

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. R. Treil', An inverse spectral problem for the modulus of the Hankel operator, and balanced realizations,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 2, 158–182

<https://www.mathnet.ru/eng/aa179>

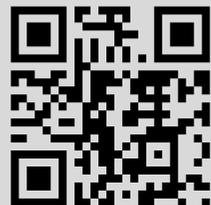
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

April 30, 2025, 20:34:49



© 1990 г.

С. Р. Треиль

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДУЛЯ ОПЕРАТОРА ГАНКЕЛЯ И СБАЛАНСИРОВАННЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

В работе доказывается, что неотрицательный оператор $W(W \geq 0)$, действующий в гильбертовом пространстве, унитарно эквивалентен эрмитовому квадрату $\Gamma^* \Gamma$ некоторого оператора Ганкеля Γ тогда и только тогда, когда оператор W необратим, а его ядро либо тривиально, либо бесконечномерно. Это утверждение полностью решает задачу, сформулированную в [1]. Решение получено методами теории линейных динамических систем.

§ 0. Введение

Классическое, изначальное определение операторов Ганкеля (или ганкелевых операторов) называет этим именем операторы Γ , действующие в пространстве последовательностей $l^2 = l^2(\mathbb{Z}_+)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$, матричные элементы которых зависят только от суммы номеров (т.е. постоянны на диагоналях перпендикулярных главной):

$$\Gamma x = \left\{ \sum_{j \geq 0} \gamma_{1+j+1} x_j \right\}_{1 \geq 0}, \quad x \in l^2(\mathbb{Z}_+); \quad (0.1)$$

здесь $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Соответствующие матрицы

$$\Gamma = \left\{ \gamma_{1+j+1} \right\}_{1, j \geq 0} \quad (0.2)$$

также называют ганкелевыми. Операторы Ганкеля имеют и другие, эквивалентные представления (которые мы обсудим впоследствии чуть подробнее), например, как интегральные операторы на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ с ядром, зависящим от суммы аргументов, или как сингулярные интегральные операторы с ядрами вида $\frac{\varphi(x)}{x-z}$, $\text{Im } z < 0$. В любом случае эти операторы достаточно хорошо известны в анализе и как предмет, и как средство исследования, но некоторые их свойства и приложения к другим разделам анализа будут описаны ниже, поскольку они тесно связаны с существом решаемой в работе задачи. За большими подробностями читатель может обратиться к монографиям [2, 3] и обзору [4].

Формулировка основного результата статьи приведена в аннотации. Переходя к подробностям, начнем с описания места действия, описания самого действия и краткой

истории вопроса.

0.1. Пространства Харди. Пусть \mathbb{D} - единичный круг комплексной плоскости \mathbb{C} , $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathbb{C}: |\xi| < 1\}$, \mathbb{T} - его граница, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ и m - нормированная ($m(\mathbb{T})=1$) мера Лебега на \mathbb{T} . Рассмотрим пространство $L^2(\mathbb{T})$ квадратично суммируемых (относительно меры m) функций на окружности \mathbb{T} . Символом $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ обозначим известное пространство Харди,

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(k) = 0 \text{ при } k < 0\},$$

а символом H^2_- - его ортогональное дополнение

$$H^2_- = L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(k) = 0 \text{ при } k \geq 0\};$$

здесь $\hat{f}(k)$ - k -ый коэффициент Фурье функции f ,

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \cdot \bar{\xi}^k dm(\xi).$$

Как известно, для любой функции f из H^2 ряд $\sum_{k \geq 0} \hat{f}(k) \xi^k$ сходится в

единичном круге \mathbb{D} и можно естественным образом отождествить пространство H^2 с соответствующим пространством функций, аналитических в \mathbb{D} (подробности см. в [5]). Аналогично пространство H^2_- отождествляется с пространством функций, аналитических в $\mathbb{D}_- = \mathbb{C} \setminus \text{clos } \mathbb{D}$.

Столь же хорошо известно, что дискретное преобразование Фурье

$$\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum c_k z^k \quad (0.3)$$

унитарно отображает пространство двусторонних квадратично суммируемых последовательностей $l^2(\mathbb{Z})$ на $L^2(\mathbb{T})$. При этом подпространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$ переходит в H^2 .

Наряду с пространствами Харди в круге мы будем иметь дело и с аналогичными пространствами в полуплоскости. Пусть \mathbb{C}_+ и \mathbb{C}_- - верхняя и нижняя полуплоскости соответственно,

$$\mathbb{C}_\pm = \{\xi \in \mathbb{C} : \text{Im } \xi \gtrless 0\}.$$

Пространства Харди в полуплоскостях \mathbb{C}_\pm определяются равенствами

$$H^2 = H^2(\mathbb{C}_+) = \{f \in L^2 : \mathcal{F}f(x) = 0 \text{ п. в. при } x < 0\},$$

$$H^2_- = H^2(\mathbb{C}_-) = \{f \in L^2 : \mathcal{F}f(x) = 0 \text{ п. в. при } x > 0\},$$

где $\mathcal{F}f$ обозначает стандартное преобразование Фурье функции f ,

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Ввиду унитарности в L^2 преобразования Фурье \mathcal{F}

$$L^2 = H^2 \oplus H^2_-,$$

и подпространство H^2 (соответственно H^2_-) отождествляется при этом с подпространством функций из L^2 , сосредоточенных на правой (левой) полуоси. Аналогично дискретному случаю, функции из H^2 , H^2_- также можно продолжить до

аналитических в \mathbb{C}_+ , \mathbb{C}_- функций.

0.2. Операторы Ганкеля в пространствах Харди. Операторы Ганкеля можно реализовать как проекции операторов умножения в пространстве Харди, что иногда оказывается более удобным, чем классическое представление (0.1). Это делается следующим, хорошо известным способом, см. [2, 3, 4]. Рассмотрим оператор H_φ

$$H_\varphi: H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2_-(\mathbb{D}),$$

определенный равенством

$$H_\varphi f = P_- \varphi f, \quad (0.4)$$

где P_- - ортопроектор в L^2 на подпространство H^2_- (буквы T и D мы будем для краткости письма опускать), а φ - некоторая ограниченная функция на окружности T . Нетрудно заметить, что матрица оператора H_φ относительно стандартных ортонормированных базисов $\{z^n\}_{n \geq 0}$ и $\{z^k\}_{k < 0}$ в H^2 и H^2_- имеет ганкелеву структуру (0.2) с $\gamma_k = \hat{\varphi}(-k)$, $k=1, 2, 3, \dots$

Оператор H_φ также называют оператором Ганкеля; функция φ называется символом этого оператора. Очевидно, что символ определяется по оператору не однозначно, а с точностью до аналитического слагаемого вида $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$.

Нетрудно заметить, что если $\gamma_k = \hat{\varphi}(-k)$, то

$$\| \Gamma \| = \| H_\varphi \| \leq \| \varphi \|_\infty,$$

где $\| \cdot \|_\infty$ - норма в пространстве $L^\infty(T)$. Известная теорема Нехари (см. [2, 3]) утверждает, что верно и обратное утверждение - ганкелева матрица вида (0.2) порождает ограниченный оператор в l^2 в том и только том случае, когда она является матрицей некоторого оператора H_φ (т.е. $\gamma_k = \hat{\varphi}(-k)$, $k > 0$), причем символ φ можно выбрать так, чтобы $\| \Gamma \| = \| \varphi \|_\infty$.

Заметим теперь, что унитарный оператор τ , $\tau f(\xi) = \bar{\xi} f(\bar{\xi})$, переводит стандартный базис $\{z^n\}_{n < 0}$ в H^2_- в базис $\{z^n\}_{n \geq 0}$ в H^2 , и поэтому оператор Γ_φ , $\Gamma_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \tau \cdot H_\varphi$, действует в пространстве H^2 , а его матрица относительно стандартного базиса $\{z^n\}_{n \geq 0}$ имеет ганкелеву структуру (0.2). Тем самым оператор Γ_φ унитарно эквивалентен классическому оператору Ганкеля в l^2 (унитарную эквивалентность осуществляет дискретное преобразование Фурье (0.3)), и его можно рассматривать как реализацию последнего в пространстве H^2 .

Отметим, что операторы Γ_φ и H_φ , отличающиеся друг от друга унитарным множителем слева, имеют одинаковые метрические свойства. В частности, совпадают и модули этих операторов (напомним, что модулем оператора A называется неотрицательный оператор $|A| = (A^* A)^{1/2}$). Поэтому нам в этой работе, посвященной задаче об унитарно инвариантном описании возможных модулей ганкелевых операторов, будет безразлично, с какой из этих реализаций работать.

0.3. Операторы Ганкеля как интегральные операторы на полуоси. Есть еще одна "модель" для операторов Ганкеля, особенно удобная для решения только что упомянутой задачи. Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ интегральный

оператор \mathcal{J}_h с ядром, зависящим от суммы аргументов,

$$(\mathcal{J}_h f)(s) = \int_{\mathbb{R}_+} h(t+s)f(t)dt. \quad (0.5)$$

Такой оператор можно интерпретировать как континуальный аналог классического оператора Ганкеля. Естественный, но долго не замечавшийся специалистами факт состоит в том, что оператор \mathcal{J}_h унитарно эквивалентен одному из рассмотренных выше операторов Ганкеля Γ_φ , а значит, и некоторому классическому ганкелеву оператору. Поэтому оператор \mathcal{J}_h можно рассматривать не только как аналог, но и как реализацию последнего.

Несмотря на простоту сформулированного в предыдущем абзаце утверждения, оно не является столь широко известным, как многие другие факты теории ганкелевых операторов. Поэтому для полноты изложения мы приведем некоторые пояснения. Подобные рассуждения приведены в монографии [2] и восходят к работе А. Девинатца [6], где аналогичным образом устанавливалась унитарная эквивалентность операторов Тёплица и их континуальных аналогов - операторов Винера-Хопфа (этот факт тоже долгое время оставался незамеченным).

Начнем с некоторого оператора Γ_φ , $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, в пространстве $H^2(\mathbb{D})$. Хорошо известно [2, 3], что оператор \mathcal{U} стандартной замены переменной

$$(\mathcal{U}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t+i} \cdot f\left(\frac{t-i}{t+i}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.6)$$

унитарно отображает пространство $H^2(\mathbb{D})$ в $H^2(\mathbb{C}_+)$. Далее, нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{U} \Gamma_\varphi \mathcal{U}^{-1}$ допускает представление

$$\mathcal{U} \Gamma_\varphi \mathcal{U}^{-1} f = \delta P_- \tilde{\varphi} f, \quad f \in H^2(\mathbb{C}_+), \quad (0.7)$$

где P_- - ортопроектор в $L^2(\mathbb{R})$ на $H^2(\mathbb{C}_-)$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi\left(\frac{t-i}{t+i}\right)$, а оператор δ определяется равенством $\delta f(\xi) = f(\bar{\xi})$. Обозначим (временно) оператор вида (0.7) символом Γ_φ^* :

$$\Gamma_\varphi^* f = \delta P_- \varphi f, \quad f \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

а символом \tilde{H}_φ - оператор, действующий из пространства $H^2(\mathbb{C}_+)$ в $H^2(\mathbb{C}_-)$ по формуле

$$\tilde{H}_\varphi f = P_- \varphi f, \quad f \in H^2(\mathbb{C}_+).$$

Теперь, чтобы проверить, что оператор Γ_φ унитарно эквивалентен некоторому оператору \mathcal{J}_h , достаточно сделать преобразование Фурье \mathcal{F} , которое переведет пространство $H^2(\mathbb{C}_+)$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом оператор \tilde{H}_φ перейдет в проекцию оператора свертки, т. е.

$$(\mathcal{F} \tilde{H}_\varphi \mathcal{F}^{-1} f) = P^- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}\varphi) * f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

где P^- - ортопроектор в $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2(\mathbb{R}_-)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Другими словами,

$$(\mathcal{F}\mathcal{H}_\varphi\mathcal{F}^{-1}f)(s) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}\varphi)(s-t)f(t)dt, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Преобразование Фурье \mathcal{F}_φ , $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ может быть и обобщенной функцией; написанная свертка, однако, имеет смысл (например, в духе теории распределений). Заметим теперь, что

$$(\mathcal{F}\delta\mathcal{F}^{-1}f)(t) = f(-t), \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Отсюда ясно, что $\mathcal{F}\Gamma_\varphi\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{J}_h$,

$$(\mathcal{J}_h f)(s) = \int_{\mathbb{R}_+} h(s+t)f(t)dt, \quad s \geq 0,$$

где $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}\varphi)(-t)$, $t \geq 0$. Значения $h(t)$ при $t < 0$ нам безразличны, и в дальнейшем мы будем считать, что $h(t) \equiv 0$ при $t > 0$.

Очевидно, что приведенные рассуждения обратимы, так что операторы Γ_φ и \mathcal{J}_h унитарно эквивалентны.

0.4. Постановка задачи и история вопроса. Отметим сначала два простых свойства операторов Ганкеля. Во-первых, так как

$$\|H_\varphi z^n\|_2 = \|P_- \varphi z^n\|_2 = \left(\sum_{k < -n} |\hat{\varphi}(k)|^2 \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то оператор Ганкеля H_φ (а значит, и Γ_φ) обязательно необратим. Во-вторых, так как

$$H_\varphi f = 0 \implies H_\varphi z f = 0,$$

ядро оператора H_φ инвариантно относительно умножения на независимую переменную z . По известной теореме Берлинга (см. [3, 5]) каждое z -инвариантное подпространство пространства H^2 (отличное от $\{0\}$) имеет вид θH^2 , где θ - некоторая внутренняя функция (т.е. такая, что $\theta \in H^\infty \stackrel{\text{def}}{=} H^2 \cap L^\infty$, $|\theta| = 1$ п.в. на \mathbb{T}). Отсюда, в частности, очевидно, что $\dim \text{Ker } H_\varphi = \infty$, если $\text{Ker } H_\varphi \neq \{0\}$.

Сказанное означает, что следующие простые условия необходимы для того, чтобы неотрицательный оператор $W (W = W^* \geq 0)$ был унитарно эквивалентен модулю некоторого оператора Ганкеля (напоминаем, что модулем оператора A называется неотрицательный оператор $|A| = (A^* A)^{1/2}$):

- 1) Оператор W необратим.
- 2) Либо $\text{Ker } W = \{0\}$, либо $\dim \text{Ker } W = \infty$.

Эти необходимые условия были сформулированы В. В. Пеллером и С. В. Хрущевым в известном сборнике проблем [1], где ими и была поставлена задача об унитарно инвариантном описании возможных модулей операторов Ганкеля. Там же была высказана гипотеза о том, что для компактных операторов условия 1) и 2) являются и достаточными.

Здесь уместно отметить некоторые задачи анализа и других разделов математики,

которые по существу сводятся к метрическим характеристиками операторов Ганкеля, т.е. к характеристикам модуля $|H_\varphi| = (H_\varphi^* H_\varphi)^{1/2}$. Отсылая за подробностями к [2, 3, 4], отметим здесь следующие задачи: разложения в ряды экспонент (гармонических) $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ в весовых пространствах $L^2(\mu)$, которые описываются теоремой Хельсона-Сегё, и негармонических $\{e^{i\lambda_n x}\}$ в пространстве $L^2(0, a)$, которые описываются теорией Никольского-Павлова-Хрущева [7]), метрическая классификация стационарных случайных процессов (угол между прошлым процесса и его будущим описывается модулем $|H_\varphi|$ некоторого оператора Ганкеля, см. [1, 4]) - наилучшая рациональная аппроксимация (известная теорема Адамяна-Арова-Крейна отождествляет сингулярные числа оператора Ганкеля H_φ , т.е. собственные числа модуля $|H_\varphi|$ с наилучшими рациональными приближениями его символа φ в метрике пространства BMO).

Исходя из потребностей теории стационарных случайных процессов и теории рациональной аппроксимации в работе [1], и была поставлена названная выше задача.

Эта задача была частично решена автором совместно с В.И. Васюниным для операторов, удовлетворяющих дополнительному условию.

3) *Спектральная мера оператора - чисто точечная*, которому в частности, удовлетворяют компактные операторы. Именно было доказано [8, 9, 10, 11], что для неотрицательного оператора W в сепарабельном гильбертовом пространстве, удовлетворяющего условиям 1)-3), найдется оператор Ганкеля Γ , модуль которого унитарно эквивалентен оператору W . В [8, 9] разбирался случай, когда оператор W имеет простой спектр, в [10, 11] - общий случай. В этих работах искомым оператор Ганкеля строится как предел некоторой последовательности ганкелевых операторов конечного ранга. При этом для построения операторов конечного ранга используется либо, как в [8, 9], теорема о неявном отображении, либо, как в [10, 11], теоретико-функциональные рассуждения, связанные с решением некоторых интерполяционных задач. Полностью решить задачу Пеллера-Хрущева, т.е. избавиться от условия 3), на этом пути, представляющем, возможно, свой интерес, не удастся.

Новый, неожиданный поворот темы содержат работы Р.Обера [12, 13], в которых предложен оригинальный подход к решению данной задачи, основанный на теории линейных динамических систем и использующий так называемые сбалансированные системы (реализации). В этих работах, однако, также не удалось избавиться от условия 3), и в них доказано даже чуть более слабое, чем [10, 11], утверждение. Именно в [13] доказано, что для любого неотрицательного оператора W , $\text{Ker} W = \{0\}$, в сепарабельном гильбертовом пространстве с чисто точечной спектральной мерой найдется оператор Ганкеля Γ такой, что оператор $|\Gamma| |(\text{Ker} \Gamma)^\perp$ унитарно эквивалентен W ; в [12] разбирается более легкий случай, когда оператор W имеет простой спектр. В обеих работах о ядре построенного оператора Ганкеля Γ ничего не говорится. Подход Р.Обера представляется тем не менее очень интересным. Во-первых, он устанавливает новые связи теории управления с операторами Ганкеля. Во-вторых, искомым оператор Ганкеля строится сразу в явном виде, без всяких предельных

переходов.

В настоящей работе с помощью модификации предложенной Р.Обером конструкции полностью решается задача Пеллера-Хрущева, т.е. показывается, что любой неотрицательный оператор W в сепарабельном гильбертовом пространстве, удовлетворяющий условиям 1) и 2), унитарно эквивалентен модулю некоторого оператора Ганкеля. План этой работы таков.

В § 1 приводятся некоторые необходимые нам сведения об операторах Ганкеля конечного ранга.

В § 2 задача построения Ганкелева оператора с предписанным модулем (с точностью до ядра) сводится к построению так называемой сбалансированной линейной динамической системы.

в § 3 сбалансированные системы характеризуются в терминах, хорошо известных в теории управления уравнений Ляпунова.

В § 4 строится нужная нам сбалансированная система, и тем самым задача Пеллера-Хрущева решается «с точностью до ядра оператора Ганкеля».

В § 5 доказывается критерий нетривиальности ядра построенного оператора Ганкеля.

Все гильбертовы пространства предполагаются в работе сепарабельными, все операторы - ограниченными. Мы будем в дальнейшем работать только с операторами Ганкеля в полуплоскости $(H^2(\mathbb{C}_+))$ и поэтому для краткости письма будем употреблять символы H_φ и Γ_φ вместо \tilde{H}_φ и $\tilde{\Gamma}_\varphi$ соответственно.

§ 1. Операторы Ганкеля конечного ранга

Нам потребуется следующее, хорошо известное (см. [2,3]) описание операторов Ганкеля конечного ранга.

1.1. Теорема Кронекера. Оператор Ганкеля $\mathcal{G}_h(H_\varphi)$ имеет конечный ранг в том и только том случае, когда один из возможных символов φ , а именно символ $\sqrt{2\pi} \mathcal{F}h$ (полагаем, что $h(t)=0$ при $t<0$), имеет вид

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \frac{c_{j,k}}{(z-\lambda_j)^k}, \quad c_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}_+, \quad c_{j,k_j} \neq 0, \quad (1.1)$$

и, более того, ранг равен числу полюсов функции φ с учетом кратностей:

$$\text{rank } \mathcal{G}_h = \text{rank } H_\varphi = \sum_{j=1}^n k_j.$$

1.2. Ядро оператора Ганкеля конечного ранга также легко вычисляется. Именно пусть символ φ ганкелева оператора $H_\varphi(\Gamma_\varphi)$ имеет вид (1.1). образуем так называемое произведение Бляшке B с нулями λ_j (с учетом кратностей):

$$B = \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-\lambda_j}{z-\bar{\lambda}_j} \right)^{k_j}. \quad (1.2)$$

Тогда

$$\text{Ker } \Gamma_\varphi = \text{Ker } H_\varphi = BH^2.$$

Ортогональное дополнение ядра оператора H_φ тоже является хорошо известным в теории классов Харди объектом,

$$(\text{Ker } H_\varphi)^\perp = K_B \stackrel{\text{def}}{=} H^2 \ominus BH^2.$$

§ 2. Операторы Ганкеля и сбалансированные реализации

Рассмотрим динамическую систему $\{A, B, C\}$ с гильбертовым пространством состояний и одномерными входом и выходом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

здесь A - ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H (пространстве состояний системы), операторы B и C , $B: \mathbb{C} \rightarrow H$, $C: H \rightarrow \mathbb{C}$ определены равенствами

$$Bu = ub, \quad Cx = (x, c)$$

(b и c - некоторые фиксированные векторы из H). Считается, что на вход системы подается управление $u(\cdot)$, а на выходе получаем функцию $y(\cdot)$.

Напомним некоторые определения. Пусть $x(x_0, u, \cdot)$ - решение системы (2.1) (на вход подано управление $u(\cdot)$) с начальными условиями $x(0) = x_0$. Система называется управляемой на отрезке $[0, T]$ если множество $\{x(0, u, T) : u \in C[0, T]\}$ плотно в пространстве состояний H . В конечномерном случае ($\dim H < \infty$) это множество всегда замкнуто, и в литературе в определении управляемости конечномерных систем требуют обычно, чтобы оно совпадало со всем H , что, очевидно, равносильно приведенному выше определению.

Система (2.1) называется наблюдаемой на отрезке $[0, T]$, если отображение $O_b: H \rightarrow C[0, T]$,

$$O_b x_0 = y(x_0, 0, \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} Cx(x_0, 0, \cdot),$$

является инъективным. Хорошо известно, что для линейных стационарных систем управляемость (наблюдаемость) на каком-нибудь отрезке $[0, T]$ влечет управляемость (наблюдаемость) на любом другом отрезке, и поэтому для линейных систем говорят обычно просто о наблюдаемости (управляемости).

Напомним также, что система, управляемая и наблюдаемая одновременно, называется минимальной.

Хорошо известно, что система (2.1) управляема в том и только том случае, когда вектор b является циклическим вектором оператора системы A , т.е. когда линейная оболочка множества $\{A^n b: n \geq 0\}$ плотна в H , и наблюдаемой, когда вектор c является циклическим вектором оператора A^* . Также хорошо известно, что если интегралы

$$W_c = \int_{\mathbb{R}_+} e^{At} B B^* e^{A^* t} dt, \quad (2.2)$$

$$W_o = \int_{\mathbb{R}_+} e^{A^* t} C^* C e^{At} dt \quad (2.3)$$

сходятся (например, в слабой операторной топологии), то система будет управляемой (наблюдаемой) в том и только том случае, когда оператор управляемости W_c (соответственно оператор наблюдаемости W_o) имеет тривиальное ядро.

Среди всех минимальных динамических систем важную роль играют так называемые сбалансированные системы, или, другими словами, сбалансированные реализации (передаточной функции). Следуя [14], будем называть минимальную динамическую систему *сбалансированной*, если операторы W_c и W_o совпадают (естественно, предполагается, что соответствующие интегралы сходятся в слабой операторной топологии). Отметим, что в самой работе [14] рассматривались лишь конечномерные системы, и в определении сбалансированной системы требовалось, чтобы операторы W_c и W_o не только совпадали, но и имели бы диагональный вид. Поэтому приведенное выше определение можно рассматривать как "инвариантное", бескоординатное обобщение определения из [14].

С рассмотренной выше динамической системой (2.1) можно связать (формальный) оператор Ганкеля \mathcal{J}_h с ядром h :

$$h(t) = Ce^{At}B \cdot \mathbf{1} = (e^{At}b, c),$$

определенный сначала на финитных функциях. Этот оператор имеет простой физический смысл. Именно если $y = \mathcal{J}_h u$, то $y(\cdot)$ есть выход (на полуоси $[0, \infty)$) нашей системы, которая при $t = -\infty$ была в состоянии $x=0$ и на вход которой подавалось управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(-t), & t < 0, \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Мы говорим, что \mathcal{J}_h — формальный оператор Ганкеля, потому что он, вообще говоря, может быть и не ограниченным в L^2 . Однако для важных частных случаев оператор \mathcal{J}_h все-таки будет ограниченным. Например, он будет ограниченным для конечномерной асимптотически устойчивой (т.е. такой, что $\|e^{At}x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty \quad \forall x \in H$) динамической системы, так как в этом случае матричная экспонента e^{At} , а значит, и ядро $h(t)$ экспоненциально убывают. Другой важный случай дает следующая теорема, которая также иллюстрирует и связь сбалансированных систем с нашей задачей.

2.1. Теорема. Пусть $\{A, B, C\}$ — минимальная сбалансированная система, $W_c = W_o = \Sigma$, и пусть \mathcal{J}_h — связанный с ней оператор Ганкеля. Тогда оператор \mathcal{J}_h ограничен, и, более того, оператор $|\mathcal{J}_h| |(\text{Ker } \mathcal{J}_h)^\perp$ унитарно эквивалентен оператору Σ .

Доказательство. Рассмотрим операторы $V_c, V_o: H \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$;

$$(V_c x)(t) = B^* e^{A^* t} x, \quad x \in H, \quad (V_o x)(t) = C e^{A t} x, \quad x \in H.$$

Очевидно, что

$$V_c^* V_c = \int_{\mathbb{R}_+} e^{A t} B B^* e^{A^* t} dt = W_c = \Sigma \quad (2.4)$$

и аналогично

$$V_o^* V_o = W_o = \Sigma, \quad (2.5)$$

а значит, операторы V_c, V_o ограничены. Но, как нетрудно заметить,

$$\mathcal{J}_h = V_o V_c^*$$

и поэтому оператор \mathcal{J}_h тоже ограничен.

Пусть

$$V_c = U_c \Sigma^{1/2}, \quad V_o = U_o \Sigma^{1/2}$$

- полярные разложения операторов V_c и V_o ($|V_c| = |V_o| = \Sigma^{1/2}$). Так как

$$\text{Ker } V_c = \text{Ker } V_c^* V_c = \text{Ker } W_c = \text{Ker } \Sigma = \{0\}$$

и аналогично

$$\text{Ker } V_o = \{0\},$$

то операторы U_c и U_o изометричны. Поэтому цепочка равенств

$$|\mathcal{J}_h|^2 = V_c V_o^* V_o V_c^* = V_c \Sigma V_c^* = U_c \Sigma^2 U_c^* \quad (2.6)$$

доказывает второе утверждение теоремы.

2.2. Замечание о спектральной мере оператора $|\mathcal{J}_h|$. Как нетрудно заметить, из (2.6) немедленно следует, что

$$|\mathcal{J}_h| = U_c \Sigma U_c^*$$

и что спектральная мера $\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\cdot)$ оператора $|\mathcal{J}_h|$ связана со спектральной мерой $\mathcal{E}^\Sigma(\cdot)$ оператора Σ следующим соотношением:

$$\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\Delta) = U_c \mathcal{E}^\Sigma(\Delta) U_c^* \quad (2.7)$$

для любого измеримого подмножества $\Delta \subset \mathbb{R}$, не содержащего 0. Отметим, что

$$\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\{0\}) = P_{\text{Ker } U_c^*}.$$

Учитывая (2.7) и полярное разложение оператора V_c , легко получить следующее выражение для спектральной меры $\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}$:

$$\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\Delta) = V_c \varphi_\Delta(\Sigma) V_c^*, \quad (2.8)$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}$, $0 \notin \Delta$, $\varphi_\Delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t} \chi_\Delta(t)$, χ_Δ - индикатор множества Δ . Эта формула потребуется нам в дальнейшем.

§ 3. Сбалансированные реализации и уравнения Ляпунова

Как видно из предыдущего параграфа, для того чтобы решить нашу задачу „без учета ядра“, т.е. построить оператор Ганкеля \mathcal{J}_h такой, что оператор $|\mathcal{J}_h| |(\text{Ker } \mathcal{J}_h)^\perp$ унитарно эквивалентен заданному оператору Σ , достаточно построить сбалансированную систему $\{A, B, C\}$, для которой $W_c = W_o = \Sigma$. Для этого окажется полезной следующая теорема, восходящая еще к работам Ляпунова.

3.1. Т е о р е м а. Пусть A - асимптотически устойчивый оператор (т.е. такой, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At} x\| = 0 \quad \forall x$) в гильбертовом пространстве H , а C - некоторый оператор, действующий из H в некоторое вспомогательное гильбертово пространство E . Пусть, кроме того, интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A^* t} C^* C e^{At} dt \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma$$

сходится (в слабой операторной топологии). Тогда оператор Σ является единственным решением следующего уравнения Ляпунова:

$$A^* \Sigma + \Sigma A = -C^* C.$$

Доказательство. Докажем, что Σ является решением. Действительно,

$$\begin{aligned} ((A^* \Sigma + \Sigma A)x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+} ((A^* e^{A^* t} C^* C e^{At} + e^{A^* t} C^* C e^{At} A)x, y) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \left[\frac{d}{dt} (e^{A^* t} C^* C e^{At} x, y) \right] dt = \\ &= (e^{A^* t} C^* C e^{At} x, y) \Big|_0^\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C e^{At} x, C^* A^t y) - (C^* C x, y) = -(C^* C x, y), \end{aligned}$$

так как из-за асимптотической устойчивости оператора A предел равен 0.

Докажем единственность решения. Допустим, что найдется оператор Σ_1 такой, что

$$A^* \Sigma_1 + \Sigma_1 A = -C^* C,$$

тогда для оператора $\Delta = \Sigma - \Sigma_1$ верно равенство

$$A^* \Delta + \Delta A = 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt} (\Delta e^{At} x, e^{At} y) = (\Delta A e^{At} x, e^{At} y) + (\Delta e^{At} x, A e^{At} y) = ((A^* \Delta + \Delta A) e^{At} x, e^{At} y) \equiv 0.$$

Поэтому

$$(\Delta x, y) = (\Delta e^{At} x, e^{At} y) \quad \forall t,$$

и так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At} x\| = 0 \quad \forall x$, то

$$(\Delta x, y) = 0 \quad \forall x, y \in H,$$

т. е. $\Delta = 0$. •

Из этой теоремы видно, что, для того чтобы решить задачу Пеллера-Хрущева «с точностью до ядра», достаточно подобрать по заданному самосопряженному оператору $\Sigma, \Sigma \geq 0$, $\text{Ker } \Sigma = \{0\}$, систему $\{A, B, C\}$ с одномерными входом и выходом такую, что

- 1) Операторы A и A^* асимптотически устойчивы.
- 2) Оператор Σ решает уравнения Ляпунова,

$$A^* \Sigma + \Sigma A = -C^* C,$$

$$\Sigma A^* + A \Sigma = -B B^*.$$

- 3) Интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{At} B B^* e^{A^* t} dt \stackrel{\text{def}}{=} W_c,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A^* t} C^* C e^{At} dt \stackrel{\text{def}}{=} W_o.$$

сходятся в слабой операторной топологии.

Тогда в силу теоремы 3.1 $W_c = W_o = \Sigma$, т. е. система $\{A, B, C\}$ будет сбалансированной, и, значит, по теореме 2.1 оператор $|g_h| |(\text{Ker } g_h)^\perp$ (где g_h - ганкелев оператор системы, $h = C e^{A^* t} B = (e^{A^* t} b, c)$) унитарно эквивалентен оператору Σ .

В работах Р. Обера [12, 13] на основе анализа конечномерных систем, проведенного в [15], были предъявлены такие системы для случая, когда оператор Σ имеет чисто точечную спектральную меру. Ниже мы обобщим конструкцию Р. Обера и предъявим такую систему в общем случае.

§ 4. Решение задачи Пеллера-Хрущева «с точностью до ядра»

Построим по заданному самосопряженному оператору Σ , $\Sigma \geq 0$, $\text{Ker } \Sigma = \{0\}$, динамическую систему $\{A, B, C\}$, удовлетворяющую условиям 1)-3) из предыдущего параграфа. Для этого рассмотрим спектральное представление оператора Σ , т.е. реализуем его как оператор умножения на независимую переменную t в прямом (фон Неймановском) интеграле

$$\mathcal{H} = \int_{\sigma(\Sigma)} \oplus E(t) d\mu(t),$$

здесь μ - (скалярная) спектральная мера оператора Σ . Будем считать, что все пространства $E(t)$ вложены в некоторое пространство E следующим образом: пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - некоторый ортонормированный базис в E . Положим

$$E(t) := \text{span} \{e_k : 1 \leq k \leq N(t)\};$$

здесь $N(t) = \dim E(t)$ ($E(t) = E$, если $N(t) = \infty$).

Напомним, что скалярная спектральная мера μ оператора определена неоднозначно, и мы всегда можем заменить в спектральном представлении меру μ на взаимно абсолютно непрерывную с ней, домножив ее на неотрицательный вес w , $w \neq 0$, μ -п.в. из $L^1(\mu)$.

Определим в \mathcal{H} подпространство \mathcal{H}_0 , состоящее из векторов f вида

$$f(t) = \varphi(t) \cdot e_1 \in E(t), \quad \varphi \in L^2(\mu).$$

Это подпространство естественным образом отождествляется с пространством $L^2(\mu)$. Определим в \mathcal{H}_0 интегральный оператор A_0 с ядром $K(s, t) = -1/(s+t)$. При этом мы выберем меру μ так (домножая, если надо, на подходящий вес w), чтобы $K \in L^2(\mu \times \mu)$. Тогда оператор A_0 будет оператором Гильберта-Шмидта. Очевидно, также, что оператор A_0 самосопряжен. Доопределим оператор A_0 нулем на \mathcal{H}_0^\perp .

Возьмем векторы $b, c \in \mathcal{H}$

$$b(t) = c(t) = e_1 \in E(t) \quad \forall t,$$

и определим операторы B, C , $B: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}$, $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$Bu = ub, \quad u \in \mathbb{C},$$

$$Cx = (x, c), \quad x \in \mathcal{H}.$$

(Отметим, что $B^* = C$).

Прямым вычислением проверяется, что

$$A_0^* \Sigma + \Sigma A_0 = -C^* C, \quad (4.1)$$

$$A_0 \Sigma + \Sigma A_0^* = -B B^* \quad (4.2)$$

(напомним, что $A_0 = A_0^*$, $B B^* = C^* C$, т.е. оба уравнения Ляпунова совпадают). К сожалению, ядро оператора A_0 (равное \mathcal{H}_0^\perp) нетривиально, если оператор Σ имеет кратный спектр и, значит, оператор A_0 не будет в этом случае асимптотически устойчивым. Поэтому в этом случае надо добавить к A_0 некоторую добавку D , которая не испортит соотношений (4.1), (4.2) и, уничтожив ядро, сделает оператор $A = A_0 + D$ (а

также A^*) асимптотически устойчивым.

Выберем наборы строго положительных чисел $\{a_k^{(n)}\}_{k=1}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \infty$, так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k^{(n)})^2 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(\infty)})^2 < \infty,$$
(4.3)

и определим оператор D в прямом интеграле как оператор умножения на оператор-функцию $D(\cdot)$, где оператор $D(t)$ имеет в базисе $\{e_k\}_{k=1}^{N(t)}$ вид

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(n)} & 0 & a_2^{(n)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$

здесь $n = n(t) = \dim E(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \infty$. Очевидно, что $D^* = -D$, оператор D коммутирует с Σ и, значит,

$$D^* \Sigma + \Sigma D = 0,$$

$$\Sigma D^* + D \Sigma = 0.$$

Поэтому в силу (4.1), (4.2) для оператора $A = A_0 + D$ верны соотношения

$$A^* \Sigma + \Sigma A = -C^* C, \quad (4.4)$$

$$\Sigma A^* + A \Sigma = -B B^*. \quad (4.5)$$

Для доказательства асимптотической устойчивости операторов A и A^* , воспользуемся следующим результатом.

4.1. Теорема (Arendt, Batty, [16]). Пусть $e^{A t}$ — сильно непрерывная C_0 -полугруппа сжатий в рефлексивном банаховом пространстве такая, что

(i) спектр $\sigma(A)$ ее генератора A лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$;

(ii) оператор A не имеет собственных чисел на мнимой оси $i\mathbb{R}$;

(iii) множество $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счетно. Тогда полугруппа $e^{A t}$ асимптотически устойчива, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{A t} x\| = 0 \quad \forall x.$$

4.2. Проверка асимптотической устойчивости операторов A и A^* . Покажем прежде всего, что оператор A не имеет собственных чисел в открытой правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Пусть

$$A x = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Тогда

$$-(C^* C x, x) = (A^* \Sigma x, x) + (\Sigma A x, x) = (\Sigma x, A x) + (A x, \Sigma x) =$$

$$= 2 \operatorname{Re} (A x, \Sigma x) = 2 \cdot (\operatorname{Re} \lambda) (x, \Sigma x),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{-(C^* C x, x)}{2(\Sigma x, x)} \leq 0. \quad (4.6)$$

Аналогично проверяется и отсутствие собственных чисел в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ у оператора A^* .

Отметим, что из приведенных выше рассуждений следует отсутствие собственных чисел в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и у оператора A_0 , например, потому что A_0 является частным случаем ($\dim E(t) \equiv 1$) оператора A . Но оператор A_0 есть самосопряженный оператор Гильберта-Шмидта, и, значит, $\sigma(A_0) \subset (-\infty, 0]$, т.е. $A_0 \leq 0$. Поэтому

$$2\operatorname{Re} A = A + A^* = 2A_0 \leq 0,$$

и, следовательно, полугруппа $e^{A t}$ будет полугруппой сжатий.

Покажем теперь, что оператор A не имеет собственных чисел на мнимой оси. Допустим противное:

$$A x = i \omega x, \quad x \in \mathcal{H}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Тогда из (4.6) следует, что

$$0 = \operatorname{Re}(i \omega) = \frac{-(C^* C x, x)}{2(\Sigma x, x)},$$

а значит, $C x = 0$, т.е. $x \in \mathcal{N}$. Аналогично если

$$A^* \tilde{x} = i \tilde{\omega} \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in \mathcal{H}, \quad \tilde{\omega} \in \mathbb{R},$$

то $B^* \tilde{x} = 0$, т.е. $x \in \mathcal{N}$.

Применяя равенство

$$A \Sigma + \Sigma A = -C^* C$$

к собственному вектору x и учитывая, что $C x = 0$, имеем

$$A^* \Sigma x = -i \omega \Sigma x,$$

т.е. Σx - собственный вектор оператора A^* . Применяя теперь равенство

$$A \Sigma + \Sigma A^* = -B B^*$$

к этому собственному вектору и учитывая, что $B^* \Sigma x = 0$, получаем

$$A \Sigma^2 x = i \omega \Sigma^2 x.$$

Отсюда следует, что если x - собственный вектор оператора A , соответствующий собственному числу $i \omega$, то для любой измеримой и ограниченной функции φ вектор $\varphi(\Sigma) x$ тоже будет собственным вектором, соответствующим этому числу. В частности, собственным вектором будет при любом измеримом $\Delta \subset \mathbb{R}$ и вектор $\mathcal{E}^\Delta(\Sigma) x$ (напоминаем, что $\mathcal{E}^\Delta(\cdot)$ - спектральная мера оператора Σ).

Пусть $x(\cdot)$ - представление собственного вектора x в прямом интеграле \mathcal{H} :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} x_k(t) e_k, \quad N(t) = \dim E(t).$$

Так как $\mathcal{E}^\Delta(\Sigma) x$ при любом измеримом $\Delta \subset \mathbb{R}$ тоже будет собственным вектором, соответствующим собственному числу $i \omega$, а все такие векторы, как было показано выше, должны быть ортогональны вектору c , то

$$\int_{\Delta} x_1(t) d\mu(t) = 0 \quad \forall \Delta \subset \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что $x_1(t) = 0$ μ -п.в., т.е. что $x \in \mathcal{H}_0$, и, значит, действие на этот вектор оператора A сведется к действию добавочного оператора D . Поэтому

$$Dx = i\omega x$$

или, расписывая подробнее

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(n)} & 0 & a_2^{(n)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(t)} \\ x_n^{(t)} \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(t)} \\ x_n^{(t)} \end{pmatrix}$$

$$\forall t \in \sigma(\Sigma), n = N(t) = \dim E(t).$$

Произведя умножение, имеем

$$\begin{pmatrix} a_1^{(n)} x_2(t) \\ a_2^{(n)} x_3(t) \\ -a_2^{(n)} x_2(t) + a_3^{(n)} x_4(t) \\ \vdots \\ -a_{n-2}^{(n)} x_{n-2}(t) + a_{n-1}^{(n)} x_n(t) \\ -a_{n-1}^{(n)} x_{n-1}(t) \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Проводя сверху вниз покомпонентное сравнение векторов, легко сделать вывод, что $x_k(t) = 0 \quad \forall k$, т.е. что $x = 0$.

Итак, мы показали, что e^{At} есть полугруппа сжатий и, значит, спектр ее генератора A лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Мы также показали, что оператор A не имеет собственных чисел на мнимой оси. Чтобы применить теорему 4.1 и доказать асимптотическую устойчивость оператора A , достаточно показать, что множество $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счетно.

Для этого рассмотрим сначала спектр оператора D . Так как оператор D (и операторы $D(t)$) кососимметричны, $D^* = -D$, т.е. оператор iD (операторы $iD(t)$) самосопряжен, то

$$\sigma(D) \subset \operatorname{clos} \bigcup_{t \in \sigma(\Sigma)} \sigma(D(t)).$$

Отметим, что $\sigma(D) \subset i\mathbb{R}$.

Оператор-функция $D(\cdot)$ принимает не более чем счетное число значений D_n , $n \in \mathbb{N} \cup \infty$,

$$D_n = D(t) \text{ при } n = \dim E(t),$$

и поэтому

$$\sigma(D) \subset \text{clos} \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} \sigma(D_n).$$

Из оценок (4.3) следует, что D_∞ - оператор Гильберта-Шмидта и, значит, $\sigma(D_\infty)$ - счетное множество чисто мнимых чисел, сгущающееся к 0. Операторы же D_n - операторы конечного ранга. Из оценок (4.3) также следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty, n \neq \infty} \|D_n\| = 0$, и поэтому множество $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(D_n)$ не более чем счетно и имеет единственную точку сгущения - точку 0. Поэтому

$$\text{clos} \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} \sigma(D_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} \sigma(D_n),$$

и, значит, множество $\sigma(D)$ не более чем счетно.

Покажем теперь, что

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma(D).$$

Действительно, пусть $i\omega \notin \sigma(D)$. Тогда оператор $D - i\omega I$ обратим, а оператор $A - i\omega I$ есть компактное возмущение последнего. Поэтому этот оператор есть Фредгольмов оператор индекса 0, и, значит, он может быть необратимым в том и только том случае, когда $\text{Ker}(A - i\omega I) \neq \{0\}$. Но это означает, что $i\omega$ - собственное число оператора A , чего, как мы показали выше, быть не может.

Итак, мы доказали, что оператор A асимптотически устойчив. Асимптотическая устойчивость оператора A^* проверяется аналогично.

Чтобы завершить построение, нам осталось показать, что интегралы, определяющие W_c и W_o , сходятся. Для этого мы воспользуемся следующей конструкцией.

4.3. Аппроксимация операторами конечного ранга. Рассмотрим последовательность разбиений τ_n отрезка $(0, \|\Sigma\|)$:

$$\tau_n = \{(t_2^{(n)}, t_1^{(n)}], (t_3^{(n)}, t_2^{(n)}], \dots, (t_{k_n}^{(n)}, t_{k_n-1}^{(n)}], (0, t_{k_n}^{(n)})\},$$

$$\|\Sigma\| = t_1^{(n)} > t_2^{(n)} > \dots > t_{k_n}^{(n)} > 0,$$

такую, что каждый отрезок разбиения τ_{n+1} содержится в некотором отрезке разбиения τ_n , причем ранг разбиения τ_n (т.е. длина максимального отрезка разбиения) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Пусть μ_n - мера, сосредоточенная в точках $t_k^{(n)}$ разбиения τ_n ,

$$\mu_n(\{t_k^{(n)}\}) = \mu(\{t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)}\}).$$

Очевидно, что последовательность мер μ_n слабо сходится к мере μ (напомним, что $\mu(\{0\}) = 0$, так как $\text{Ker} \Sigma = \{0\}$).

Рассмотрим последовательность функций $N_n(\cdot)$ с натуральными значениями такую,

что каждая функция $N_n(\cdot)$ постоянна на отрезках разбиения τ_n и $\lim_n N_n(t) = N(t) = \dim E(t)$ μ -п.в. Рассмотрим прямые интегралы

$$\mathcal{H}^{(n)} = \int_0^{\|\Sigma\|} \oplus E^{(n)}(t) d\mu_n(t), \quad \dim E^{(n)}(t_k^{(n)}) = N_n(t_k^{(n)}).$$

Все пространства $E^{(n)}(t)$ полагаются, как и в начале этого параграфа, вложенными в пространство E с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=1}^\infty$:

$$E^{(n)}(t_k^{(n)}) = \text{span} (e_j : 1 \leq j \leq N_n(t_k^{(n)})).$$

Определим в $\mathcal{H}^{(n)}$ подпространство $\mathcal{H}_0^{(n)}$, состоящее из векторов f , имеющих представление $f(\cdot)$:

$$f(t) = \varphi(t) \cdot e_1, \quad \varphi \in L^2(\mu_n).$$

Это подпространство естественным образом отождествляется с $L^2(\mu_n)$; определим в нем оператор $A_0^{(n)}$ - интегральный оператор с ядром $K(s, t) = -1/(s+t)$ - и доопределим этот оператор нулем до оператора на всем $\mathcal{H}^{(n)}$.

Определим также операторы $D^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}$ как операторы умножения в $\mathcal{H}^{(n)}$ на оператор-функцию $D^{(n)}$:

$$D^{(n)}(t_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(m)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(m)} & 0 & a_2^{(m)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^{(m)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1}^{(m)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{m-1}^{(m)} & 0 \end{pmatrix}$$

где $m = N_n(t_k^{(n)})$, и положим $A_n = A_0^{(n)} + D^{(n)}$.

Определим векторы $b_n = c_n \in \mathcal{H}^{(n)}$, имеющие в $\mathcal{H}^{(n)}$ представление

$$b_n(t) = c_n(t) = e_1 \quad \forall t,$$

и операторы $B_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}$, $C_n: \mathcal{H}^{(n)} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$B_n u = u b_n, \quad C_n x = (x, c_n).$$

Нетрудно показать, что операторы A_n и A_n^* асимптотически устойчивы (поскольку операторы A_n имеют конечный ранг, то для доказательства их асимптотической устойчивости не надо пользоваться теоремой 4.1, достаточно воспользоваться отсутствием собственных чисел в правой полуплоскости, которое уже было доказано выше в п. 4.2).

Так как A_n , A_n^* - асимптотически устойчивые операторы конечного ранга, то матричные экспоненты $e^{A_n t}$, $e^{A_n^* t}$ экспоненциально убывают (по норме) при $t \rightarrow +\infty$, и,

значит, интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A_n t} B_n B_n^* e^{A_n^* t} dt = W_c^{(n)},$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A_n^* t} C_n^* C_n e^{A_n t} dt = W_o^{(n)}$$

сходятся. Поэтому по теореме 2.1 оператор Ганкеля конечного ранга $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_{h_n}$ с ядром h_n

$$h_n(t) = (e^{A_n t} b_n, c_n)$$

ограничен, и, более того, оператор

$$|\mathcal{J}_n| |(\text{Ker } \mathcal{J}_n)^\perp$$

унитарно эквивалентен Σ_n - оператору умножения на независимую переменную t в $\mathcal{H}^{(n)}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\|\mathcal{J}_n\| = \|\Sigma_n\| = \|\Sigma\| \quad \forall n.$$

Интуитивно ясно, что системы $\{A_n, B_n, C_n\}$ аппроксимируют исходную систему $\{A, B, C\}$ и соответственно операторы \mathcal{J}_n аппроксимируют оператор \mathcal{J} . Сформулируем соответствующие утверждения строго.

Рассмотрим пространство $L^2(\mu, E)$ - пространство суммируемых с квадратом (по мере μ) E -значных функций и будем считать, что прямой интеграл \mathcal{H} естественным образом вложен в $L^2(\mu, E)$ (поскольку $E(t) \in E \quad \forall t$). Определим для каждого n оператор $Q_n: L^2(\mu, E) \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}$ как композицию оператора усреднения и проекции

$$(Q_n f)(t_k^{(n)}) = P_{E^{(n)}(t_k^{(n)})} \left(\frac{1}{\mu((t_{k+1}^{(n)}), t_k^{(n)})} \int_{(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)})} f(s) d\mu(s) \right).$$

Сопряженный оператор Q_n^* сопоставляет каждой (вектор-) функции f , заданной на решетке $t_k^{(n)}$, постоянную на отрезках разбиения τ_n функцию \tilde{f} , полагая на отрезке $(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)})$

$$\tilde{f} \equiv f(t_k^{(n)}).$$

Очевидно, что оператор Q_n^* изометричен.

Нетрудно показать, что последовательность операторов $Q_n^* A_n Q_n$ сильно сходится к оператору A (рассматриваемому как оператор на всем $L^2(\mu, E)$). Действительно, покажем сначала, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^* D^{(n)} Q_n x = Dx \quad \forall x \in L^2(\mu, E).$$

Оператор $Q_n^* D^{(n)} Q_n$ можно представить в виде

$$Q_n^* D^{(n)} Q_n = \tilde{D}_n P_n,$$

где P_n - оператор усреднения,

$$(P_n f)(t) = \frac{1}{\mu((t_{k+1}^{(n)}), t_k^{(n)})} \int_{(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)})} f(s) d\mu(s), \quad t \in (t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)}],$$

а \tilde{D} - оператор умножения на оператор-функцию $\tilde{D}_n(\cdot)$,

$$\tilde{D}_n(t) \equiv D^{(n)}(t_k^{(n)})$$

на отрезке $(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)})$. Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{D}_n x = Dx \quad \forall x \in L^2(\mu, E),$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^* D^{(n)} Q_n x = Dx \quad \forall x \in L^2(\mu, E).$$

Сходимость же

$$Q_n^* A_0^{(n)} Q_n x \rightarrow A_0 x \quad \forall x \in L^2(\mu, E)$$

следует из сходимости на плотном множестве непрерывных функций, равных 0 в некоторой окрестности точки 0, и равномерной ограниченности операторов $A_0^{(n)}$; последняя следует из очевидных неравенств

$$\|A_0^{(n)}\|_{\mathcal{G}_2} \leq \|A_0\|_{\mathcal{G}_2};$$

$\|\cdot\|_{\mathcal{G}_2}$ означает норму Гильберта-Шмидта; здесь мы использовали тот факт, что мера μ сосредоточена на правых концах интервалов разбиения τ_n .

Положим $\tilde{A}_n = Q_n^* A_n Q_n$, $\tilde{B}_n = Q_n^* B_n$, $\tilde{C}_n = C_n Q_n$. Очевидно, что оператор Ганкеля системы $\{\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n\}$ совпадает с оператором Ганкеля системы $\{A_n, B_n, C_n\}$, т.е. с \mathcal{J}_n . Очевидно также, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n x = Bx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}_n x = Cx \quad \forall x.$$

Так как $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n = A$ и $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n^* = A^*$, то для всякого вектора $x \in L^2(\mu, E)$

$$e^{\tilde{A}_n t} x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{At} x,$$

$$e^{\tilde{A}_n^* t} x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{A^* t} x$$

равномерно на компактных подмножествах полуоси \mathbb{R}_+ . Поэтому для операторов V_c^n , $V_0^n: L^2(\mu, E) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$

$$(V_c^{(n)} x)(t) = \tilde{B}_n^* e^{\tilde{A}_n^* t} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(V_0^{(n)} x)(t) = \tilde{C}_n e^{\tilde{A}_n t} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и операторов $V_c, V_0: L^2(\mu, E) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$

$$(V_c x)(t) = B^* e^{A^* t} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(V_0 x)(t) = C e^{At} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

следующие соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_c^{(n)} x, f) = (V_c x, f),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_0^{(n)} x, f) = (V_0 x, f)$$

верны для любого $x \in L^2(\mu, E)$ и любой финитной функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Отметим, что

$$\|V_0^{(n)}\| = \|V_c^{(n)}\| = \|\mathcal{J}_n\|^{1/2} = \|\Sigma_n^{1/2}\| = \|\Sigma\|^{1/2},$$

и поэтому операторы $V_0^{(n)}$, $V_c^{(n)}$ равномерно ограничены. Следовательно, по теореме об $\varepsilon/3$

$$V_c^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V_c, \quad V_0^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V_0$$

в слабой операторной топологии, и

$$\|V_c\| \leq \|\Sigma\|^{1/2}, \quad \|V_0\| \leq \|\Sigma\|^{1/2},$$

откуда и следует сходимость интегралов, определяющих W_c и W_0 .

Итак, мы показали, что система $\{A, B, C\}$ удовлетворяет условиям 1)-3) из § 3, и, значит, задача Пеллера-Хрущева решена «с точностью до ядра».

§ 5. 0 ядре построенного оператора Ганкеля

Следующая теорема отвечает на вопрос, когда построенный выше в § 4 оператор Ганкеля \mathcal{J}_h имеет тривиальное ядро.

5.1. Теорема. Пусть Σ — необратимый неотрицательный оператор, $\text{Ker } \Sigma = \{0\}$, и \mathcal{J}_h — построенный выше в § 4 оператор Ганкеля такой, что оператор $|\mathcal{J}_h| |(\text{Ker } \mathcal{J}_h)^\perp$ унитарно эквивалентен Σ .

Тогда, если спектральная мера μ оператора Σ выбрана так, чтобы $\int \frac{1}{s} d\mu(s) < \infty$, то построенный оператор Ганкеля \mathcal{J}_h имеет нетривиальное ядро; в противном случае $\text{Ker } \mathcal{J}_h = \{0\}$.

Эта теорема полностью решает вопрос о ядре, а значит, и задачу Пеллера-Хрущева, если заметить, что в случае, когда оператор Σ необратим (а значит, 0 — точка сгущения $\sigma(\Sigma)$) можно выбрать спектральную меру μ (домножая на подходящий исчезающий вес w) так, чтобы выполнялось любое из условий $\int \frac{1}{s} d\mu(s) < \infty$, или $\int \frac{1}{s} d\mu(s) = \infty$, (с сохранением условия $\iint 1/(s+t)^2 d\mu(s) d\mu(t) < \infty$).

Доказательство последнего утверждения предоставляется читателю в качестве простого упражнения.

5.2. Необходимость условия $\int \frac{1}{s} d\mu(s) < \infty$ для нетривиальности ядра. Пусть \mathcal{J}_h — построенный выше в § 4 оператор Ганкеля, и пусть $\text{Ker } \mathcal{J}_h \neq \{0\}$. Так как $\mathcal{J}_h = V_0^* V_c^*$ и $\text{Ker } V_c = \{0\}$, $\text{Ker } V = \{0\}$, то

$$\text{Ker } \mathcal{J}_h = \text{Ker } V_c^* = (\text{Range } V_c)^\perp.$$

Обозначим $\{\Phi(s)\}_{s \geq 0}$ полугруппу обратных сдвигов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ $(\Phi(s)f)(t) = f(t+s)$, $t, s \geq 0$, и пусть $\Psi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(s) |(\text{Ker } V_c^*)^\perp$ (подпространство $(\text{Ker } V_c^*)^\perp$ инвариантно относительно полугруппы $\{\Phi(s)\}_{s \geq 0}$). Нетрудно заметить, что

$$V_c e^{A^* t} = \Phi(t) V_c,$$

и поэтому

$$V_c e^{A^* t} = \Psi(t) V_c. \quad (5.1)$$

Пусть B - генератор полугруппы $\Psi(t)$, $\Psi(t) = e^{Bt}$, $t \geq 0$. Ниже, в п. 5.3, мы покажем, что в нашем случае B - ограниченный оператор. Поэтому из соотношений (5.1) следует, что

$$V_c A^* = B V_c,$$

или, что равносильно

$$B = V_c A^* V_c^{-1}$$

(оператор $V_c A^* V_c^{-1}$ определен на плотном в $(\text{Ker } V_c^*)^\perp$ множестве и продолжается по непрерывности до ограниченного оператора). Обозначим

$$K = B + B^* = V_c A^* V_c^{-1} + V_c^{-1} A V_c^*.$$

Домножая это равенство справа на V_c и слева на V_c^* и вспоминая, что $V_c^* V_c = \Sigma$, имеем

$$V_c^* K V_c = \Sigma A^* + A \Sigma.$$

Но, с другой стороны, по построению оператора A

$$\Sigma A^* + A \Sigma = -B B^* = -(\cdot, b) b$$

и, значит, $V_c^* K V_c = -B B^*$. Но это выполнено только в том случае, когда $b = V_c^* f$, т.е. $b \in \text{Range } V_c^*$, или, что равносильно, $b \in \text{Range } |V_c| = \text{Range } \Sigma^{1/2}$. Последнее же условие и равносильно оценке $\int \frac{1}{s} d\mu(s) < \infty$.

5.3. Проверка ограниченности оператора B . Чтобы показать, что генератор B полугруппы сжатий $\{\Psi(s)\}_{s \geq 0}$ есть ограниченный оператор, отобразим с помощью обратного преобразования Фурье \mathcal{F}^{-1} пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$ на H^2 . При этом полугруппы $\hat{\Phi}(s)$ и $\hat{\Psi}(s)$ перейдут соответственно в полугруппы $\hat{\Phi}(s) = \mathcal{F}^{-1} \Phi(s) \mathcal{F}$ и $\hat{\Psi}(s) = \mathcal{F}^{-1} \Psi(s) \mathcal{F}$.

$$\hat{\Phi}(s) f = P_{H^2} (e_s \cdot f), \quad e_s(t) = e^{-1st},$$

$$\hat{\Psi}(s) = \hat{\Phi}(s) | K, \quad K = \mathcal{F}^{-1} ((\text{Ker } V_c^*)^\perp).$$

Очевидно, что подпространство K есть инвариантное подпространство полугруппы $\hat{\Phi}(s)$, и поэтому K имеет вид $K = K_\Theta \stackrel{\text{def}}{=} H^2 - \Theta H^2$, где Θ - некоторая внутренняя ($|\Theta| = 1$ п.в. на \mathbb{R}) функция из $H^\infty(\mathbb{C}_+) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f(s) = 0, s < 0\}$.

Хорошо известно [5], что каждая внутренняя функция $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{T})$ допускает представление

$$\Theta = \alpha \cdot B \cdot S, \quad (5.2)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$; B - произведение Бляшке,

$$B = \prod_{\lambda \in \sigma_1} b_\lambda^{k(\lambda)}, \quad \sigma_1 \subset \mathbb{C}_+, \quad b_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \frac{\lambda - z}{1 - \lambda z}, \quad (5.3)$$

а S - сингулярная часть функции Θ ,

$$S(z) = \exp \left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right). \quad (5.4)$$

Здесь $\sigma_1 \subset \mathbb{D}$ - множество нулей функции Θ ; $k(\lambda)$ - кратность нуля λ , а μ - некоторая сингулярная (относительно меры Лебега на \mathbb{T}) мера. Множество $\text{clos } \sigma_1 \cup \text{supp } \mu$ (имеется в виду замкнутый носитель меры μ) мы будем называть спектром функции Θ и обозначать $\sigma(\Theta)$. Внутренняя функция Θ из $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ также допускает представление

$$\Theta = \tilde{\Theta} \circ \omega^{-1}, \tag{5.5}$$

где $\tilde{\Theta}$ - некоторая внутренняя функция из $H^\infty(\mathbb{D})$, а ω - стандартная конформная пересадка единичного круга \mathbb{D} в верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ ,

$$\omega(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

Множество $\omega(\sigma(\tilde{\Theta})) \subset \text{clos } \mathbb{C}_+ \cup \infty$ также будем обозначать $\sigma(\Theta)$.

Выберем вектор $x \in \mathcal{H}$. Посчитаем $\mathcal{F}^{-1}V_c x$:

$$(\mathcal{F}^{-1}V_c x)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} B^* e^{A^* t} x \cdot e^{ist} dt = ((A^* + isI)^{-1} x, b), \quad -is \notin \sigma(A^*).$$

Следовательно, функция $f = \mathcal{F}^{-1}V_c x$ аналитична вне ограниченного множества $i\sigma(A^*)$. Так как $\text{clos } \{\mathcal{F}^{-1}V_c x : x \in \mathcal{H}\} = K_{\Theta} = H^2_{\Theta} \ominus \Theta H^2$, то

$$\mathcal{F}^{-1}V_c x / \Theta \in H^2(\mathbb{C}_-) \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

и любая другая внутренняя функция с таким свойством должна делиться на Θ . Отсюда и из представления (5.2)-(5.5) легко сделать вывод, что $\sigma(\Theta) \subset i\sigma(A^*)$, т.е. что $\sigma(\Theta)$ - ограниченное множество. Пусть $\omega, \omega(z) = i \frac{1+z}{1-z}$ - стандартное конформное отображение круга в верхнюю полуплоскость и $\tilde{\Theta} = \Theta \circ \omega$ - внутренняя функция в $H^\infty(\mathbb{D})$. Отметим, что из ограниченности $\sigma(\Theta)$ следует, что $1 \notin \sigma(\tilde{\Theta})$.

Пусть \hat{B} - генератор полугруппы $\{\hat{\Psi}(s)\}_{s \geq 0}$. Чтобы доказать ограниченность генератора B достаточно проверить ограниченность \hat{B} . Для этого рассмотрим оператор $T = (\hat{B} + I)(\hat{B} - I)^{-1}$, так называемый когенератор полугруппы $\{\hat{\Psi}(s)\}_{s \geq 0}$. Хорошо известно, см. [17], что когенератор T полугруппы обратных сдвигов $\hat{\Psi}(s), \hat{\psi}(s) = \hat{\Psi}(s)|_{K_{\Theta}}$ унитарно эквивалентен сужению обратного сдвига S^*

$$S^* f = (f - f(0))/z, \quad f \in H^2(\mathbb{D})$$

на подпространство $K_{\Theta} = H^2 \ominus \tilde{\Theta} H^2$, где $\tilde{\Theta} = \Theta \circ \omega$. Последний оператор хорошо изучен. В частности, известно, что его спектр совпадает с множеством $\overline{\sigma(\tilde{\Theta})}$ (черта означает комплексное сопряжение). Так как $1 \notin \sigma(\tilde{\Theta})$, то $1 \notin \sigma(T)$. С другой стороны, $\hat{B} = (T + I)(T - I)^{-1}$ и, следовательно, оператор \hat{B} (а значит, и B) ограничен. •

Чтобы доказать достаточность условия $\int \frac{1}{s} d\mu(s) < \infty$ для нетривиальности ядра оператора \mathcal{J}_h , мы воспользуемся приведенной выше, в п. 4.3, аппроксимацией оператора \mathcal{J}_h операторами конечного ранга \mathcal{J}_n . Нам потребуется следующее

О п р е д е л е н и е. Подпространство E банахова пространства X называется нижним пределом последовательности подпространств E_n (пишем $E = \varprojlim_n E_n$), если

$$E = \{x \in X: \lim_n \text{dist}(X, E_n) = 0\}.$$

5.4. Л е м м а. Пусть последовательность операторов V_n сильно сходится к оператору V . Тогда

$$\text{Range } V \subset \varliminf_n \text{Range } V_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y=Vx$. Тогда

$$\text{dist}(y, \text{Range } V_n) \leq \|Vx - V_n x\| \rightarrow \text{при } n \rightarrow \infty. \bullet$$

Можно легко показать, что для введенных выше, в п. 4.3, операторов $V_c^{(n)}$

$$\|V_c^{(n)}x\|^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \|B^* e^{\tilde{\Lambda}_n^* t} x\|^2 dt = (Q_n^* \Sigma_n Q_n x, x) \rightarrow \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\Sigma x, x) = \|V_c x\|^2 \quad \forall x \in L^2(\mu, E),$$

что вместе со слабой сходимостью влечет и сильную сходимость

$$V_c = s\text{-}\lim_n V_c^{(n)}.$$

Поэтому, в силу леммы 5.4 и замкнутости нижнего предела подпространств

$$(\text{Ker } \mathcal{J}_n)^\perp = \text{clos Range } V_c \subset \lim_n \text{clos Range } V_c^{(n)} = \varliminf_n ((\text{Ker } \mathcal{J}_n)^\perp).$$

Тогда, для нетривиальности $\text{Ker } \mathcal{J}_n$ достаточно, чтобы

$$\varliminf_n ((\text{Ker } \mathcal{J}_n)^\perp) \neq L^2(\mathbb{R}_+),$$

или, если перейти к операторам $\Gamma_n = \mathcal{F}^{-1} J_n \mathcal{F}$, чтобы

$$\varliminf_n ((\text{Ker } \Gamma_n)^\perp) \neq H^2.$$

Но $(\text{Ker } \Gamma_n)^\perp$ есть, см. п. 1.2, подпространство вида K_B , где B - конечное произведение Бляшке, и ответ на вопрос о нижних пределах таких подпространств дает следующая хорошо известная (см., например, [3]) теорема.

5.5. Т е о р е м а. Пусть B_n - произведения Бляшке конечного ранга:

$$B_n = \prod_{j=1}^{N_n} \left(\frac{z - \lambda_j^{(n)}}{z - \bar{\lambda}_j^{(n)}} \right)^{k_j^{(n)}}, \quad \lambda_j^{(n)} \in \mathbb{C}_+,$$

$$K_n = K_{B_n} \stackrel{\text{det}}{=} H^2 \ominus B_n H^2,$$

и пусть

$$\text{Cap } B_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N_n} k_j^{(n)} \frac{\text{Im } \lambda_j^{(n)}}{1 + |\lambda_j^{(n)}|^2}.$$

Тогда $\lim_n K_n = H^2$ в том и только том случае, когда

$$\lim_n \text{Cap } B_n = \infty.$$

Вообще говоря, в [3] приведена формулировка этой теоремы для H^2 в круге, однако стандартная пересадка H^2 из полуплоскости в круг и обратно позволяет легко

получить и приведенную выше формулировку.

5.6. Достаточность условия $\int \frac{1}{s} d\mu(s) < \infty$ для нетривиальности ядра проверяется в силу вышесказанного путем анализа емкостей $\text{Cap } B_n$.

Пусть A_n - оператор конечного ранга из п.4.3 такой, что $\mathcal{J}_n(\Gamma_n)$ - ганкелев оператор системы $\{A_n, B_n, C_n\}$. Пусть $\mu_j^{(n)}$ - собственные числа оператора A_n , а $k_j^{(n)}$ - их кратности. Тогда ядро h_n оператора \mathcal{J}_n , $h_n(t) = (e^{A_n t} b_n, c_n)$ имеет вид

$$h_n(t) = \sum_j \sum_{k=0}^{k_j^{(n)}-1} a_{j,k}^{(n)} t^k e^{\mu_j^{(n)} t},$$

где $a_{j,k}^{(n)}$ - некоторые коэффициенты.

Символ же φ_n оператора Γ_n (точнее, один из возможных символов, равный $\sqrt{2\pi} \mathcal{F}h$) имеет вид

$$\varphi_n(z) = \sum_j \sum_{k=1}^{k_j^{(n)}} \frac{c_{j,k}^{(n)}}{(z - \lambda_j^{(n)})^k},$$

здесь $\lambda_j^{(n)} = -i\mu_j^{(n)}$, а $c_{j,k}^{(n)}$ - некоторые коэффициенты. Отметим, что так как система $\{A_n, B_n, C_n\}$ сбалансированная, а значит, и минимальная, то

$$\sum_j k_j^{(n)} = \text{rank } A_n = \text{rank } \Gamma_n$$

(это следует, например, из того, что $\mathcal{J}_n = V_o V_c^*$ и $\text{rank } V_o = \text{rank } V_c = \dim H$, см. § 2), и, значит, согласно теореме Кронекера 1.1,

$$c_{j,k}^{(n)} \neq 0 \quad \forall j.$$

Поэтому соответствующее произведение Бляшке $B_n, K_{B_n} = (\text{Ker } \Gamma_n)^\perp$ имеет вид

$$B_n(z) = \prod_j \left(\frac{z - \lambda_j^{(n)}}{z - \bar{\lambda}_j^{(n)}} \right)^{k_j^{(n)}}$$

и соответствующая емкость равна

$$\text{Cap } B_n = \sum_j \frac{\text{Im} \lambda_j^{(n)}}{1 + |\lambda_j^{(n)}|^2} k_j^{(n)} = - \sum_j \frac{\text{Re} \mu_j^{(n)}}{1 + |\mu_j^{(n)}|^2} k_j^{(n)}.$$

Так как все операторы A_n равномерно ограничены некоторой константой C , то $|\mu_j^{(n)}| \leq C$, и поэтому

$$- \frac{1}{C^2+1} \text{trace } A_n \leq \text{Cap } B_n \leq - \text{trace } A_n.$$

Чтобы доказать теорему, осталось заметить, что

$$\text{trace } A_n = - \int \frac{1}{2s} d\mu_n(s)$$

и что $\int \frac{1}{s} d\mu_n(s) \rightarrow \int \frac{1}{s} d\mu(s)$ при $n \rightarrow \infty$. •

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] H r u s c e v S.V., P e l l e r V.V. Moduli of Hankel operators, past and future //Linear and complex analysis problem book. 199 Research Problems: Lect. Notes Math. 1984. Vol.1043. P.92-97.
- [2] P o w e r S.C. Hankel operators on Hilbert spaces. Research Notes Math. Vol. 64. Pitman Advanced Publishing program, 1982.
- [3] N i k o l ' s k i i N.K. Treatise on the shift operator. Springer, 1985.
- [4] П е л л е р В.В., Х р у щ е в С.В. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат. наук. 1982. Т.37, N 1. С. 53-124.
- [5] Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
- [6] D e v i n a t z A. On Wiener-Hopf operators // Functional analysis: Proc.Conf., Irvine, Calif., 1966. London etc.: Acad.Press, 1967. P.81-118.
- [7] H r u s c e v S.V., N i k o l ' s k i i N.K., P a v l o v B.S. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels // Lect. Notes Math. 1981. Vol. 864. P. 214-335.
- [8] Т р е и л ь С.Р. Модули операторов Ганкеля и задача В.В.Пеллера - С.В.Хрущева // ДАН СССР. 1985. Т. 283, N 5.
- [9] Т р е и л ь С.Р. Модули ганкелевых операторов и задача В.В.Пеллера - С.В.Хрущева // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1985. Т. 141. С. 56-71.
- [10] В а с ю н и н В.И., Т р е и л ь С.Р. Обратная спектральная задача для модуля ганкелева оператора. Препринт ЛОМИ Р-8-85. Л., 1985.
- [11] В а с ю н и н В.И., Т р е и л ь С.Р. Обратная спектральная задача для модуля Ганкелева оператора // Алгебра и анализ. 1989. Т.1, N 4. С. 54-66.
- [12] O b e r R.J. A Note on a System Theoretic Approach to a Conjecture by Peller-Khrushchev //Syst.Cont. Letters. 1987. Vol. 8. P. 303-306.
- [13] O b e r R.J. A Note on a System Theoretic Approach to a conjecture by Peller-Khrushchev. Preprint. Cambridge, 1988.
- [14] M o o r e B.C. Principal component analysis in linear systems // IEEE Trans. Aut. Control. 1981. Vol. 25. P.17-32.
- [15] O b e r R.J. Balanced realizations. Canonical form, parametrization, model reduction // Int. J.Control. 1987. Vol.46, N 2. P.643-670.
- [16] A r e n d t W., B a t t y C.J.K. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups // Trans.Amer.Math.Soc. 1988. Vol.306, N 2. P.837-852.
- [17] С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Ф о й а ш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Пер. с франц. М.: Мир, 1970.