функций $\alpha_j^{(0)}(t)$ произойдет на следующем шаге, при решении системы (14_1), которая с учетом (20) и вида оператора R_1 (см. (11)) принимает вид

$$L_0 w_1(t, u) = -\sum_{j=1}^{n+1} (\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t))^{\bullet} u_j - \dot{w}_0^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^{(0)}(t)A_1(t)\varphi_j(t)u_j + A_1(t)w_0^{(0)}(t) -$$

$$-\alpha_{n+1}^{(0)}(t)g_{1,n+1}(t)\varphi_{n+1}(t) - \frac{G(t,t)w_0^{(0)}(t)}{\lambda_{n+2}(t)} + \frac{G(t,0)w_0^{(0)}(0)}{\lambda_{n+2}(0)}u_{n+2} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\alpha_j^{(0)}(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+2}(t)}G(t,t)\varphi_j(t)u_j - \frac{\alpha_j^{(0)}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_{n+2}(0)}G(t,0)\varphi_j(0)u_{n+2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\alpha_{n+1}^{(0)}(t)}{\lambda_{n+1}(t) - \lambda_{n+2}(t)}G(t,t)\varphi_{n+1}(t)u_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}^{(0)}(0)}{\lambda_{n+1}(0) - \lambda_{n+2}(0)}G(t,0)\varphi_{n+1}(0)u_{n+2}\right].$$

Определяя решение этой системы в виде суммы

$$w_1(t, u) = \sum_{j=1}^{n+2} w_j^{(1)}(t)u_j + w_0^{(1)}(t), \tag{22}$$

получаем следующие уравнения для вектор-функций $w_j^{(1)}(t)$:

$$[\lambda_j(t)I - A_0(t)]w_j^{(1)}(t) = -(\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t))^{\bullet} + A_1(t)\varphi_j(t)\alpha_j^{(0)}(t) + \frac{\alpha_j^{(0)}(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+2}(t)}G(t,t)\varphi_j(t), \quad j = \overline{1, n} \tag{23}$$

$$[\lambda_{n+1}(t)I - A_0(t)]w_{n+1}^{(1)}(t) = -(\alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t))^{\bullet} + A_1(t)\varphi_{n+1}(t)\alpha_{n+1}^{(0)}(t) + \frac{\alpha_{n+1}^{(0)}(t)}{\lambda_{n+1}(t) - \lambda_{n+2}(t)}G(t,t)\varphi_{n+1}(t), \tag{24}$$

$$[\lambda_{n+2}(t)I - A_0(t)]w_{n+2}^{(1)}(t) - \int_0^t G(t,s)w_{n+2}^{(1)}(s)ds =$$

$$= \frac{G(t,0)w_0^{(0)}(0)}{\lambda_{n+2}(0)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^{(0)}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_{n+2}(0)}G(t,0)\varphi_j(0) - \frac{\alpha_{n+1}^{(0)}(0)}{\lambda_{n+1}(0) - \lambda_{n+2}(0)}G(t,0)\varphi_{n+1}(0), \tag{25}$$

$$-A_0(t)w_0^{(1)}(t) = -\dot{w}_0^{(0)}(t) + A_1(t)w_0^{(0)}(t) - \frac{G(t,t)w_0^{(0)}(t)}{\lambda_{n+2}(t)} - \alpha_{n+1}^{(0)}(t)g_{1,n+1}(t)\varphi_{n+1}(t). \tag{26}$$

Для разрешимости систем (23) и (24) в пространстве $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^{n+1})$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности (см., например, [3])

$$\left(-(\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t))^{\bullet} + A_1(t)\varphi_j(t)\alpha_j^{(0)}(t) + \frac{G(t,t)\varphi_j(t)\alpha_j^{(0)}(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+2}(t)}, \chi_j(t)\right) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n},$$

$$\left(-(\alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t))^{\bullet} + A_1(t)\varphi_{n+1}(t)\alpha_{n+1}^{(0)}(t) + \frac{G(t,t)\varphi_{n+1}(t)\alpha_{n+1}^{(0)}(t)}{\lambda_{n+1}(t)-\lambda_{n+2}(t)}, \chi_{n+1}(t)\right) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

или

$$\dot\alpha_j^{(0)}(t) = \left(\frac{G(t,t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+2}(t)} + A_1(t)\varphi_j(t) - \dot\varphi_j(t), \chi_j(t)\right)\alpha_j^{(0)}(t), \quad j = \overline{1, n},$$

$$\dot\alpha_{n+1}^{(0)}(t) = \left(\frac{G(t,t)\varphi_{n+1}(t)}{\lambda_{n+1}(t)-\lambda_{n+2}(t)} + A_1(t)\varphi_{n+1}(t) - \dot\varphi_{n+1}(t), \chi_{n+1}(t)\right)\alpha_{n+1}^{(0)}(t).$$

Учитывая начальные условия (21), отсюда находим функции $\alpha_j^{(0)}(t)$:

$$\alpha_j^{(0)}(t) = \left((w^0, \chi_j(0)) + \frac{(H(0), \chi_j(0))}{\lambda_j(0)}\right)\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{G(\theta,\theta)\varphi_j(\theta)}{\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+2}(\theta)} + A_1(\theta)\varphi_j(\theta) - \dot\varphi_j(\theta), \chi_j(\theta)\right)d\theta\right\},$$
$$j = \overline{1, n}, \tag{27}$$
$$\alpha_{n+1}^{(0)}(t) = (w^0, \chi_{n+1}(0))\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{G(\theta,\theta)\varphi_s(\theta)}{\lambda_{n+1}(\theta)-\lambda_{n+2}(\theta)} - A_1(\theta)\varphi_{n+1}(\theta) - \dot\varphi_{n+1}(\theta), \chi_{n+1}(\theta)\right)d\theta\right\}.$$

Тем самым решение (20) итерационной задачи (14_0) определяется в пространстве V однозначно. При этом в решении (22) системы (14_1) однозначно вычисляется коэффициент $w_{n+2}^{(1)}(t)$ из интегрального уравнения (25) (так как $\lambda_{n+2}(t) \notin \sigma(A_0(t))$). Кроме того, вложив правую часть системы (14_1) в пространство V, найдем однозначно функцию $g_{1,n+1}(t)$, а также коэффициент $w_0^{(1)}(t)$ в (22). Действительно, условия вложения имеют вид

$$\left(-\dot w_0^{(0)}(t) + A_1(t)w_0^{(0)}(t) - \frac{G(t,t)w_0^{(0)}(t)}{\lambda_{n+2}(t)} - \alpha_{n+1}^{(0)}(t)g_{1,n+1}(t)\varphi_{n+1}(t), \chi_{n+1}(t)\right) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда находим однозначно функции

$$g_{1,n+1}(t) = -\frac{1}{\alpha_{n+1}^{(0)}(t)}\left(\dot w_0^{(0)}(t) - A_1(t)w_0^{(0)}(t) + \frac{G(t,t)w_0^{(0)}(t)}{\lambda_{n+2}(t)}, \chi_{n+1}(t)\right), \tag{28}$$

в предположении $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \neq 0$. Рассуждая далее так же, как и при вычислении решения $w_0^{(0)}(t)$ системы (18), находим однозначно и функцию $w_0^{(1)}(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^{n+1})$. Таким образом, в решении (22) итерационной задачи (14_1) не найдены пока коэффициенты $w_j^{(1)}(t)$ при $j = \overline{1, n+1}$ (они вычисляются из (23), (24) с точностью до скалярных функций $\alpha_j^{(1)}(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$. Окончательное вычисление $w_j^{(1)}(t)$ $(j = \overline{1, n+1})$ произойдет на следующем шаге, при решении задачи (14_2). Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)–3), 5) *и* $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \neq 0$. *Тогда первая итерационная задача* (14_0) *при дополнительных условиях*

$$\left\langle -\frac{\partial w_0}{\partial t} + A_1(t)w_0 + R_1 w_0, \chi_j(t)u_j\right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n+1},$$

имеет единственное решение в пространстве V в виде вектор-функции (15), *в которой* $w_0^{(0)}(t)$ *имеет вид*

$$w_0^{(0)}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1}(t)(H(t), \chi_j(t))\varphi_j(t),$$

а вектор-функции $w_j^{(0)}(t)$ *представляются в виде* $w_j^{(0)}(t) = \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)$, *где скалярные функции* $\alpha_j^{(0)}(t)$ *вычисляются по формулам* (27). *Если функция* $g_{1,n+1}(t)$ *выбирается в виде* (28), *то вторая итерационнная задача* (14_1) *будет разрешимой в пространстве V* (*с точностью до скалярных функций* $\alpha_j^{(1)}(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$, $j = \overline{1, n+1}$).

Здесь через $\langle\, ,\rangle$ обозначено скалярное (при каждом $t \in [0, T]$) произведение в пространстве U:

$$\langle w^{(1)}(t, u), w^{(2)}(t, u)\rangle \equiv \left\langle \sum_{j=1}^{n+2} w_j^{(1)}(t)u_j + w_0^{(1)}(t), \sum_{j=1}^{n+2} w_j^{(2)}(t)u_j + w_0^{(2)}(t)\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n+2} (w_j^{(1)}(t), w_j^{(2)}(t)).$$

Заметим, что при решении двух первых итерационных задач (14_0) и (14_1) строится регуляризующая нормальная форма (3) порядка $l + 1 = 1$. Она имеет вид

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = \Lambda(t)u + \varepsilon g_{1,n+1}(t)e_{n+1}, \quad u(0, \varepsilon) = \mathbf{1}, \tag{29}$$

где $g_{1,n+1}(t)$ – функция (28).

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБЩЕЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теперь, когда вычислено решение (15) первой итерационной задачи (14_0), каждая пара (14_k) и (14_{k+1}) следующих задач может быть переписана в виде

$$L_0 w(t, u) = P(t, u), \quad w(0, \mathbf{1}) = w^*, \tag{30}$$

$$L_0 v(t, u) = -\frac{\partial w}{\partial t} + A_1(t)w + R_1 w - \frac{\partial w}{\partial u}g_{1,n+1}(t)e_{n+1} - \frac{\partial w_0}{\partial u}g_{n+1}(t)e_{n+1} + Q(t, u), \tag{31}$$

где $P(t, u)$, $Q(t, u)$ – известные функции класса U, $g_{1,n+1}(t)$ – функции (28), $w_0(t, u)$ – решение (15) первой итерационной задачи (14_0), $g_{n+1}(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – пока неизвестная функция. Точно так же, как делалось в предыдущем разделе, может быть доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1)–3), 5), $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \neq 0$, *а правая часть*

$$P(t, u) = \sum_{j=1}^{n+2} P_j(t)u_j + P_0(t)$$

принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости системы (30) *в пространстве V необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$(P_0(t), \chi_{n+1}(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \tag{32}$$

$$\langle P(t, u), \chi_j(t)u_j\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n+1}. \tag{33}$$

Заметим, что при выполнении условий (32), (33) система (3) имеет следующее решение в пространстве V:

$$w(t, u) = \sum_{j=1}^{n+1}\left[\alpha_j(t)\varphi_j(t) + \sum_{s \neq j,\, s=1}^{n+1} \frac{(P_j(t), \chi_s(t))}{\lambda_j(t) - \lambda_s(t)}\varphi_s(t)\right]u_j + w_{n+2}(t)u_{n+2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(P_0(t), \chi_j(t))}{\lambda_j(t)}\varphi_j(t), \tag{34}$$

где $\alpha_j(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольные функции, а $w_{n+2}(t)$ – вектор-функция, удовлетворяющая уравнению

$$[\lambda_{n+2}(t)I - A_0(t)]w_{n+2}(t) - \int\limits_0^t G(t,s)w_{n+2}(s)ds = P_{n+2}(t).$$

Начальное условие $w(0, \mathbf{1}) = w^*$ приводит к системе

$$\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j(0)\varphi_j(0) = w^* - \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{s\neq j,\, s=1}^{n+1}\frac{(P_j(0), \chi_s(0))}{\lambda_j(0)-\lambda_s(0)}\varphi_s(0) -$$
$$-[\lambda_{n+2}(0)I - A_0(0)]^{-1}P_{n+2}(0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{(P_0(0), \chi_j(0))}{\lambda_j(0)}\varphi_j(0).$$

Умножая скалярно это равенство на $\chi_k(0)$ и учитывая биортонормированность систем $\{\varphi_j(t)\}$, $\{\chi_k(t)\}$, будем иметь

$$\alpha_k(0) = (w^*, \chi_k(0)) - \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n+1}\frac{(P_j(0), \chi_k(0))}{\lambda_j(0)-\lambda_k(0)} -$$
$$-([\lambda_{n+2}(0)I - A_0(0)]^{-1}P_{n+2}(0), \chi_k(0)) + \sum_{j=1}^{n}\frac{(P_0(0), \chi_j(0))}{\lambda_j(0)}\delta_{jk}, \quad k = \overline{1, n+1}. \tag{35}$$

Для окончательного вычисления функций $\alpha_j(t)$ надо применить теорему 2 к системам (31) (вычислив предварительно ее правую часть с учетом функции (34)). При этом для функций $\alpha_j(t)$ получим линейные дифференциальные уравнения вида

$$\dot\alpha_j(t) = \left(\frac{G(t,t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+2}(t)} + A_1(t)\varphi_j(t) - \dot\varphi_j(t), \chi_j(t)\right)\alpha_j(t) + l_j(t), \quad j = \overline{1, n+1},$$

где $l_j(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – известная функция, $j = \overline{1, n+1}$. Присоединяя к этим уравнениям начальные условия (35), находим однозначно функции $\alpha_j(t)$, $j = \overline{1, n+1}$. Условие (32) вложения правой части системы (31) в пространство V позволяет найти однозначно функцию $g_{n+1}(t)$. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $Q(t, u) \in U$ *и выполнены условия* 1)–3), 5), $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \neq 0$, *а правая часть*

$$P(t, u) = \sum_{j=1}^{n+2}P_j(t)u_j + P_0(t) \in U$$

системы (30) *удовлетворяет условиям* (32) *и* (33). *Тогда задача* (30) *при дополнительных условиях*

$$\left\langle -\frac{\partial w}{\partial t} + A_1(t)w + R_1 w + Q(t, u), \chi_j(t)\right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n+1},$$

однозначно разрешима в пространстве V. *При этом существует единственная функция* $g_{n+1}(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ *такая, что правая часть системы* (31) *принадлежит пространству* V.

5. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ И КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Применяя теоремы 1–3, построим частичную сумму

$$S_N(t, u, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k w_k(t, u),$$

где $w_k(t, u) \in V$ – решения итерационных задач (14_k). Произведем сужение этой суммы на векторе $u = u^{(N)}(t, \varepsilon)$, удовлетворяющем нормальной форме (3) порядка $l + 1 = N + 1$; получим функцию

$w_{\varepsilon N}(t) = S_N(t, u^{(N)}(t, \varepsilon), \varepsilon)$. Имеет место следующее утверждение (доказываемое так же, как и аналогичное утверждение в [7]).

Теорема 4. *Пусть* $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \neq 0$, *и выполнены условия* 1)–5). *Тогда задача* (2) *однозначно разрешима в классе* $\mathbb{C}^1([0, T], \mathbb{C}^{n+1})$ *и для ее решения* $w(t, \varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$\|w(t, \varepsilon) - w_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0, T]} \le C_N \varepsilon^{N+1}, \quad N = 0, 1, \ldots,$$

где $C_N > 0$ *– постоянная, не зависящая* от ε *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0 > 0$ *– достаточно мало), а* $w_{\varepsilon N}(t) = S_N(t, u^{(N)}(t, \varepsilon), \varepsilon)$ *– построенное выше формальное решение порядка* N.

Предельный переход (при $\varepsilon \longrightarrow +0$) изучим при более жестких, нежели 4), условиях:

6) $\operatorname{Re}\lambda_j(t) < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{n+2}(t) < 0$ $\forall t \in [0, T]$, $j = \overline{1, n}$; $\operatorname{Re}\lambda_{n+1}(t) < 0$ $\forall t \in [0, T]/S$.

Пусть $Q = [\alpha, \beta]$ – произвольный отрезок, лежащий в полуинтервале $(0, T]$ и не пересекающийся с множеством S. Нетрудно доказать следующее утверждение (см. [7]), обосновывающее предельный переход вне множества нестабильности S.

Теорема 5. *Пусть* $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \neq 0$ *и выполнены условия* 1)–3), 5), 6). *Тогда предельная система* $0 = A_0(t)\tilde{w} + H(t)$ *имеет единственное гладкое решение*

$$\bar{w}(t) = w_0^{(0)}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1}(t)(H(t), \chi_j(t))\varphi_j(t)$$

и имеет место предельный переход

$$\|w(t, \varepsilon) - w_0^{(0)}(t)\|_{C(Q)} \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \longrightarrow +0.$$

Предельный переход на множестве S произвольной природы может оказаться довольно сложным. Однако если S – отрезок $[t_1, t_2] \subset (0, T)$, то предельный переход на S может быть изучен полностью. Сначала заметим, что поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{n+1}(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$ и $\operatorname{Re}\lambda_{n+1}(t) \equiv 0$ $\forall t \in [t_1, t_2]$, то $\operatorname{Re}\lambda_{n+1}(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow t_1 - 0$. Однако это стремление может быть немонотонным, что усложняет исследование предельного перехода на S. Поэтому потребуем выполнение еще одного условия:

7) функции $\operatorname{Re}\lambda_{n+1}(t)$ в некоторой окрестности слева от точки $t = t_1$ строго возрастают (т.е. $\exists \delta_0 > 0$ $\operatorname{Re}\lambda_{n+1}(\bar{t}) < \operatorname{Re}\lambda_{n+1}(\bar{\bar{t}})$ при $\bar{t} < \bar{\bar{t}}$ и $\forall \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in [t_1 - \delta_0, t_1))$.

Регуляризующая функция $u_{n+1}(t, \varepsilon) = u_{n+1}^{(0)}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (см. (29))

$$\varepsilon \dot{u}_{n+1}^{(0)} = \lambda_{n+1}(t) u_{n+1} + \varepsilon g_{1, n+1}(t), \quad u_{n+1}(0, \varepsilon) = 1, \quad t \in [0, T].$$

На множестве $S = [t_1, t_2]$ функция $\lambda_{n+1}(t) \equiv 0$, поэтому при $t \in S$ имеем

$$\begin{gathered} u_{n+1}^{(0)}(t, \varepsilon) = u_{n+1}^{(0)}(t_1, \varepsilon) + \int_{t_1}^{t} g_{1, n+1}(s) ds \equiv \\ \equiv \left\{ \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1} \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right] + \int_0^{t_1} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{t_1} \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right] g_{1, n+1}(s) ds \right\} + \int_{t_1}^{t} g_{1, n+1}(s) ds. \end{gathered} \tag{36}$$

В силу условий 6), экспонента

$$\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1} \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right]$$

стремится к нулю при $\varepsilon \longrightarrow +0$. Используя технику работы [7], показываем, что

$$\int_0^{t_1} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{t_1} \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right] g_{1, n+1}(s) ds \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \longrightarrow +0,$$

поэтому имеем

$$u_{n+1}^{(0)}(t_1,\varepsilon) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\lambda_{n+1}(\theta)d\theta\right] + \int_0^{t_1}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{t_1}\lambda_{n+1}(\theta)d\theta\right]g_{1,n+1}(s)ds \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \longrightarrow +0. \qquad (37)$$

Из теоремы 4 вытекает, что

$$\|w(t,\varepsilon) - w_{\varepsilon 0}(t)\|_{C(S)} \equiv \left\|w(t,\varepsilon) - \left(w_0^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)u_j^{(0)}(t,\varepsilon)\right)\right\|_{C(S)} \le c_1\varepsilon,$$

откуда выводим оценку

$$\|w(t,\varepsilon) - (w_0^{(0)}(t) + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)u_{n+1}^{(0)}(t,\varepsilon))\|_{C(S)} \le c_1\varepsilon + \sum_{j=1}^{n}\|\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)u_j^{(0)}(t,\varepsilon)\|_{C(S)}. \qquad (38)$$

Нетрудно показать (см. [7]), что

$$\|u_j^{(0)}(t,\varepsilon)\|_{C(S)} \le c_0 e^{-\chi_0\nu/\varepsilon}, \quad j = \overline{1,n},$$

где

$$\chi_0 = \min_{j=\overline{1,n}}\ \min_{t\in[t_1-\nu,t_2]}(-\mathrm{Re}\lambda_j(t)),$$

а $\nu > 0$ таково, что $[t_1-\nu, t_2] \subset (0, T)$. Поэтому из (38) получаем, что

$$\|w(t,\varepsilon) - (w_0^{(0)}(t) + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)u_{n+1}^{(0)}(t,\varepsilon))\|_{C(S)} \le c_1\varepsilon + \sum_{j=1}^{n}q_jc_0e^{-\chi_0\nu/\varepsilon},$$

где $q_j = \|\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\|_{C(S)}, j = \overline{1, n+1}$. Подставляя сюда (36), имеем

$$\left\|w(t,\varepsilon) - \left(w_0^{(0)}(t) + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)\int_{t_1}^{t}g_{1,n+1}(s)ds + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)u_{n+1}^{(0)}(t_1,\varepsilon)\right)\right\|_{C(S)} \le c_1\varepsilon + \sum_{j=1}^{n}q_jc_0e^{\frac{-\chi_0\nu}{\varepsilon}}.$$

Отсюда выводим оценку

$$\left\|w(t,\varepsilon) - \left(w_0^{(0)}(t) + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)\int_{t_1}^{t}g_{1,n+1}(s)ds\right)\right\|_{C(S)} \le c_1\varepsilon + \sum_{j=1}^{n}q_jc_0e^{-\chi_0\nu/\varepsilon} + q_{n+1}|u_{n+1}^{(0)}(t_1,\varepsilon)|.$$

Учитывая (37), получаем следующий предельный переход на множестве нестабильности S:

$$\left\|w(t,\varepsilon) - \left(w_0^{(0)}(t) + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)\int_{t_1}^{t}g_{1,n+1}(s)ds\right)\right\|_{C(S)} \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \longrightarrow +0. \qquad (39)$$

Доказана следующая

Теорема 6. *Пусть* $(w^0, \chi_{n+1}(0)) \ne 0$, *и выполнены условия* 1)–3), 5)–7). *Тогда на множестве* $S = [t_1, t_2]$ *имеет место предельный переход* (39), *где* $w(t,\varepsilon)$ – *точное решение задачи* (2),

$$w_0^{(0)}(t) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{(H(t),\chi_j(t))}{\lambda_j(t)}\varphi_j(t),$$

а функции $\alpha_j^{(0)}(t)$ *вычисляются с помощью формул* (27), (28).

Таким образом, предельное решение задачи (2) будет разрывным:

$$\bar{\bar{w}}(t) = \begin{cases} w_0^{(0)}(t), & t \in [0, T]/S, \\ w_0^{(0)}(t) + \alpha_{n+1}^{(0)}(t)\varphi_{n+1}(t)\int\limits_{t_1}^{t} g_{1,n+1}(s)ds, & t \in S = [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Точное решение $w(t, \varepsilon)$ имеет два слоя: пограничный слой в окрестности точки $t = 0$ и внутренний переходный слой (контрастную структуру) в окрестности множества S.

6. ВЫВОДЫ

Учитывая формулы (27), (28), записываем $\bar{\bar{w}}(t)$ при $t \in S$ в виде

$$\bar{\bar{w}}(t) = w_0^{(0)}(t) - \varphi_{n+1}(t)\int\limits_{t_1}^{t}\exp\left\{\int\limits_{s}^{t}\left(\left(\frac{G(\theta,\theta)}{\lambda_{n+1}(\theta)-\lambda_{n+2}(\theta)} + A_1(\theta)\right)\varphi_{n+1}(\theta) - \dot{\varphi}_{n+1}(\theta), \chi_{n+1}(\theta)\right)d\theta\right\}\times$$
$$\times\left(\dot{w}_0(s) - A_1(s)w_0^{(0)}(s) + \frac{G(s,s)w_0^{(0)}(s)}{\lambda_{n+2}(s)}, \chi_{n+1}(s)\right)ds, \tag{40}$$

где

$$w_0^{(0)}(t) \equiv -\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{-1}(t)(H(t), \chi_j(t)\varphi_j(t)).$$

Анализируя равенство (40), можно сделать следующие выводы.

1. Контрастные структуры в (2) являются следствием нестабильности спектрального значения $\mu_1(t) \equiv \lambda_{n+1}(t)$ и наличия неоднородности $H(t)$. Если $H(t) \equiv 0$, то $w_0^{(0)}(t) \equiv 0$ и, значит, $\bar{\bar{w}}(t) \equiv \equiv 0$ $\forall t \in [0, T]$ (т.е. контрастные структуры в (2) отсутствуют).

2. Контрастные структуры в (2) не зависят от начального вектора w^0, а лишь от коэффициентов этой системы (т.е. от $A_0(t)$, $A_1(t)$, $G(t, s)$, $H(t)$). Это означает, что внутренний переходной слой – характеристическое свойство самой системы, а не внешних начальных данных.

3. Если $G(t, t) \equiv 0$ $\forall t \in [0, T]$, то контрастные структуры в (2) не будут зависеть от интегрального члена задачи (2). В случае задачи (1) при $K(t, t) \equiv 0$ $\forall t \in [0, T]$ контрастные структуры индуцируются только вторым интегральным членом с нестабильным спектральным значением $\mu_1(t)$ и матрицей $B(t)$.

4. Если $\lambda_{n+1}(t) \equiv \mu_1(t)$ стабильно (т.е. если $\mu_1(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, T]$), то решения всех итерационных задач (14_k) можно искать в пространстве U (а не в пространстве V). В этом случае системы типа (18) всегда разрешимы в классе $\mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^{n+1})$ и нет необходимости вкладывать правые части систем (14_k) в пространство V с помощью функций $g_{r,n+1}(t)$. Эти функции будут отсутствовать ($g_{r,n+1}(t) \equiv 0$, $r = \overline{1, l+1}$), а сама нормальная форма (3) примет вид $\varepsilon\dot{u} = \Lambda(t)u$, $u(0, \varepsilon) = \mathbf{1}$, т.е. регуляризация задачи (2) будет производиться по спектру $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A_0(t)$ и спектральному значению $\lambda_{n+2}(t) = \mu_0(t)$ ядра интегрального оператора, что полностью совпадает с идеями работы [3], где рассматривалась интегродифференциальная система со стабильным спектром. Поэтому разработанный выше метод нормальных форм следует считать обобщением метода регуляризации Ломова (см. [3]) на интегродифференциальные задачи с нестабильным спектром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.

2. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.* Асимптотический метод дифференциальных неравенств для сингулярно-возмущенных интегродифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 3. № 10. С. 1398–1404.
3. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
4. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Внутренний переходный слой в линейной задаче оптимального управления // Дифференц. ур-ния. 2001. Т. 37. № 3. С. 310–322.
5. *Бободжанов А.А., Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.* Контрастные структуры в интегродифференциальных уравнениях с быстро изменяющимися ядрами // Вестн. МЭИ. 2002. № 6. С. 15–27.
6. *Бутузов В.Ф.* Сингулярно-возмущенные задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения // II Междунар. конф.: Идеи П.Л. Чебышёва. Матем. методы и их прилож. к соврем. пробл. естествознания. Обнинск. 2004. С. 22–23.
7. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с контрастными структурами // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 2. С. 29–56.