

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Бабаева, Б. Н. Четверушкин, Об учете излучения
в двумерных задачах радиационной газовой динамики,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, том 23, но-
мер 6, 1512–1517

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

26 января 2025 г., 12:07:31



3. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
 4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
 5. Воеводина С. Н. Решение систем уравнений с клеточно-теплицевыми матрицами. — В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. XXIV. М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 94–100.

Поступила в редакцию 17.XI.1981
 Переработанный вариант 26.IV.1982

УДК 517.958:533.7

ОБ УЧЕТЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

БАБАЕВА О. Ю., ЧЕТВЕРУШКИН Б. Н.

(Москва)

Предлагаются методы определения потока энергии излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики, использующие приближенный учет угловой зависимости. Результаты расчетов показывают, что предложенные методы более эффективны, чем многогрупповой диффузионный.

1. При решении двумерных по пространству задач радиационной газовой динамики (р.г.д.) определение потока энергии излучения W , входящего в правую часть уравнения энергии [1], значительно более трудоемко, чем при решении одномерных задач. Определение потока W непосредственно из решения уравнения переноса излучения [1]

$$(1) \quad (\Omega, \text{grad } I_\nu) + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu I_{\nu p}, \quad W = \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} \Omega I_\nu d\Omega$$

занимает большую часть машинного времени, необходимого для решения всей задачи в целом.

В уравнении (1) приняты обозначения: I_ν — интенсивность излучения частоты ν , κ_ν — спектральный коэффициент поглощения, Ω — единичный вектор направления полета фотона, $I_{\nu p}$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела.

Определение потока W из решения уравнения (1) кроме большого объема вычислений может привести к значительным количественным и качественным ошибкам, обусловленным «эффектом луча» [2], [3].

При решении двумерных задач р.г.д. часто оказывается эффективным использование многогруппового диффузионного приближения [1]

$$(2a) \quad \text{div } W^k + c\kappa^k U^k = c\kappa^k U_p^k,$$

$$(2b) \quad W^k = -\frac{c}{3\kappa^k} \text{grad } U^k, \quad W = \sum_{k=1}^{N_k} W^k, \quad k=1, 2, \dots, N_k,$$

где U^k — групповая плотность энергии излучения. Диффузионный подход при сравнительно небольших затратах машинного времени позволяет качественно, а во многих случаях — и количественно верно определить поле излучения. Однако в связи с расширением класса решаемых задач и развитием численных методов расчета появилась потребность в более точном определении вклада излучения в уравнение энергии.

В данной работе будет рассмотрен метод, который при сравнительно небольшом увеличении затрат машинного времени позволяет уточнить определение $\text{div } W$ по сравнению с многогрупповым диффузионным приближением. Будет также рассмотрен способ осреднения по частоте для двумерных задач в случае, когда коэффициент поглощения представим в виде $\kappa_\nu = f_1(\nu) f_2(T, \rho)$.

2. При решении одномерных задач р.г.д. хорошо зарекомендовал себя квазидиффузионный метод [4]. Для двумерных задач можно построить аналогичную систему уравнений, которая позволяет эффективно определять поле излучения [4], [5].

В случае задач с плоскопараллельной геометрией эта система имеет вид

$$(3a) \quad \operatorname{div} W^k + c \kappa^k U^k = c \kappa^k U_p^k,$$

$$(3б) \quad W_x^k = -\frac{c}{\kappa^k} \left[\frac{\partial D_x^k U^k}{\partial x} + \frac{\partial D_{xy}^k U^k}{\partial y} \right],$$

$$W_y^k = -\frac{c}{\kappa^k} \left[\frac{\partial D_{xy}^k U^k}{\partial x} + \frac{\partial D_y^k U^k}{\partial y} \right],$$

$$(3в) \quad \frac{W_n^k}{U^k} = C^k, \quad W = \sum_{k=1}^{N_k} W^k, \quad k=1, 2, \dots, N_k,$$

где

$$D_x^k = \left(\int_{\Omega} I^k d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega} \Omega_x^2 I^k d\Omega, \quad D_y^k = \left(\int_{\Omega} I^k d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega} \Omega_y^2 I^k d\Omega,$$

$$D_{xy}^k = \left(\int_{\Omega} I^k d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega} \Omega_x \Omega_y I^k d\Omega, \quad C^k = \left(\int_{\Omega} I^k d\Omega \right)^{-1} (\Omega, n) I^k d\Omega,$$

n — вектор внешней нормали к границе области. Однако для определения коэффициентов квазидиффузии в задачах р.г.д. необходимо решать многогрупповое двумерное уравнение переноса излучения, что сильно осложняет алгоритм решения по сравнению с использованием диффузионного приближения.

В настоящей работе для определения потока W предлагается использовать систему уравнений, которая для задач с плоскопараллельной геометрией имеет вид¹⁾

$$(4a) \quad \operatorname{div} W^k + c \kappa^k U^k = c \kappa^k U_p^k,$$

$$(4б) \quad W_x^k = -\frac{c}{\kappa^k} \frac{\partial D_x^k U^k}{\partial x}, \quad W_y^k = -\frac{c}{\kappa^k} \frac{\partial D_y^k U^k}{\partial y},$$

$$(4в) \quad \frac{W_n^k}{U^k} \Big|_{\Gamma} = C_x^k n_x + C_y^k n_y, \quad W = \sum_{k=1}^{N_k} W^k, \quad k=1, 2, \dots, N_k,$$

где коэффициенты D_x^k , D_y^k , C_y^k , C_x^k определяются из решения квазиодномерных по пространству уравнений

$$(5a) \quad \mu_x \frac{dI_x^k}{dx} + \kappa^k I_x^k = \kappa^k I_p^k, \quad I_x^k|_{\Gamma} = I_x^{+k}, \quad \mu_x n_x < 0,$$

$$(5б) \quad D_x^k = \left(\int_{-1}^1 I_x^k d\mu_x \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu_x^2 I_x^k d\mu_x, \quad C_x^k = \left(\int_{-1}^1 I_x^k d\mu_x \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu_x I_x^k d\mu_x,$$

$$(5в) \quad \mu_y \frac{dI_y^k}{dy} + \kappa^k I_y^k = \kappa^k I_p^k, \quad I_y^k|_{\Gamma} = I_y^{+k}, \quad \mu_y n_y < 0,$$

$$(5г) \quad D_y^k = \left(\int_{-1}^1 I_y^k d\mu_y \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu_y^2 I_y^k d\mu_y, \quad C_y^k = \left(\int_{-1}^1 I_y^k d\mu_y \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu_y I_y^k d\mu_y,$$

где

$$I_p^k = \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_{\nu p} d\nu,$$

¹⁾ Для осесимметричных задач определение потока энергии излучения проводится аналогично. При этом коэффициенты квазидиффузии определяются из квазиодномерных по пространству задач.

μ_x, μ_y – косинусы углов между вектором направления полета фотона Ω и осями OX и OY ,

$$I_x^{+h} = \int_0^{2\pi} I^{+h} d\varphi_1, \quad I_y^{+h} = \int_0^{2\pi} I^{+h} d\varphi_2,$$

φ_1 – угол между проекцией Ω на плоскость OYZ и осью OY , φ_2 – угол между проекцией Ω на плоскость OXZ и осью OZ , I^{+h} – проходящее извне излучение.

В отличие от уравнений квазидиффузии (3), в системе уравнений (4) после сведения ее к эллиптическому уравнению относительно функций U^h отсутствуют члены со смешанными производными и малыми знакопеременными коэффициентами D_{xy}^h . Кроме того, коэффициенты D_x^h и D_y^h определяются не из решения двумерного уравнения (1), а из решения набора одномерных уравнений переноса излучения (5).

При решении нестационарных задач можно использовать метод, аналогичный применяемому в [4], [6], [7]. При этом коэффициенты $D_x^h, D_y^h, C_x^h, C_y^h$ вычисляются на некотором временном слое из решения уравнений (5), затем используются для решения системы уравнений (4) на последующих нескольких временных слоях, после чего вновь производится их пересчет.

Таким образом, трудоемкость решения задачи не сильно возрастает по сравнению с использованием многогруппового диффузионного приближения. При этом общая схема решения задач р.г.д. остается практически неизменной по сравнению с рассмотренной в [8]. В п. 4 будут приведены результаты сравнения расчетов, проведенных с использованием системы уравнений (4), уравнений диффузии (2) и уравнения переноса (1).

3. В ряде случаев для учета сложной зависимости коэффициента поглощения от частоты приходится вводить очень подробную дискретизацию по частоте. В [7] рассмотрен эффективный способ осреднения по частоте для одномерных задач с коэффициентом поглощения, представимым в виде $\kappa_\nu = f_1(\nu)f_2(T, \rho)$.

Рассмотрим двумерные задачи с коэффициентом поглощения, имеющим такой же вид. Воспользуемся полученными в [7] осредненными уравнениями, а также рассмотренным в п. 1 способом приближенного учета угловой зависимости в двумерных задачах. В результате для определения потока энергии излучения получим систему уравнений

$$(6a) \quad \operatorname{div} \mathbf{W} + f_2 V = f_2 B(T),$$

$$(6b) \quad W_x = -\frac{1}{f_2} \frac{\partial D_x V}{\partial x}, \quad W_y = -\frac{1}{f_2} \frac{\partial D_y V}{\partial y},$$

$$(6в) \quad \frac{W_n}{V} = C_x n_x + C_y n_y,$$

где

$$B(T) = 4\pi \int_0^\infty f_1^2(\nu) I_{\nu p} d\nu,$$

коэффициенты D_x, D_y, C_x, C_y определяются из решения уравнений, похожих на уравнения переноса излучения серой материи для плоского слоя:

$$(7a) \quad z_x \frac{dI_x}{dx} + f_2 I_x = f_2 F(|z_x|, T), \quad I_x|_{\Gamma} = I_x^+, \quad z_x n_x < 0,$$

$$(7б) \quad D_x = \left(\int_{-m}^m I_x dz_x \right)^{-1} \int_{-m}^m z_x^2 I_x dz_x, \quad C_x = \left(\int_{-m}^m I_x dz_x \right)^{-1} \int_{-m}^m z_x I_x dz_x,$$

$$(7в) \quad z_y \frac{dI_y}{dy} + f_2 I_y = f_2 F(|z_y|, T), \quad I_y|_{\Gamma} = I_y^+, \quad z_y n_y < 0,$$

$$(7г) \quad D_y = \left(\int_{-m}^m I_y dz_y \right)^{-1} \int_{-m}^m z_y^2 I_y dz_y, \quad C_y = \left(\int_{-m}^m I_y dz_y \right)^{-1} \int_{-m}^m z_y I_y dz_y,$$

где

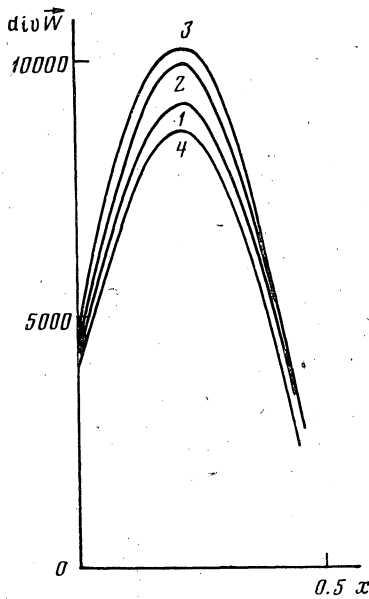
$$z_x = f_1^{-1}(v) \Omega_x, \quad z_y = f_1^{-1}(v) \Omega_y, \quad m = \max_v f_1^{-1}(v),$$

$$F(|z_x|, T) = \int_{f_1^{-1}(v) \geq |z_x|} f_1^2(v) I_{vp} dv, \quad F(|z_y|, T) = \int_{f_1^{-1}(v) \geq |z_y|} f_1^2(v) I_{vp} dv,$$

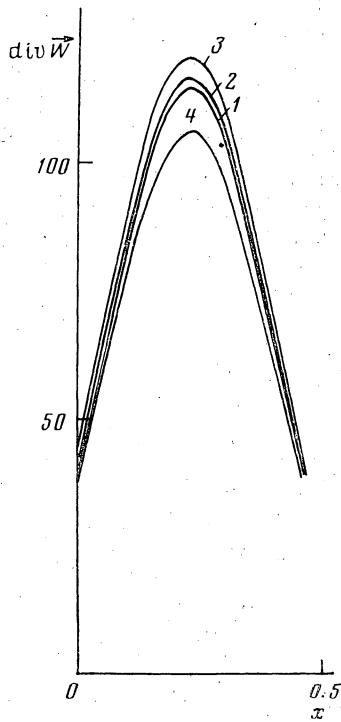
$$I_x^+ = \int_{f_1^{-1}(v) \geq |z_x|} f_1^2(v) dv \int_0^{2\pi} I_{v^+} d\varphi_1,$$

$$I_y^+ = \int_{f_1^{-1}(v) \geq |z_y|} f_1^2(v) dv \int_0^{2\pi} I_{v^+} d\varphi_2.$$

При таком подходе поток энергии излучения \vec{W} определяется из системы уравнений (6), не зависящей ни от углов, ни от частот²⁾. Коэффициенты D_x, D_y, C_x, C_y определяются из простых по структуре, квазиодномерных уравнений, отсутствует член со знакопеременным коэффициентом D_{xy} .



Фиг. 1. Задача А при $y=0.3$



Фиг. 2. Задача Б при $y=0.3$

При решении нестационарной задачи можно использовать метод замораживания коэффициентов D_x, D_y, C_x, C_y (см. [7]). Таким образом, трудоемкость решения задачи существенно снижается по сравнению с решением в многогрупповом диффузионном приближении.

4. Исследование эффективности предложенных в пп. 2, 3 методов проводилось на примере модельной задачи об охлаждении вещества. Область, занимаемая веществом, для задач с плоскопараллельной геометрией имела форму квадрата $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. На границу извне излучение не падало. Температура задавалась в виде

$$T(x, y) = \begin{cases} 16d(x - 0.75)(y - 0.75)(x + 0.25)(y + 0.25) + b & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5, \quad 0 \leq y \leq 0.5, \\ d & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

²⁾ Для задач с осевой симметрией можно получить аналогичную систему уравнений для определения потока энергии излучения.

(при $d=2.5$, $b=1$ – задача А, при $d=1$, $b=0.6$ – задача Б). Коэффициент поглощения имел вид $\kappa_v = f_1(h\nu)f_2(T)$, где

$$f_2(T) = 0.06T^3, \quad f_1(h\nu) = \begin{cases} (h\nu)^2 + 1, & 0 \leq h\nu \leq 2, \\ 40/(h\nu)^3, & 2 < h\nu \leq 6, \\ 3, & 6 < h\nu \leq 30. \end{cases}$$

Решалась стационарная задача, и сравнивались значения $\text{div } \vec{W}$, входящей в правую часть уравнения энергии, найденные следующими способами:

1) с помощью решения семигрупповой системы уравнений (4), где коэффициенты квазидиффузии вычислялись из квазидномерных задач (5);

2) с помощью предложенного в п.3 метода, при этом по переменным z_x и z_y вводилась неравномерная сетка, содержащая 40 точек, со сгущением при $z_x=0$, $z_y=0$;

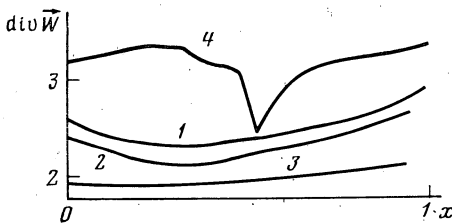
3) с помощью решения семигрупповой системы уравнений диффузии излучения (2);

4) с помощью непосредственного решения семигруппового уравнения переноса излучения методом характеристик [3].

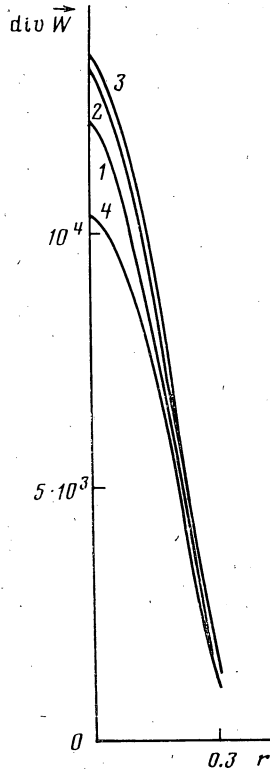
Способ 4) принимался за эталонный.

В способах 1), 3), 4) по частоте вводилась сетка $h\nu_k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 30$. Коэффициент поглощения осреднялся по Планку.

По пространству вводилась ортогональная равномерная сетка с шагами $h_x = h_y = 0.05$.



Фиг. 3. Задача Б при $y=0.6$



Фиг. 4. Задача Б при $z=0.3$

Исследование предложенных методов для задачи с осевой симметрией проводилось в области $\{0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Температура задавалась в виде

$$T(r, z) = \begin{cases} 40(ar^2 - 0.25)(z + 0.25)(z - 0.75) + 1, & \text{если } T(r, z) \geq 2.5, \quad z \leq 0.8, \\ 2.5 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(при $a=1$ – задача В, при $a=4$ – задача Г).

Результаты расчетов приведены на фиг. 1–4 (для задач А–В), где номер кривой соответствует номеру способа, с помощью которого получено решение.

Результаты расчетов показывают, что предложенный в п.2 метод решения позволяет точнее определять значения $\text{div } \vec{W}$, чем многогрупповой диффузионный, как для задач в плоскопараллельной постановке, так и для осесимметричных. Расчеты подтверждают, что анизотропия среды слабее сказывается на точности метода, предложенного в п. 2, чем на точности многогруппового диффузионного метода. При малых значениях коэффициента поглощения, что имело место в задаче Б, точность метода несколько меньше, чем в задаче А, однако и в этом случае значения $\text{div } \vec{W}$ ближе к эталону, чем вычисленные с использованием многогруппового диффузионного приближения.

Расчеты показывают, что метод, предложенный в п. 3, являясь более экономичным с вычислительной точки зрения, в то же время позволяет неплохо определять $\text{div } W$. Так, например, для задач А и Б с плоскопараллельной геометрией значения $\text{div } W$, вычисленные с его помощью, ближе к точным, чем вычисленные с использованием многогруппового диффузионного приближения. В задачах В, Г с осевой симметрией точность методов примерно одинакова. В тех точках, где диффузионное приближение работает плохо, часто удается получить более точный результат.

Отметим, что уменьшение горячей области в 2 раза по r (задача Г) не приводит к существенному изменению качества методов, предложенных в п. 2, 3, в то время как точность многогруппового диффузионного метода вблизи точки $r=0$ существенно падает.

Расчеты показывают, что замораживание коэффициентов D_x, D_y, C_x, C_y по времени при решении нестационарной задачи А с помощью метода, предложенного в п. 3, не приводит к существенному снижению точности результата. При шаге по времени $\tau=10^{-5}$ разница в определении температуры из уравнения $\partial T/\partial t = -\text{div } W$ на шестом временном слое при расчетах с замораживанием и без замораживания коэффициентов составляла менее 1%.

Литература

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. Lathrop K. D. Ray effects in discrete ordinates equations.— Nucl. Sci. and Engng, 1968, v. 32, № 3, p. 357—369.
3. Басс Л. П. Конечно-разностные методы решения уравнения переноса в задачах со сложной геометрией.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1975, № 14.
4. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6, с. 1078—1087.
5. Аксенов Н. Н., Гольдин В. Я. Расчет двумерного стационарного уравнения переноса нейтронов методом квазидиффузии.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 5, с. 1341—1343.
6. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1970, № 12.
7. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 4, с. 990—1000.
8. Волчинская М. И., Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Решение двумерных нестационарных задач РГД с использованием эйлеровых переменных.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1981, № 33.

Поступила в редакцию 12.IV.1982

УДК 517.958:533.7

КОНСЕРВАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ СМЕСИ ГАЗОВ

РАЙНЕС А. А.

(Ленинград)

Предлагается консервативный алгоритм решения задачи Коши для уравнения Больцмана в случае двухкомпонентной пространственно однородной смеси газов, обеспечивающий точное выполнение законов сохранения плотностей каждой из компонент, суммарной энергии, суммарного импульса смеси.

Систему уравнений для двухкомпонентной смеси газов запишем в виде

$$(1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi (f_i' f_j' - f_i f_j) \sigma_{ij} |(\mathbf{q}_{ij} \cdot \mathbf{k})| \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, du_j.$$

Здесь f_i — функция распределения i -й компоненты с молекулярной скоростью \mathbf{u}_i , σ_{ij} — полные сечения столкновений, $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_i - \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$, $\mathbf{k} = \{\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi\}$.