

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

И. М. Кричевер

Основной целью настоящей работы является построение переменных типа «действия-угол» для системы частиц с парным потенциалом взаимодействия, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j), \quad (1)$$

где $\wp(x)$ — \wp -функция Вейерштрасса (см. [1]). Знак при потенциале, отвечающий притягивающей системе частиц, выбран для упрощения последующих формул, из которых исключаются тем самым многочисленные $\sqrt{-1}$. Замена этого знака происходит при переходе к мнимому времени. Развиваемые методы позволяют проинтегрировать уравнения движения системы (1) в терминах θ -функций Римана.

Известно, что уравнения движения системы (1) допускают представление типа Лакса (см. [2])

$$\dot{L} = [M, L], \quad (2)$$

где матрицы L и M зависят от x_i и p_i . Из этого представления следует, что величины $J_k = \frac{1}{k} \text{tr } L^k$, $k = 1, \dots, n$, являются интегралами системы (1). В работе [3] было доказано, что эти интегралы независимы и находятся в инволюции. Тем самым по теореме Лиувилля система (1) является вполне интегрируемой.

В работе [4] впервые была открыта замечательная связь между гамильтоновыми системами частиц на прямой и динамикой полюсов специальных решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Для уравнения Кортевега — де Фриза было доказано, что динамика полюсов эллиптического решения $u(x, t) = 2 \sum_{i=1}^N \wp(x - x_i(t))$ уравнения КдФ эквивалентна ограничению уравнений движения системы с гамильтонианом J_3 на неподвижные точки системы (1), $\text{grad } H = 0$. При этом N , оказывается, имеет вид $n(n+1)/2$. Аналогичное утверждение было получено для уравнения Буссинеска. Ограничения на число частиц связано с необходимостью рассматривать уравнения движения на стационарных многообразиях гамильтоновых систем. Связь между гамильтоновыми системами и эллиптическими решениями нелинейных уравнений оказывается естественной в случае двумерных систем. Например, в случае уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u_t + \frac{1}{4} (6uu_x - u_{xxx}) \right\}. \quad (3)$$

Эллиптические решения этого уравнения имеют вид $u = \text{const} + + 2\sum^{\circledast} (x - x_i(y, t))$. При этом динамика полюсов по переменным y и t описывается коммутирующими гамильтоновыми потоками, отвечающими H и J_3 соответственно. Это утверждение в случае вырожденной \wp -функции Вейерштрасса $-x^{-2}$ было получено в [5] (см. также [6]).

Впоследствии полюсные системы, отвечающие различным нелинейным уравнениям, исследовались многими авторами (см. обзор [7], [8]).

Связь между вполне интегрируемыми системами частиц на прямой и полюсными решениями нелинейных уравнений может использоваться в двух направлениях. Для всех вырождений функции Вейерштрасса, отвечающих одному или двум бесконечным периодам ($\wp^{\circledast}(x)$ при этом переходит в $\text{sh}^{-2}(x)$ или x^{-2} соответственно), помимо интегралов J_k известен механизм интегрирования уравнений движения. Координаты частиц $x_j(t)$ оказываются собственными значениями матрицы $x_j(0)\delta_{ij} + + L(0)t$, где $L(0)$ зависит от начальных координат и импульсов (см. [9], [10]). Подстановка этих координат в формулу $u(x, y, t) = 2 \sum_{i=1}^n (x - x_i(y, t))^{-2}$

позволяет, например, получить рациональные решения уравнения КП. С другой стороны, при наличии конструкции рациональных решений уравнения КП можно независимо получить интегрирование уравнений системы частиц с потенциалом x^{-2} . Основной целью работы [5] была как раз реализация второй возможности. В ней, используя идеи «конечнозонного интегрирования», мы нашли точные формулы для рациональных решений уравнения КП.

В отличие от рационального и тригонометрического случаев для системы (1) с невырожденной \wp -функцией Вейерштрасса ни построение переменных типа «угла», отвечающих инволютивным интегралам J_k , ни тем более явное интегрирование уравнений движения известно не было.

Исключением являются решения уравнения КдФ, представляющие собой сумму трех эллиптических функций, найденных в работе [18] без всякой связи с теорией интегрируемых систем на прямой,

$$u = 2\wp(x - x_1(t)) + 2\wp(x - x_2(t)) + 2\wp(x - x_3(t)).$$

Для двух частиц система (1) была проинтегрирована в работе [11], в которой было доказано, что многообразие уровней интегралов J_1, H является двумерным абелевым многообразием.

§ 1. Линейное нестационарное уравнение Шредингера и система частиц на окружности

Методы интегрирования уравнения КП (3) основаны на следующем коммутационном представлении (см. [12], [13]):

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0, \quad (4)$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x, y, t), \quad M = \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + w(x, y, t).$$

Ниже будет доказано, что гамильтоновы системы типа (1) связаны с наличием у линейных операторов с эллиптическими потенциалами решений определенного вида.

Напомним прежде всего основные определения и свойства классических функций Вейерштрасса (см. [1]). Пусть ω_1, ω_2 — пара периодов. Сигма-функция Вейерштрасса является целой функцией, определяемой

произведением

$$\sigma(z) = z \prod_{m, n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega_{mn}}\right) \exp \left[\frac{z}{\omega_{mn}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega_{mn}}\right)^2 \right], \quad (5)$$

где $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$. Остальные функции можно определить из соотношений

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \quad \wp(z) = -\zeta'(z). \quad (6)$$

В отличие от \wp σ - и ζ -функции Вейерштрасса не являются двоякопериодическими. Они следующим образом преобразуются при сдвигах на периоды:

$$\zeta(\alpha + \omega_l) = \zeta(\alpha) + \eta_l; \quad \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i; \quad (7)$$

$$\sigma(\alpha + \omega_l) = -\sigma(\alpha) \exp \left[\eta_l \left(\alpha + \frac{\omega_l}{2} \right) \right].$$

В окрестности $\alpha = 0$ функции Вейерштрасса имеют вид

$$\sigma(\alpha) = \alpha + O(\alpha^5); \quad \zeta(\alpha) = \alpha^{-1} + O(\alpha^3); \quad \wp(\alpha) = \alpha^{-2} + O(\alpha^2). \quad (8)$$

Т е о р е м а 1. Уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \sum_{i=1}^n \wp(x - x_i(t)) \right) \psi = 0 \quad (9)$$

имеет решение ψ вида

$$\psi = \sum_{i=1}^n a_i(t, k, \alpha) \Phi(x - x_i, \alpha) e^{kx + k^2 t}, \quad (10)$$

где

$$-\Phi(x, \alpha) = \frac{\sigma(x - \alpha)}{\sigma(\alpha)\sigma(x)} e^{\zeta(\alpha)x}, \quad (11)$$

тогда и только тогда, когда $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям движения системы частиц (1)

$$\dot{x}_i = 4 \sum_{k \neq i} \wp'(x_i - x_k). \quad (12)$$

Выбор указанного представления для ψ связан с тем, что функция $\Phi(x, \alpha)$ является решением уравнения Ламе [14]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\wp(x) \right) \Phi(x, \alpha) = \wp(\alpha) \Phi(x, \alpha). \quad (13)$$

Из трансляционных соотношений (7) легко следует, что $\Phi(x, \alpha)$ двоякспериодична по α , $\Phi(x, \alpha + \omega_l) = \Phi(x, \alpha)$.

По x функция $\Phi(x, \alpha)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x + \omega_l, \alpha) = \Phi(x, \alpha) \exp [\zeta(\alpha)\omega_l - \eta_l \alpha]. \quad (7')$$

Функция ψ вида (10) имеет простые полюса в точках $x = x_i$. Подставляя ее в уравнение (9) и приравнивая нулю коэффициенты при $(x - x_i)^{-2}$ и $(x - x_i)^{-1}$, получим следующие уравнения:

$$a_i \dot{x}_i + 2ka_i + 2 \sum_{j \neq i} a_j \Phi(x_i - x_j, \alpha) = 0, \quad (14)$$

$$\dot{a}_i - \wp(\alpha) a_i + a_i \left(\sum_{k \neq i} 2\wp'(x_i - x_k) \right) + 2 \sum_{j \neq i} a_j \Phi'(x_i - x_j, \alpha) = 0.$$

Если ввести вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$ и матрицы

$$L_{ij}(\alpha) = \dot{x}_i \delta_{ij} + 2(1 - \delta_{ij})\Phi(x_i - x_j, \alpha),$$

$$T_{ij}(\alpha) = \delta_{ij} \left(-\wp(\alpha) + 2 \sum_{k \neq i} \wp(x_i - x_k) \right) + 2(1 - \delta_{ij})\Phi'(x_i - x_j, \alpha), \quad (15)$$

то уравнения (14) запишутся в виде

$$(L(\alpha) + 2k \cdot 1)a = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + T \right) a = 0. \quad (16)$$

Для того чтобы уравнения (16) были совместны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\left[L, \frac{\partial}{\partial t} + T \right] = 0 \leftrightarrow \dot{L} = [L, T]. \quad (17)$$

Л е м м а 1. Уравнения (17) имеют место тогда и только тогда, когда $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (12).

Утверждение леммы вытекает из непосредственной подстановки выражений для L и T в уравнения (17). Кроме того, можно воспользоваться известным в теории системы (1) утверждением, что коммутационное представление (17) эквивалентно (12), если $\Phi(x, \alpha)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$[\Phi'(x)\Phi(y) - \Phi(x)\Phi'(y)]\Phi^{-1}(x+y) = [\wp(y) - \wp(x)] \quad (18)$$

и соотношению

$$\Phi(x)\Phi(-x) = \wp(\alpha) - \wp(x). \quad (19)$$

Для проверки первого из этих соотношений заметим, что левая часть равенства (18), как следует из (7'), двоякопериодична и по x и по y , имеет полюса второго порядка при $x = 0$, $y = 0$. Значит, она равна правой части. Аналогично, левая часть (19) периодична по x и α и имеет полюса второго порядка при $x = 0$ и $\alpha = 0$.

Таким образом, нами найдены решения функциональных уравнений (18), (19) и тем самым коммутационное представление (17) для системы (1), которые в отличие от всех использованных ранее зависят от дополнительного «спектрального параметра» α , определенного на эллиптической кривой Γ с периодами ω_1 и ω_2 . Наличие этого дополнительного параметра и позволяет продвинуться в интегрировании системы (1) с помощью методов алгебраической геометрии.

Рассмотрим матрицу $A(t, \alpha)$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + T(t, \alpha) \right) A(t, \alpha) = 0 \quad (20)$$

и нормированную условием $A(0, \alpha) \equiv 1$.

Из уравнения (17) следует, что

$$L(t, \alpha)A(t, \alpha) = A(t, \alpha)L(0, \alpha). \quad (21)$$

Значит, функция

$$R(k, \alpha) = \det(2k + L(t, \alpha)) \quad (22)$$

не зависит от t . Матрица $L(t, \alpha)$, имеющая существенные особенности при $\alpha = 0$, может быть представлена в виде

$$L(t, \alpha) = G(t, \alpha)\tilde{L}(t, \alpha)G^{-1}(t, \alpha), \quad (23)$$

где \tilde{L} не имеет существенной особенности, G — диагональная матрица, $G_{ij} = \delta_{ij} \exp(\xi(\alpha)x_i)$. Следовательно, $r_i(\alpha)$ — коэффициенты

выражения

$$R(k, \alpha) = \sum_{i=0}^n r_i(\alpha) k^i \quad (24)$$

являются эллиптическими функциями с полюсами в точке $\alpha = 0$. Функции $r_i(\alpha)$ представимы в виде линейной комбинации \wp -функции и ее производных. Коэффициенты такого разложения являются интегралами системы (1). Каждый набор фиксированных значений этих интегралов задает уравнением $R(k, \alpha) = 0$ алгебраическую кривую Γ_n , n -листно накрывающую исходную эллиптическую кривую Γ .

Пример 1. Пусть $n = 2$, тогда

$$R(k, \alpha) = 4k^2 + 2k(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 4\wp(x_1 - x_2) - 4\wp(\alpha).$$

В окрестности $\alpha = 0$ сингулярная часть матрицы \tilde{L} имеет вид $\tilde{L}_{ii} = O(1)$, $\tilde{L}_{ij} = -2\alpha^{-1} + O(1)$, $i \neq j$. У этой матрицы собственное значение $-2\alpha^{-1}$ ($n - 1$)-кратно вырождено. Кроме него, есть еще одно собственное значение, равное $2(n - 1)\alpha^{-1}$.

Таким образом, в окрестности $\alpha = 0$ функция $R(k, \alpha)$ представима в виде

$$R(k, \alpha) = (k - (n - 1)\alpha^{-1} + b_n(\alpha)) \prod_{l=1}^{n-1} (k + \alpha^{-1} + b_l(\alpha)), \quad (25)$$

$b_l(\alpha)$ — регулярные функции α . Значит, функция k , определенная на Γ_n , имеет простые полюса на всех листах в точках P_i , расположенных над $\alpha = 0$. Ее разложения по локальному параметру α на этих листах задаются сомножителями правой части (25). Из (25) следует, что один из листов выделен. Будем его для краткости называть «верхним».

Лемма 2. *Род g поверхности Γ_n равен n .*

Для накрывающей эллиптической кривой имеет место соотношение $2g - 2 = \nu$, где ν — число точек ветвления накрытия Γ_n над Γ . Точки ветвления совпадают с нулями на Γ_n функции $\partial R / \partial k$. Дифференцируя по k равенство (25) и подставляя вместо k соответствующие разложения, получим, что $\partial R / \partial k$ имеет простые полюса на всех листах, кроме верхнего, на котором кратность полюса равна $n - 1$. Число нулей любой мероморфной функции равно числу полюсов. Значит, $\nu = 2(n - 1)$ или $g = n$.

Якобиево многообразие $J(\Gamma_n)$ кривой Γ_n является n -мерным тором. Ниже будет доказано, что координаты на этом торе являются переменными типа «угла» для системы (1).

Каждой точке P кривой Γ_n , т. е. паре $(k, \alpha) = P$, связанной соотношением $R(k, \alpha)$, отвечает единственный собственный вектор $a(0, P) = (a_1(0, P), \dots, a_n(0, P))$ матрицы $L(0, \alpha)$, нормированный условием $a_1(0, P) \equiv 1$. Все остальные координаты $a_i(0, P)$ являются вне точек P_j мероморфными функциями на кривой Γ_n . Число полюсов $a(0, P)$ равно $n - 1$. Для доказательства этого рассмотрим матрицу $F(\alpha)$, столбцами которой являются вектора $a(0, P_j(\alpha))$, где $P_j(\alpha)$ — прообразы точки α . Функция $|\det F(\alpha)|^2$ не зависит от нумерации листов, т. е. корректно определена как функция α . Она мероморфна, имеет двукратные полюса в образах полюсов $a(0, P)$. Нули этой функции совпадают с образами точек ветвления Γ_n . Если N — число полюсов $a(0, P)$, то $2N = \nu = 2n - 2$.

В окрестности «бесконечноудаленных точек» P_j $a_i(0, P)$ имеет вид

$$a_i(0, P) = \left(-\frac{1}{n-1} + O(\alpha) \right) \exp[\zeta(\alpha)(x_i^0 - x_1^0)], \quad i > 1, \quad j \neq n. \quad (26)$$

На верхнем листе, $j = n$

$$a_i(0, P) = (1 + O(\alpha)) \exp [\zeta(\alpha)(x_i^0 - x_1^0)]. \quad (27)$$

Здесь и далее $x_i^0 = x_i(0)$ — начальное расположение частиц.

Фундаментальная матрица $A(t, \alpha)$ системы (20), $A(0, \alpha) = 1$, является аналитической функцией α вне $\alpha = 0$. Если $A_i(t, \alpha)$ — i -й столбец матрицы A , то вектор-столбец

$$a(t, P) = \sum_{i=1}^n a_i(0, P) A_i(t, \alpha) \quad (28)$$

является решением системы (20), собственным для L :

$$(L(t, \alpha) + 2k \cdot 1) a(t, P) = 0, \quad P = (k, \alpha).$$

Чтобы найти вид $a(t, P)$ в прообразах точки $\alpha = 0$, перейдем от пары L, T , удовлетворяющей (17), к калибровочно эквивалентной паре

$$\tilde{L}, \quad \tilde{T} = G^{-1} \partial G + G^{-1} T G, \quad (29)$$

где \tilde{L} и G такие, как в (23). Имеет место сравнение

$$P(\alpha) \delta_{ij} + \tilde{T}(t, \alpha) = \alpha^{-1} \tilde{L}(t, \alpha) + O(1). \quad (30)$$

Следовательно, собственные значения матрицы \tilde{T} имеют следующий вид: для $j \neq n$

$$\mu_j(t, \alpha) = -k_j^2 + O(1) = -(\alpha^{-2} + 2b_j(0)\alpha^{-1} + O(1)). \quad (31)$$

Здесь $k_j = -(\alpha^{-1} + b_j(\alpha))$ — разложения собственных значений L на различных листах Γ_n . На «верхнем» листе имеем

$$\mu_n(t, \alpha) = 2k_n \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + O(1). \quad (32)$$

Обозначим через $\nu_j(\alpha) = \mu_j(t, \alpha) + O(1)$ сингулярные части собственных значений \tilde{T} . Они не зависят от t . Следовательно, решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{T} \right) \tilde{a}(t, P) = 0,$$

собственные для матрицы \tilde{L} , имеют вид

$$\tilde{a}(t, P) = \tilde{a}(0, P) (1 + O(\alpha)) \exp(\nu_j(\alpha) t).$$

Векторы a и \tilde{a} связаны простым соотношением

$$a(t, P) = G(t, \alpha) \tilde{a}(t, P). \quad (33)$$

Таким образом, имеет место

Л е м м а 3. Координаты $a_i(t, P)$ вектор-функции $a(t, P)$ мероморфны на кривой Γ_n вне точек P_j . Их полюса $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ не зависят от t . В окрестности P_j $a_i(t, P)$ имеет вид

$$a_i(t, P) = c_{ij}(\alpha) \exp [\zeta(\alpha)(x_i(t) - x_1^0) + \nu_j(\alpha) t], \quad (34)$$

$c_{ij}(\alpha)$ — регулярные в окрестности $\alpha = 0$ функции. При этом

$$c_{1j}(0) = 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad c_{in}(0) = 1, \quad c_{ij}(0) = -\frac{1}{n-1}, \quad i > 1, \quad j \neq n. \quad (35)$$

Вернемся вновь к собственной функции

$$\psi(x, t, P) = \sum_{i=1}^n a_i(t, P) \Phi(x - x_i, \alpha) e^{h x + k t}.$$

Функция $\Phi(x - x_i, \alpha)$ имеет существенные особенности на всех листах Γ_n . Из равенств (34), (34), (25) следует, что $\psi(x, t, P)$ не имеет существенных особенностей в точках $P_j, j \neq n$. Из (35) следует, что ψ не имеет в этой точке и полюса.

Т е о р е м а 2. Собственная функция $\psi(x, t, P)$ нестационарного уравнения Шредингера (9) определена на n -листной накрывающей Γ_n исходной эллиптической кривой. Функция $\psi(x, t, P)$ мероморфна на Γ_n всюду, кроме одной существенно особой точки P_n . Ее полюса $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ не зависят от t, x . В окрестности P_n функция $\psi(x, t, P)$ имеет вид

$$\psi(x, t, P) = \left(n\alpha^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(x, t) \alpha^i \right) \exp[\lambda(\alpha)(x - x_1^0) + \lambda^2 t], \quad (36)$$

где $\lambda(\alpha) = n\alpha^{-1} + b_n(0)$.

Тем самым функция $\psi(x, t, P)$ является классической функцией Бейкера — Ахиезера (см. [15] — [17]). Она однозначно определяется своими полюсами $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ и значением x_1^0 . В действительности, сдвигом точки отсчета можно сдвинуть полюс из отмеченной точки и считать, что ψ имеет n произвольных полюсов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

В работе [15] было доказано, что функция $\psi(x, t, P)$ со свойствами, сформулированными в теореме 2, является решением нестационарного Шредингера. Общая схема построения для функций типа Бейкера — Ахиезера их выражений через θ -функции Римана содержатся в [16]. Там же выведена формула для потенциала $u(x, t)$ нестационарного Шредингера. Сопоставление результатов [15], [16] и полученных выше приводит к следующему утверждению.

Т е о р е м а 3. Координаты $x_i(t)$ системы частиц (1) задаются уравнением

$$\theta(\vec{U}x + \vec{V}t + \vec{W}) = 0 = \text{const} \times \prod_{i=1}^n \sigma(x - x_i(t)). \quad (37)$$

Для доказательства заметим, что формула для потенциала и нестационарного Шредингера имела вид

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{U}x + \vec{V}t + \vec{W}) + \text{const}. \quad (38)$$

Полюса u совпадают с нулями θ , с одной стороны, и с $x_i(t)$, с другой стороны, как видно из (9).

Здесь θ — θ -функция Римана, \vec{U}, \vec{V} — постоянные вектора, равные периодам абелевых дифференциалов второго рода с особенностями в точке P_n . Более подробно их определение можно найти в [16], [17]. Ниже мы лишь обсудим характер полученного ответа. Как сама θ -функция, так и \vec{U}, \vec{V} однозначно определяются кривой Γ_n или, что то же самое, характеристическим полиномом $R(k, \alpha)$, который не зависит от t . Следовательно, эти параметры зависят лишь от интегралов системы (1). Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ — корни уравнения $\det(2k \cdot 1 + L_{ij}) = 0, i, j > 1$, (т. е. корни правого нижнего минора характеристической матрицы) на кривой Γ_n . Преобразование Абеля отображает симметрическую степень кривой $S^n \Gamma_n$ (неупорядоченный набор n точек) в якобиево многообразие $J(\Gamma_n), \omega : S^n \Gamma_n \rightarrow J(\Gamma_n)$. Вектор \vec{W} , входящий в формулу (37), является образом при преобразовании Абеля набора $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, P_n(x_1^0 = 0)$. Он преобразуется по t линейно, что и доказывает то, что координаты на якобиевом многообразии суть переменные типа угла.

§ 2. Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили

Не подставляя непосредственно эллиптические решения в уравнение КП, идентификацию полюсов этих решений с системой (1) можно непосредственно получить из коммутационного представления (7).

Т е о р е м а 4. *Функция $u(x, y, t)$ является эллиптическим решением уравнения КП тогда и только тогда, когда*

$$u(x, y, t) = c + 2 \sum_{j=1}^n \wp(x - x_j(y, t)) \quad (39)$$

и u уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right)\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - M\right)\psi = 0$$

есть решение вида

$$\psi = \sum_{i=1}^n a_i(t, y, P) \Phi(x - x_i, \alpha) e^{kx + k^2y + k^3t}. \quad (40)$$

С л е д с т в и е 1. *По y динамика полюсов $x_i(y, t)$ совпадает с динамикой частиц системы (1).*

Это утверждение вытекает из результатов предшествующего параграфа. Аналогично уравнению $\frac{\partial}{\partial y} - L$ наличие решений вида (40) у уравнения $\frac{\partial}{\partial t} - M$ эквивалентно коммутационному уравнению типа (17) и совпадает с уравнениями гамильтонова потока, отвечающего гамильтониану J_3 .

С л е д с т в и е 2. *По t динамика $x_i(y, t)$ совпадает с третьим гамильтоновым потоком системы (1).*

С л е д с т в и е 3. *Эллиптические решения $u(x, y, t)$ уравнения КП (39) выражаются через θ -функцию накрывающей Γ_n эллиптической кривой Γ .*

$$u = \text{const} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{U}x + \vec{V}y + \vec{Z}t + \vec{W}). \quad (41)$$

Связь между полюсами эллиптических решений уравнения КП и системами типа (1) мы используем еще одним способом для доказательства того, что при естественных ограничениях эти решения при вещественных x, y, t не имеют особенностей.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u_t + \frac{1}{4} (6ull_x - u_{xxx}) \right] = 0, \quad (42)$$

отличающееся от (3) знаком. Это уравнение имеет коммутационное представление $\left[i \frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0$. Его эллиптические решения связаны с гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^2 + 2 \sum_{k \neq j} \wp(x_k - x_j). \quad (43)$$

Этот гамильтониан отличается от (1) знаком потенциальной энергии.

Пусть ω_1, ω_2 — периоды \wp -функции — комплексно сопряжены. Тогда $\wp(\bar{z}) = \overline{\wp(z)}$. Рассмотрим вещественные решения уравнения КП вида (39). Они задаются начальными координатами $x_j(0, 0)$ и начальными импульсами $x_{jy}(0, 0)$. Пусть эти данные выдерживают сопряжение, т. е. $n = 2m$ и $x_j = \bar{x}_{j+m}, j = 1, \dots, m$. Тогда $u(x, y, t)$ вещественно при всех вещественных x, y, t .

С л е д с т в и е. Если $x_j(0, 0)$ не лежат на вещественной оси, то решение (39), (41) не имеет особенностей при вещественных x и y .

Наличие особенности означает, что одна из частиц попала на вещественную ось, но тогда с ней должна столкнуться сопряженная частица. Это противоречит закону сохранения энергии, так как потенциал отталкивающий и сингулярный.

Матричные системы

Ниже вкратце будут сформулированы условия, которым должны удовлетворять кривые, чтобы конструкции [16] «конечнозонных» решений уравнений коммутативности

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0, \quad (44)$$

где L и M — операторы с матричными коэффициентами, приводили к эллиптическим решениям. Далее мы будем следовать обозначениям [16].

Согласно [16] каждая неособая алгебраическая кривая Γ рода g с l отмеченными точками P_1, \dots, P_l и фиксированными локальными параметрами в их окрестностях $z_j(P)$, а также набор $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+l-1}$ точек общего положения определяет решения уравнений (44).

Пусть кривая Γ_N N -листно накрывает эллиптическую кривую Γ , т. е. задана уравнением

$$k^N + \sum_{i=0}^{N-1} r_i(\alpha) k^i, \quad (45)$$

где $r_i(\alpha)$ — эллиптические функции с единственным полюсом в точке $\alpha = 0$.

Предположим, что Γ_N над $\alpha = 0$ не имеет ветвлений. Это значит, что функция k на Γ_N имеет N простых полюсов P_1, \dots, P_N — прообразов точки $\alpha = 0$. Обозначим через ν_j вычет k на j -м листе, т. е. $k - \nu_j \alpha^{-1} = O(1)$ в окрестности P_j .

У т в е р ж д е н и е. Предположим, что $\nu_j = 1$, если $j > l$. Тогда, если в качестве локальных параметров $z_j(\alpha)$ в окрестностях P_1, \dots, P_l выбрать $z_j(\alpha) = (k_j(\alpha) - \zeta(\alpha))^{-1}$, то соответствующие решения уравнений (44) будут эллиптическими.

Из сформулированного утверждения легко вытекает, что любому N -листному накрытию эллиптической кривой отвечают эллиптические решения для систем с матричными коэффициентами размерности $((N-1) \times (N-1))$.

Доказательство утверждения следует из того, что функция

$$\varphi_i(P) = \exp [k(P) \omega_i - \zeta(\alpha) \omega_i + \eta_i \alpha], \quad i = 1, 2,$$

корректно определена как функция P . Вне точек P_1, \dots, P_l она голоморфна. В окрестностях этих точек она имеет вид

$$\varphi_i(P) = (1 + O(\alpha)) \exp(z_j^{-1}(\alpha) \omega_i).$$

Из определения функций типа Бейкера — Ахиезера следует, что для $\psi(x, y, t, P)$, удовлетворяющих уравнениям $\left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right) \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - M\right) \psi = 0$, выполнены соотношения

$$\psi(x + \omega_i, y, t, P) = \psi(x, y, t, P) \varphi_i(P).$$

Значит, коэффициенты операторов L и M мероморфны и периодичны с периодами ω_1 и ω_2 , т. е. являются эллиптическими функциями.

В заключение следует отметить, что было бы интересно проследить, как с помощью накрытий над кривой \mathcal{X} рода n получать решения нелинейных уравнений, выражающиеся через θ -функции высокой размерности, но сводящиеся к решениям с группой периодов исходной кривой \mathcal{X} . Возможно, такие решения связаны с новыми интегрируемыми системами частиц.

Московский энергетический
институт им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию
11 марта 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, М., «Наука», 1967.
2. Calogero F., Exactly solvable one-dimensional many-body systems, *Lett. Nuovo Cimento* **13** (1975), 411—415.
3. Perelomov A. M., Completely integrable classical systems connected with semisimple Lie algebras, *Lett. Math. Phys.* **1** (1977), 531—540.
4. Airault H., McKean H., Moser J., Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 95—125.
5. Кричевер И. М., О рациональных решениях уравнения Кадамцева — Петвиашвили и интегрируемых системах N частиц на прямой, *Функц. анализ* **12**, вып. 1 (1978), 76—78.
6. Chodnovsky D. V., Chodnovsky G. V., Pole expansions of nonlinear partial differential equations, *Nuovo Cimento* **40B** (1977), 339—350.
7. Calogero F., Integrable many-body problem, preprint Univ. di Roma, № 89, 1978.
8. Case K. M., The N -soliton solutions of the Bendgamine—Ono equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **75** (1978), 3562—3563.
9. Olshanskij M. A., Perelomov A. M., Explicite solutions of some completely integrable systems, *Lett. Nuovo Cimento* **17** (1976), 97—103.
10. Olshanskij M. A., Rogov N. V., Bound states in completely integrable systems with two types of particles, *Ann. Inst. H. Poincaré* **29** (1978), 169—177.
11. Chodnovsky D. V., Meromorphic solutions of nonlinear partial differential equations and particle integrable systems, *J. Math. Phys.* **20**, № 12 (1979), 2416—2424.
12. Дрюма В. С., Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, *Письма в ЖЭТФ* **19**, № 12 (1973), 219—225.
13. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I, *Функц. анализ* **8**, вып. 3 (1974), 43—53.
14. Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М., «Наука», 1976.
15. Кричевер И. М., Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений, *ДАН СССР* **227**, № 2 (1976), 291—294.
16. Кричевер И. М., Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, *Функц. анализ* **11**, вып. 1 (1977), 15—31.
17. Baker H., Note of foregoing paper «Commutative ordinary differential equation», *Proc Royal Soc. London* (1928), ser. A **118**, 570—576.
18. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза, *ЖЭТФ* **67**, вып. 12 (1974), 2131—2143.