З. А. Кусраева, О продолжении полилинейных операторов и однородных полиномов в векторных решетках,
*Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 5, 1023–1031

*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5*

*УДК 517.98*

# О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

**З. А. Кусраева**

**Аннотация.** Установлено существование одновременного продолжения с мажорирующей подрешетки в классах регулярных полилинейных операторов и регулярных однородных полиномов, действующих в векторных решетках. Под одновременным продолжением с подрешетки понимается правый обратный к линейному положительному оператору ограничения на эту подрешетку, который является порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом. Обобщаются аналогичные факты, полученные ранее для ортогонально аддитивных полиномов и ортосимметричных полилинейных операторов. Доказательства опираются на линеаризацию посредством тензорного произведения Фремлина и существование правого обратного к порядково непрерывному оператору со свойством Магарам.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.510

**Ключевые слова:** векторная решетка, мажорирующая подрешетка, однородный полином, полилинейный оператор, ортогональная аддитивность, ортосимметричность, одновременное продолжение, оператор ограничения, тензорное произведение.

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена проблеме существования одновременного продолжения в классах регулярных полилинейных операторов и регулярных однородных полиномов, действующих в векторных решетках. Всюду ниже $E, E_1, \dots, E_n$ и $F$ — архимедовы векторные решетки.

Используются обозначения и терминология из [1–3]. В частности, *однородным полиномом степени* $n$ (или $n$-*однородным полиномом*) называется отображение $P : E \to F$, для которого существует $n$-линейный оператор $\varphi : E^n \to F$ такой, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$ $(x \in E)$. При этом полилинейный оператор $\varphi$ называется *порождающим* для $P$. Для каждого однородного полинома существует единственный порождающий симметричный полилинейный оператор $\check{P}$, называемый *ассоциированным*.

Напомним также, что $n$-линейный оператор $T : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ называют *положительным* и пишут $T \geq 0$, если $T(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ для всех $0 \leq x_k \in E_k$ $(k = 1, \dots, n)$; $n$-однородный полином $P : E \to F$ называют *положительным* (и обозначают $P \geq 0$), если положительным является ассоциированный с ним $n$-линейный оператор $\check{P} : E^n \to F$. Полилинейный оператор $T$ (полином $P$)

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00097, https://rscf.ru/project/22-71-00097/.

именуют *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных $n$-линейных операторов ($n$-однородных полиномов). Пространства регулярных $n$-линейных операторов из $E_1\times\dots\times E_n$ в $F$ и регулярных $n$-однородных полиномов из $E$ в $F$ обозначают символами $\mathscr{L}^r(E_1,\dots,E_n;F)$ и $\mathscr{P}^r({}^nE,F)$ соответственно. Если решетка $F$ порядково полна, то $\mathscr{L}^r(E_1,\dots,E_n;F)$ и $\mathscr{P}^r({}^nE,F)$ — порядково полные векторные решетки. При этом $\mathscr{P}^r({}^1E,F)$ — пространство линейных регулярных операторов, обозначаемое через $\mathscr{L}^r(E,F)$.

Предположим, что $F$ — порядково полная векторная решетка, $G$ — *мажорирующая подрешетка* в $E$, т. е. $G$ — векторная подрешетка и для произвольного $x\in E$ существует $g\in G$ со свойством $x\leq g$. Обозначим символом $\mathscr{R}$ отображение из $\mathscr{P}^r({}^nG,F)$ в $\mathscr{P}^r({}^nE,F)$, ставящее в соответствие полиному $P\in\mathscr{P}^r({}^nE,F)$ его ограничение $P|_G$ на $G$. В [4, следствие 22] для однородных положительных полиномов, действующих в векторных решетках, установлен вариант теоремы Канторовича о продолжении линейных положительных операторов: если $0\leq P_0\in\mathscr{P}^r({}^nG,F)$, то существует такой полином $0\leq P\in\mathscr{P}^r({}^nE,F)$, что $P|_G=P_0$. Привлекая аксиому выбора и разложение $P=P^+-P^-$, отсюда без труда можно вывести существование (нелинейного) правого обратного к оператору $\mathscr{R}$, т. е. такого отображения $\mathscr{E}:\mathscr{P}^r({}^nG,F)\to\mathscr{P}^r({}^nE,F)$, что $\mathscr{R}\circ\mathscr{E}$ — тождественный оператор на $\mathscr{P}({}^nG,F)$ или, другим словами, $\mathscr{E}(P_0)|_G=P_0$ для всех $P_0\in\mathscr{P}({}^nG,F)$.

Пусть теперь $G_k$ — мажорирующая подрешетка векторной решетки $E_k$ ($k=1,\dots,n$), $F$ — по-прежнему порядково полная векторная решетка. Имеет место аналог упомянутой теоремы Канторовича для $n$-линейных положительных операторов: положительный полилинейный оператор $S_0\in\mathscr{L}^r(G_1,\dots,G_n;F)$, мажорируемый положительным полилинейным оператором $T\in\mathscr{L}^r(E_1,\dots,E_n;F)$, допускает продолжение до $n$-линейного оператора на все $E_1\times\dots\times E_n$ с сохранением положительности и мажорируемости (см. [4, теорема 20]). По аналогичным соображениям существует (нелинейное) отображение $\mathscr{E}$ из $\mathscr{L}^r(G_1,\dots,G_n;F)$ в $\mathscr{L}^r(E_1,\dots,E_n;F)$, являющееся правым обратным для оператора ограничения $\mathscr{R}:T\mapsto T|_{G_1\times\dots\times G_n}$.

Если отображение $\mathscr{E}$ линейно, то его называют *оператором продолжения* или *одновременным продолжением* с $G$ на $E$ или с $G_1\times\dots\times G_n$ на $E_1\times\dots\times E_n$.

С использованием понятия степени векторной решетки из [5] в [6, теорема 4] доказано существование одновременного продолжения регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов с мажорирующей подрешетки. Ранее для регулярных билинейных операторов существование одновременного продолжения с декартова произведения мажорирующих подрешеток установлено в [7, теорема 3]; аналогичный результат для регулярных билинейных ортосимметричных операторов получен в [8, теорема 4.3]. Банаховы аспекты одновременного продолжения однородных полиномов см. в обзоре [9].

Цель заметки — показать, что упомянутые результаты об одновременном продолжении можно распространить на произвольные регулярные $n$-линейные операторы и регулярные однородные полиномы, действующие в векторных решетках, если вместо линеаризации с помощью степени привлечь линеаризацию посредством тензорного произведения Фремлина (см. [10, 11]).

## 2. Формулировка основных результатов

Перечисленные ниже результаты утверждают существование одновременного продолжения регулярных полилинейных и полиномиальных операторов, действующих из мажорирующей подрешетки векторной решетки в порядково полную векторную решетку.

**Теорема А.** *Пусть $E_1, \dots, E_n, G_1, \dots, G_n, F$ — векторные решетки, причем $G_k$ — мажорирующая подрешетка в $E_k$ $(k = 1, \dots, n)$, а $F$ порядково полна. Тогда существует одновременное продолжение $n$-линейных операторов $\mathscr{E}$, являющееся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом из $\mathscr{L}^r(G_1, \dots, G_n; F)$ в $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$.*

Если в теореме А положить $n = 1$, то приходим к следующему известному результату для линейных регулярных операторов из [7].

**Следствие 1.** *Если $G$ — мажорирующая подрешетка векторной решетки $E$, а $F$ — порядково полная векторная решетка, то существует одновременное продолжение $\mathscr{E} : \mathscr{L}^r(G, F) \to \mathscr{L}^r(E, F)$ регулярных линейных операторов, являющееся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом.*

Напомним, что $n$-линейный оператор $T : E \times \ldots \times E \to F$ называют *симметричным,* если для любой перестановки $\sigma$ множества индексов $\{1, \dots, n\}$ и для всех $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ выполняется $T(x_1, \dots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, и *ортосимметричным,* если $T(x_1, \dots, x_n) = 0$ всякий раз, когда $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ для какой-нибудь пары индексов $1 \leq i, j \leq n$. Пусть $\mathscr{L}^r_s(^nE; F)$ и $\mathscr{L}^r_o(^nE; F)$ обозначают части $\mathscr{L}^r(E^n; F)$, состоящие из симметричных и ортосимметричных полилинейных операторов соответственно.

В [5, теоремы 3.2 и 3.3] установлено, что существует единственная с точностью до решеточного изоморфизма пара $(E^{n\odot}, \odot_n)$, где $E^{n\odot}$ — архимедова векторная решетка, а $\odot_n : E^n \to E^{n\odot}$ — ортосимметричный $n$-линейный оператор, которая обладает следующим универсальным свойством: для любого ортосимметричного $n$-линейного оператора $T \in \mathscr{L}^r_o(^nE; F)$ существует единственный линейный оператор $T^\odot \in \mathscr{L}^r(E^{n\odot}, F)$ такой, что $T = T^\odot \odot_n$. Более того, отображение $T \mapsto T^\odot$ служит решеточным изоморфизмом из $\mathscr{L}^r_o(^nE, F)$ на $\mathscr{L}^r(E^{n\odot}, F)$. Из этих фактов выводится следующий результат, в случае билинейных операторов $(n = 2)$ установленный в [8, теорема 3.4].

**Следствие 2.** *Пусть $G$ — мажорирующая подрешетка в $E$, а $F$ — порядково полная векторная решетка. Тогда существует одновременное продолжение регулярных ортосимметричных $n$-линейных операторов $\mathscr{E} : \mathscr{L}^r_o(^nG; F) \to \mathscr{L}^r_o(^nE; F)$, являющееся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом.*

Полином $P \in \mathscr{P}^r(^nE, F)$ называют *ортогонально аддитивным,* если для любой пары дизъюнктных элементов $x, y \in E$ выполняется $P(x + y) = P(x) + P(y)$. Обозначим символом $\mathscr{P}^r_{oa}(^nE, F)$ часть $\mathscr{P}^r(^nE, F)$, состоящую из ортогонально аддитивных полиномов. Если векторная решетка $F$ порядково полна, то $\mathscr{P}^r(^nE, F)$ и $\mathscr{P}^r_{oa}(^nE, F)$ также порядково полные векторные решетки (см., например, [6, лемма 3]). Известно также, что положительный полином $P \in \mathscr{P}^r(^nE, F)$ ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда ассоциированный с ним $n$-линейный оператор $\check{P} : E^n \to F$ ортосимметричен (см. [2, лемма 5.1]).

**Теорема Б.** *Для любой тройки $(E, F, G)$, где $G$ — мажорирующая подрешетка векторной решетки $E$, а $F$ — порядково полная векторная решетка, существует одновременное продолжение регулярных $n$-однородных полиномов, являющееся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом $\mathscr{E}$ из $\mathscr{P}^r(^nG, F)$ в $\mathscr{P}^r(^nE, F)$. Более того, $\mathscr{E}$ сохраняет свойство ортогональной аддитивности, т. е. $\mathscr{E}(\mathscr{P}^r_{oa}(^nG, F)) \subset \mathscr{P}^r_{oa}(^nE, F)$.*

Замечание 1. В теореме А нельзя гарантировать, что $\mathscr{E}$ сохраняет симметричность, т. е. что $\mathscr{E}\big(\mathscr{L}_s^r(^nG,F)\big) \subset \mathscr{L}_s^r(^nE,F)$ (см. пример 1 ниже). Тем не менее, как следует из теоремы Б, в классе регулярных симметричных $n$-линейных операторов одновременное продолжение существует, так как векторные решетки $\mathscr{L}_s^r(^nE,F)$ и $\mathscr{P}^r(^nE,F)$ решеточно изоморфны.

Укажем еще два результата, вытекающие непосредственно из теоремы Б.

**Следствие 3.** *Пусть $G$ — мажорирующая подрешетка в $E$, а $F$ — порядково полная векторная решетка. Тогда существует одновременное продолжение $\mathscr{E} : \mathscr{L}_s^r(^nG,F) \to \mathscr{L}_s^r(^nE,F)$ регулярных $n$-линейных симметричных операторов, являющееся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом.*

**Следствие 4.** *Пусть $G$ — мажорирующая подрешетка в $E$, а $F$ — порядково полная векторная решетка. Тогда существует одновременное продолжение $n$-однородных ортогонально аддитивных полиномов $\mathscr{E} : \mathscr{P}_{oa}^r(^sG,F) \to \mathscr{P}_{oa}^r(^sE,F)$, являющееся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом.*

Этот результат получен в [6, теорема 4].

## 3. Фремлиновское тензорное произведение

Рассмотрим (архимедовы) векторные решетки $E_1,\dots,E_n$. $n$-Линейный оператор $T$ из $E_1\times\dots\times E_n$ в $F$ называют *решеточным $n$-морфизмом*, если линейный оператор $x\mapsto T(x_1,\dots,x_{j-1},x,x_{j+1},\dots,x_n)$ является решеточным гомоморфизмом при любом выборе $1\le j\le n$ и $x_k\in E_k$, $j\ne k\le n$ ($x_{-1}$ и $x_{n+1}$ опускаются).

*Тензорным произведением по Фремлину* или *фремлиновским тензорным произведением* векторных решеток $E_1,\dots,E_n$ называют пару $(E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n,\phi)$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n$ — архимедова векторная решетка;

(2) $\phi : E_1\times\ldots\times E_n \to E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n$ — решеточный $n$-морфизм;

(3) для любой векторной решетки $G$ и любого решеточного $n$-морфизма $\psi$ из $E_1\times\ldots\times E_n$ в $G$ существует единственный решеточный гомоморфизм $T : E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n\to G$, для которого $T\circ\phi=\psi$.

**Теорема 1.** *Для любых векторных решеток $E_1,\dots,E_n$ существует тензорное произведение $(E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n,\phi)$, единственное с точностью до решеточного изоморфизма. Если $G_k$ — векторная подрешетка $E_k$ $(k=1,\dots,n)$, то $G_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}G_n$ можно отождествить с векторной подрешеткой $E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n$.*

Решеточный $n$-морфизм $\phi$ принято обозначать символом $\otimes$; используется также обозначение $\overline{\bigotimes_{k=1}^{n}} E_k := E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n$. Теорема 1 установлена в [10, 11]. В этих же работах можно найти следующее универсальное свойство продолжения.

**Теорема 2.** *Пусть $E_1,\dots,E_n$ и $F$ — векторные решетки, причем $F$ порядково полна. Отображение $T\mapsto T\otimes$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм между векторными решетками $\mathscr{L}^r(E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n,F)$ и $\mathscr{L}^r(E_1,\dots,E_n;F)$.*

В частности, для каждого регулярного $n$-линейного оператора $B$ из $E_1\times\ldots\times E_n$ в $F$ существует единственный линейный регулярный оператор $T : E_1\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}E_n\to F$ такой, что $B=T\otimes$.

Приведем несколько вспомогательных утверждений, непосредственно вытекающих из теорем 1 и 2.

**Лемма 1.** *Пусть $G_k$ — мажорирующая подрешетка векторной решетки $E_k$ $(k = 1, \dots, n)$, $F$ — порядково полная векторная решетка и $A : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ — положительный $n$-линейный оператор. Предположим, что $n$-линейный оператор $B_0 : G_1 \times \dots \times G_n \to F$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq B_0(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$ для всех $x_k \in G_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Тогда $B_0$ можно продолжить до $n$-линейного оператора $B : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ такого, что $0 \leq B \leq A$. Если, сверх сказанного, $A$ и $B_0$ симметричны, то $B$ также можно выбрать симметричным.*

Доказательство. Этот результат получен в [12, теорема 3.4, следствие 3.5] (см. также [4, теорема 16, следствие 17]). Здесь приведем другое доказательство, основанное на теоремах 1 и 2. В силу свойств фремлиновского тензорного произведения $\overline{\bigotimes}_{k=1}^{n} G_k$ служит векторной подрешеткой решетки $\overline{\bigotimes}_{k=1}^{n} E_k$ (см. [10, следствие 4.5]). По теореме 2 существуют операторы $S_0 \in \mathscr{L}^r\left(\overline{\bigotimes}_{k=1}^{n} G_k, F\right)$ и $T \in \mathscr{L}^r\left(\overline{\bigotimes}_{k=1}^{n} E_k, F\right)$ такие, что $B_0 = S_0 \circ \otimes$, $A = T \circ \otimes$ и $S_0 u \leq T u$ для всех $u \in \overline{\bigotimes}_{k=1}^{n} G_k$. В силу теоремы о продолжении линейных положительных операторов [1, теорема 1.26] оператор $S_0$ допускает продолжение до линейного положительного оператора $S$ из $\overline{\bigotimes}_{k=1}^{n} E_k$ в $F$ такого, что $0 \leq S \leq T$. Как видно, $B := S \circ \otimes$ — искомый $n$-линейный оператор.

Если $A$ и $B_0$ симметричны и $B$ — существующее по уже доказанному выше положительное $n$-линейное продолжение $B_0$ на $E_1 \times \dots \times E_n$ такое, что $0 \leq B \leq A$, то симметризация $B_s$ оператора $B$ удовлетворяет требуемым условиям: $B_s$ симметричен, продолжает $B_0$ и $0 \leq B_s \leq A$. □

**Лемма 2.** *Пусть $G_k$ — мажорирующая подрешетка векторной решетки $E_k$ $(k = 1, \dots, n)$, $F$ — порядково полная векторная решетка и $B_0 : G_1 \times \dots \times G_n \to F$ — положительный $n$-линейный оператор. Тогда $B_0$ допускает $n$-линейное положительное продолжение $B : E_1 \times \dots \times E_n \to F$. Если при этом оператор $B_0$ симметричен, то и продолжение $B$ можно выбрать симметричным.*

Доказательство. Работают те же соображения, что и выше, но вместо теоремы о мажорированном продолжении [1, теорема 1.26] нужно применить теорему Канторовича о продолжении положительного оператора [1, теорема 1.32]. □

Замечание 2. Лемма 2 верна и в том случае, когда $G_k$ — мажорирующее подпространство векторной решетки $E_k$ (см. [12, теорема 3.15, следствие 3.16] и [4, теорема 20, следствие 21]). Однако такая общность нам не потребуется.

Пример 1. Покажем, что во втором утверждении леммы 1 нельзя, вообще говоря, опустить предположение о симметричности оператора $A$. Пусть $E := C([0, 1])$ — векторная решетка непрерывных функций на единичном отрезке и возьмем пару чисел $r, t \in [0, 1]$, $r \neq t$. Подрешетку $G \subset C([0, 1])$ определим формулой $G := \{x \in C([0, 1]) : x(r) = x(t)\}$. Рассмотрим положительную билинейную форму $A : E \times E \to \mathbb{R}$, где $A(x, y) := x(r)y(t)$ для всех $x, y \in E$. Если $B_0$ обозначает ограничение $A$ на подрешетку $G \times G$, то $B_0$ — симметричная форма. Предположим, что $B_0$ допускает симметричное продолжение $B$ на все $E \times E$ такое, что $0 \leq B \leq A$. Учитывая, что $E \mathbin{\bar{\otimes}} E$ равномерно плотна в $C([0, 1] \times [0, 1])$, из теоремы 2 получаем существование линейного ограниченного функционала

$f : C([0,1]\times[0,1]) \to \mathbb{R}$ такого, что $B(x,y) = f(x\otimes y)$ для всех $x,y \in E$, причем $0 \le f \le \varepsilon_{(r,t)}$, где $\varepsilon_{(r,t)}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $(r,t) \in [0,1]^2$. Но тогда в силу известной характеризации решеточных гомоморфизмов, установленной С. С. Кутателадзе (см. [1, теорема 2.50]), должно быть $f = \lambda\varepsilon_{(r,t)}$ для некоторого $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, следовательно, $B(x,y) = f(x\otimes y) = \lambda\varepsilon_{(r,t)}(x\otimes y) = \lambda x(r)y(t)$, а это противоречит симметричности $B$.

Учитывая, что между пространством регулярных $n$-однородных полиномов $\mathscr{P}^r({}^nE,F)$ и пространством регулярных симметричных линейных операторов $\mathscr{L}_s^r(E^n,F)$ имеется сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие, получаем

**Следствие 5.** *Пусть $E$, $F$ и $G$ — векторные решетки, причем $F$ порядково полна, а $G$ является подрешеткой $E$. Если положительные $n$-однородные полиномы $0 \le P_0 \in \mathscr{P}^r({}^nG,F)$ и $0 \le Q \in \mathscr{P}^r({}^nE,F)$ таковы, что $P_0 \le Q|_G$, то существует продолжение $P_0$ до $n$-однородного регулярного полинома $P \in \mathscr{P}^r({}^nE,F)$ такого, что $0 \le P \le Q$.*

Доказательство. Этот результат получен в [4, следствие 3.6]. □

**Следствие 6.** *Пусть $G$ — мажорирующее подпространство векторной решетки $E$ и $F$ — порядково полная векторная решетка. Положительный $n$-однородный полином $P_0 \in \mathscr{P}^r({}^nG,F)$ допускает продолжение до положительного $n$-однородного полинома $P \in \mathscr{P}^r({}^nE,F)$.*

## 4. Доказательство основных теорем

Доказательство опирается на тот факт, что при определенных условиях оператор ограничения $\mathscr{R}$ порядково непрерывен и сохраняет интервалы, а такой оператор имеет правый обратный оператор. Доказательство разобьем на ряд вспомогательных фактов.

Говорят, что линейный оператор $T : E \to F$ *сохраняет интервалы*, или *обладает свойством Магарам,* если $T([0,x]) = [0,Tx]$, т. е. для любых $x \in E_+$ и $0 \le f \le Tx \in F_+$ существует $0 \le e \le x$ такой, что $f = Te$. Скажем, что оператор $T$ *обладает свойством Леви*, если $T(E)^{\perp\perp} = F$ и для произвольной возрастающей сети $(x_\alpha)$ в $E_+$ порядковая ограниченность сети $(Tx_\alpha)$ в $F$ влечет существование $\sup_\alpha x_\alpha$.

**Лемма 3** (теорема о существовании правого обратного). *Пусть $E$ и $F$ — порядково полные векторные решетки, а $R : E \to F$ — положительный порядково непрерывный оператор. Если $R$ обладает свойствами Леви и Магарам, то существует порядково непрерывный решеточный гомоморфизм $S : F \to E$ такой, что $R \circ S = I_F$.*

Доказательство см. в [13, теорема 3.4.10]. □

**Лемма 4.** *Если оператор $T_0$ из $(E_1)_+ \times \ldots \times (E_n)_+$ в $G_+$ аддитивен и положительно однороден по каждому из аргументов, то существует и притом единственный положительный полилинейный оператор $T : E_1 \times \dots \times E_n \to G$, продолжающий $T_0$.*

При этом для $x_k \in E_k$ $(k = 1,\ldots,n)$ из формулы $x_k := x_k^+ - x_k^-$ следует, что значение $T(x_1,\ldots,x_n)$ допускает представление

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \sum_\sigma (-1)^{c(\sigma)} T_0\big(x_1^{\sigma(1)},\ldots,x_n^{\sigma(n)}\big),$$

где сумма берется по всем функциям $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{+, -\}$ и $c(\sigma)$ обозначает число элементов в прообразе $\sigma^{-1}(-)$.

Доказательство см. в [12, теорема 2.3]. $\square$

**Лемма 5.** *Оператор ограничения $\mathscr{R} : T \mapsto T|_{G_1\times\dots\times G_n}$, действующий из $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$ в $\mathscr{L}^r(G_1, \dots, G_n; F)$, линеен, строго положителен и порядково непрерывен. Более того, $\mathscr{R}$ обладает свойством Леви и свойством Магарам.*

Доказательство. Линейность и положительность оператора $\mathscr{R}$ очевидны. Допустим, что $0 \le T \in \mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$ и $T|_{G_1\times\dots\times G_n} = 0$. Для произвольных $x_k \in E_k$ подберем такие $g'_k, g''_k \in G_k$, что $-g'_k \le x_k \le g''_k$. Тогда в силу положительности $T$ имеем $|T(x_1, \dots, x_n)| \le T(g'_1, \dots, g'_n) \vee T(g''_1, \dots, g''_n) = 0$, следовательно, $T(x_1, \dots, x_n) = 0$. Отсюда видно, что оператор $\mathscr{R}$ строго положителен.

Если убывающая сеть положительных операторов $(T_\alpha)$ порядково сходится к нулю в $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$, то сеть $(T_\alpha(x_1, \dots, x_n))$ также убывает и порядково сходится к нулю для любых $0 \le x_k \in E_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Но тогда то же верно и при замене $x_k$ на $0 \le g_k \in G_k$ $(k = 1, \dots, n)$, значит, сеть $(\mathscr{R}(T_\alpha)(g_1, \dots, g_n))$ также порядково сходится к нулю, что и показывает порядковую непрерывность оператора $\mathscr{R}$.

Тот факт, что оператор $\mathscr{R}$ обладает свойством Магарам, следует непосредственно из леммы 1. Остается проверить свойство Леви. Заметим, что оператор $\mathscr{R}$ сюръективен в силу леммы 2. Предположим, что сеть $(T_\alpha)$ возрастает в $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$, а сеть $\mathscr{R}(T_\alpha)$ ограничена оператором $T_0$ в $\mathscr{L}^r(G_1, \dots, G_n; F)$. Для $0 \le x_k \in E_k$ подберем $g_k \in G_k$ так, что $x_k \le g_k$. Тогда для любого индекса $\alpha$ выполняются неравенства $T_\alpha(x_1, \dots, x_n) \le \mathscr{R}(T_\alpha)(g_1, \dots, g_n) \le T_0(g_1, \dots, g_n)$, следовательно, существует $T(x_1, \dots, x_n) := \sup_\alpha T_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ в $F$. Легко проверяется, что оператор $T : (E_1 \times \dots \times E_n)_+ \to F_+$ аддитивен и положительно однороден, стало быть, допускает единственное продолжение до положительного $n$-линейного оператора на всем $E_1 \times \ldots \times E_n$ по лемме 4. Обозначив это продолжение той же буквой $T$, видим, что $T = \sup_\alpha T_\alpha$ выполняется в $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$, что и требовалось. $\square$

**Лемма 6.** *Оператор ограничения $\mathscr{R} : T \mapsto T|_{G_1\times\dots\times G_n}$, действующий из $\mathscr{L}^r_s(E^n; F)$ в $\mathscr{L}^r_s(G^n; F)$, линеен, строго положителен и порядково непрерывен. Более того, $\mathscr{R}$ обладает свойством Леви и свойством Магарам.*

Доказательство повторяет те же рассуждения, что и выше. $\square$

**Лемма 7.** *Если $E$ и $F$ — векторные решетки, причем $F$ порядково полна, то $\mathscr{L}^r_o({}^nE; F)$ является полосой порядково полной векторной решетки $\mathscr{L}^r_s({}^nE; F)$, а $\mathscr{P}^r_{oa}({}^nE, F)$ — полосой порядково полной векторной решетки $\mathscr{P}^r({}^nE, F)$.*

Доказательство. Сначала заметим, что если $T \in \mathscr{L}^r_o({}^nE; F)$, то верно также $|T| \in \mathscr{L}^r_o({}^nE; F)$. В самом деле, если $x_1, \dots, x_n \in E_+$, то $|T|(x_1, \dots, x_n)$ совпадает с точной верхней границей направленного вверх семейства

$$\Big\{ \sum_{i_1,\dots,i_n} |T(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n})| : \ (u_{k,i_k})_{i_k=1}^{m_k} \in \Pi(x_k),\ 1 \le k \le n,\ m_k \in \mathbb{N} \Big\},$$

где $\Pi(x_k)$ состоит из таких векторов $(u_{k,1}, \dots, u_{k,m_k})$, что $x_k = u_{k,1} + \dots + u_{k,m_k}$ и $u_{k,i_k} \in E_+$ для всех $1 \le k \le n$ и $1 \le i_k \le m_k$. Если $x_i \wedge x_j = 0$, то $u_{i,l} \wedge u_{j,l'} = 0$ для всех $1 \le l, l' \le n$. Отсюда видно, что $T(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) = 0$ в силу ортосимметричности оператора $T$, поэтому $|T|(x_1, \dots, x_n) = 0$. Возьмем $S \in \mathscr{L}^r_s({}^nE, F)$, $T \in \mathscr{L}^r_o({}^nE, F)$ и допустим, что $|S| \le |T|$. Если $x_i \wedge x_j = 0$, то $|T|(x_1, \dots, x_n) = 0$ в силу уже доказанного, поэтому $|S|(x_1,\dots,x_n)=0$. Тем самым $\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$ является порядковым идеалом в $\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, убеждают в том, что $\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$ содержит супремумы направленных вверх семейств. Таким образом, $\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$ — полоса в $\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)$.

Второе утверждение вытекает из первого ввиду следующих замечаний. Из определения однородного полинома следует непосредственно, что пространства $\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)$ и $\mathscr{P}^r({}^nE,F)$ изоморфны как упорядоченные векторные пространства. Известно также, что положительный полином $P\in\mathscr{P}^r({}^nE,F)$ ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда ассоциированный с ним $n$-линейный оператор $\check{P}:E^n\to F$ ортосимметричен (см. [2, лемма 5.1]). Следовательно, $\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$ и $\mathscr{P}_{oa}^r({}^nE,F)$ также решеточно изоморфны. $\square$

**Лемма 8.** *Если $T\in\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)$ и $\mathscr{R}(T)\perp\mathscr{L}_o^r({}^nG;F)$, то $T\perp\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$.*

Доказательство. Заметим, что ограничение ортосимметричного оператора ортосимметрично, т. е. $\mathscr{R}\big(\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)\big)\subset\mathscr{L}_o^r({}^nG;F)$. Если бы требуемое утверждение было ложно, то для некоторых $0\le T\in\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)$ и $S\in\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$ было бы $\mathscr{R}(T)\perp\mathscr{L}_o^r({}^nG;F)$ и $0<S\le T$. Следовательно, с учетом строгой положительности оператора ограничения $\mathscr{R}$ пришли бы к противоречивым соотношениям $0<\mathscr{R}(S)\le\mathscr{R}(T)$ и $\mathscr{R}(S)\perp\mathscr{R}(T)$, так как $\mathscr{R}(S)\in\mathscr{L}_o^r({}^nG;F)$. $\square$

Доказательство теорем А и Б. Теорема А следует непосредственно из лемм 3 и 5: нужно в лемме 3 взять $R:=\mathscr{R}$ и заметить, что правый обратный к оператору ограничения $\mathscr{R}$ является искомым оператором одновременного продолжения; применимость леммы 3 обеспечивается леммой 5. Первая часть теоремы Б равносильна следствию 3 ввиду решеточного изоморфизма $\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)\simeq\mathscr{P}^r({}^nE,F)$, а следствие 3, в свою очередь, вытекает непосредственно из лемм 3 и 6. Остается показать, что одновременное продолжение сохраняет ортогональную аддитивности полиномов. Пусть $\mathscr{E}_s$ (соответственно $\mathscr{E}_o$) — одновременное продолжение в классе регулярных симметричных (соответственно ортосимметричных) $n$-линейных операторов, существующее в силу уже доказанной первой части теоремы Б (соответственно следствия 2). Возьмем порядковый проектор $\pi$ в $\mathscr{L}_s^r({}^nG;F)$ на полосу $\mathscr{L}_o^r({}^nG;F)$, существование которого гарантировано леммой 7. Определим оператор $\mathscr{E}:\mathscr{L}_s^r({}^nG;F)\to\mathscr{L}_s^r({}^nE;F)$ формулой $\mathscr{E}(T):=\mathscr{E}_o(\pi T)+\mathscr{E}_s(\pi' T)$, где $\pi'$ — порядковый проектор, дополнительный к $\pi$. Тогда $\mathscr{E}$ — искомый оператор продолжения. Действительно, если $T\in\mathscr{L}_o^r({}^nG;F)$, то $\pi T=T$ и $\pi' T=0$, поэтому $\mathscr{E}(\pi T)=\mathscr{E}_o(\pi^2T)+\mathscr{E}_s(\pi\pi' T)=\mathscr{E}_o(\pi T)\in\mathscr{L}_o^r({}^nE;F)$. Далее,

$$\mathscr{E}(T)|_G=\mathscr{E}_o(\pi T)|_G+\mathscr{E}_s(\pi' T)|_G=\pi T+\pi' T=T,$$

т. е. $\mathscr{E}(T)$ продолжает $T$. Учитывая, что по лемме 8 $\mathscr{E}_o(\pi T)\perp\epsilon_s(\pi' T)$, выводим

$$|\mathscr{E}(T)|=|\mathscr{E}_o(\pi T)|+|\mathscr{E}_s(\pi' T)|=\mathscr{E}_o(\pi|T|)+\mathscr{E}_s(\pi'|T|)=\mathscr{E}(|T|),$$

значит, $\mathscr{E}$ сохраняет модуль. Остальные свойства $\mathscr{E}$ очевидны. $\square$

Замечание 3. В том случае, когда $E$ и $F$ — банаховы решетки, а пространства операторов (полиномов) рассматриваются с регулярной нормой, оператор продолжения с мажорирующей подрешетки непрерывен, так как всякий положительный оператор (полином) в банаховых решетках автоматически непрерывен. В то же время сохраняющий норму оператор продолжения с произвольной замкнутой подрешетки — явление довольно редкое (см., например, теорему Андо об одновременном продолжении функционалов [14, гл. 6, теорема 3]). Возможность изучения подобных вопросов для операторов и полиномов связана с сочетанием описанного выше подхода с другой теоремой Андо о существовании проекций на замкнутые идеалы банаховой решетки (см. [14, гл. 1, теорема 4]).

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Acad. Press, 1985.
2. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388, N 2. P. 845–862.
3. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces. Berlin: Springer-Verl., 1999.
4. *Loane J.* Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 364, N 1. P. 71–78.
5. *Boulabier K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Commun. Algebra. 2006. V. 34, N 4. P. 1435–1442.
6. *Кусраева З. А.* Об одновременном продолжении регулярных однородных ортогонально аддитивных полиномов // Владикавк. мат. журн. 2011. Т. 13, № 4. С. 28–34.
7. *Кусраев А. Г.* Об одном свойстве базы $K$-пространства регулярных операторов и некоторых его приложениях. Препринт / Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1977. 17 с.
8. *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavk. Math. J. 2007. V. 9, N 1. P. 16–29.
9. *Zalduendo I.* Extending polynomials on Banach spaces – A survey // Rev. Unión Matemática Argentina. 2005. V. 46, N 2. P. 45–72.
10. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math. 1972. V. 94. P. 777–798.
11. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators. Berlin etc.: Springer-Verl., 1974.
12. *Loane J.* Polynomials on Riesz spaces. Thesis. Galway: Department of Mathematics National University of Ireland, 2007.
13. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
14. *Lacey H. E.* The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1974.


*Поступила в редакцию 14 апреля 2023 г.*
*После доработки 14 июня 2023 г.*
*Принята к публикации 2 августа 2023 г.*

Кусраева Залина Анатольевна (ORCID 0000-0002-8817-1888)
Владикавказский научный центр РАН,
ул. Вильямса, 1, с. Михайловское 363110, РСО-А
zali13@mail.ru