G. L. Brovko, A. A. Il'yushin, On a plane model of perforated plates, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 83–91

3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М., 1985.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., 1963.
5. Треффц Е. Математическая теория упругости. Л.; М., 1934.
6. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях твердой смеси//Физика металлов и металловедение. 1959. 8, вып. 2. 161—170.

Поступила в редакцию
24.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 539.3

Г. Л. Бровко, А. А. Ильюшин

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛИТ

Стержневые конструкции (фермы, рамы) [1] могут быть использованы не только непосредственно в технике, строительстве, но также и для моделирования основных характерных свойств подобных им более сложных конструкций и структур. В работе предлагается подход к построению осредненных континуальных моделей периодических структур с деформируемым твердым каркасом, основанный на приближении решетчатой конструкцией и реализованный для плоского случая на примере перфорированных плит (пластин). Построены определяющие соотношения осредненной модели континуума при конечных деформациях, в том числе при наличии распределенного в перфорациях давления, выражающие свойства некоторого анизотропного упругопластического тела. Получены уравнения движения, описывающие распространение малых и конечных возмущений. Даны оценки влияния геометрических параметров решетки на усредненные свойства модельной среды, включая модули упругости, плотность массы и скорости распространения возмущений.

1. Рассмотрим подход к построению моделей указанного типа для плоских и пологих элементов конструкций (плит, панелей, пластин) неоднородной двоякопериодической (в плане) структуры на примере однородных по толщине перфорированных плит с квадратно-гнездовым способом размещения отверстий. Предполагая диаметр отверстий достаточно большим по сравнению с толщиной простенков между ними, заменим перфорированную плиту (развертку пологой панели) плитой (слоем) решетчатой конструкции, составленной двоякопериодически расположенными (с периодом a) пластинами толщины h и ширины H с рамным сочленением. Ограничиваясь однородным по толщине напряженно-деформированным состоянием под воздействием нагрузок в плоскости плиты, будем рассматривать силовые характеристики (силы, моменты) отнесенными к единице длины вдоль перпендикулярного к плоскости плиты направления — погонные (постоянные по длине H) силы, моменты, усилия, что приводит к аналогии с задачами о плоских деформациях стержневой рамной конструкции.

Предполагая, что однородная плоская деформация элемента рамы, содержащего достаточное для усреднения число структурных ячеек периодичности, сопровождается аффинным преобразованием точек положения узлов рамы (рамных сочленений) с периодической на ячейках конфигурацией стержней, будем допускать продольные и изгибные деформации стержней (в плоскости рамы), не сопровождающиеся явлениями бифуркации (потери устойчивости). Считая реакции сопротивления стержней решетки растяжению (сжатию) и изгибу для простоты независимыми, определим их из соответствующих элементарных задач о растяжении (сжатии) прямолинейного стержня и об изгибе стержня поперечным смещением параллельно защемленных концов. Для известных упругопластических свойств материала и размеров стержня решетки решения этих задач дают зависимость величины растягивающей (сжимающей) силы $P_{\text{реш.}}$ от относительного удлинения e стержня, а также величины изгибающего момента $M_{\text{реш.}}$ на концах стержней (в узлах сочленений) от среднего угла «сдвига» решетки γ (угла взаимного сдвига прямых, соединяющих концы (узлы) смежных стержней решетки):

$$P_{\text{реш.}}=P_{\text{реш.}}(e),\quad M_{\text{реш.}}=M_{\text{реш.}}(\gamma). \tag{1}$$

Функции (1) характеризуют материальные свойства решетки и ее размеры в плане. Так, при малых удлинениях и прогибах стержней в пределах упругости получаем функции (1) в виде [1]

$$P_{\text{реш.}}=E_{\text{м}}he,\quad M_{\text{реш.}}=E_{\text{м}}\frac{h^3}{4a}\gamma, \tag{2}$$

где $E_{\text{м}}$ — модуль Юнга материала стержня (решетки). В общем случае погонные (отнесенные к толщине H решетчатого слоя) сила $P_{\text{реш.}}$ и момент $M_{\text{реш.}}$ являются более сложными функциями, и их можно считать известными из решения соответствующих элементарных задач.

Функции $P_{\text{реш.}}$ и $M_{\text{реш.}}$, в том числе вида (1), (2), позволяют полностью описать сопротивление рамы плоской деформации, если вместо рамы рассматривать ферму из растяжимых по закону (1) или (2), но неизгибаемых (прямолинейных) стержней, сопряженных в узлах фермы пружинными шарнирами, характеризуемыми зависимостью (1) или (2), где γ — угол относительного сдвига смежных сочленений стержней.

С учетом периодичности деформированной конфигурации такой пружинной фермы при однородной деформации ее элемента (включающего достаточное число ячеек) исследуем (периодические) силовые взаимодействия между ячейками.

Рассмотрим недеформированную (квадрат $ABCD$) и деформированную (параллелограмм $AB'C'D'$) конфигурации ячейки фермы (без потери общности перемещение вершины A ячейки можно считать для наглядности нулевым). Деформированная конфигурация ячейки полностью определяется векторами $\mathbf{x}_1\equiv\overrightarrow{AD'}$ и $\mathbf{x}_2\equiv\overrightarrow{D'C'}$, а именно их модулями r_1, r_2 и углами ориентации φ_1, φ_2 относительно прямоугольной декартовой системы координат (x, y), связанной с недеформированной конфигурацией. Тогда равновесие ячейки, находящейся под воздействием внешних (от соседних ячеек) сил (например, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ в узлах D' и C' соответственно) и внутренних сил сопротивления растяжению (сжатию) стержней, равных по величине $P_{\text{реш.}}(e_1)$ и $P_{\text{реш.}}(e_2)$ (где e_1, e_2 — относительные удлинения звеньев AD и DC) и направленных вдоль векторов $\mathbf{x}_1^0\equiv\frac{\mathbf{x}_1}{r_1}$, $\mathbf{x}_2^0\equiv\frac{\mathbf{x}_2}{r_2}$ соответственно, а также моментов $M_{\text{реш.}}$ внешнего и внутреннего взаимодействия, согласно принципу виртуальных работ [2] выражается равенством

$$\delta A\equiv(\mathbf{F}-P_{\text{реш.}}(e_1)\cdot\mathbf{x}_1^0+P_{\text{реш.}}(e_2)\cdot\mathbf{x}_2^0)\cdot(\delta\mathbf{x}_1-\delta\mathbf{x}_2)+$$
$$+(\mathbf{G}-P_{\text{реш.}}(e_1)\,\mathbf{x}_1^0-P_{\text{реш.}}(e_2)\,\mathbf{x}_2^0)\cdot(\delta\mathbf{x}_1+\delta\mathbf{x}_2)-4M_{\text{реш.}}(\gamma)\cdot(\delta\varphi_1-\delta\varphi_2)=0 \tag{3}$$

для произвольных обобщенных виртуальных перемещений δr_1, δr_2, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ $\left(\text{здесь и далее } \gamma\equiv\frac{\pi}{2}-\varphi_2+\varphi_1\right)$.

С учетом компонентных представлений

$$\mathbf{F}=(F_x\ \ F_y),\ \mathbf{G}=(G_x,\ G_y),\ \mathbf{x}_\alpha^0=(\cos\varphi_\alpha,\ \sin\varphi_\alpha)\quad(\alpha=1,\ 2)$$

и обозначений

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}(\mathbf{F}+\mathbf{G}),\quad \mathbf{K}=\frac{1}{2}(-\mathbf{F}+\mathbf{G}) \tag{4}$$

равенство (3) приводит к следующим выражениям декартовых компонент векторов (4):

$$\begin{aligned}
H_x&=P_{\text{реш.}}(e_1)\cos\varphi_1-\frac{M_{\text{реш.}}(\gamma)}{r_1}\sin\varphi_1,\\
H_y&=P_{\text{реш.}}(e_1)\sin\varphi_1+\frac{M_{\text{реш.}}(\gamma)}{r_1}\cos\varphi_1,\\
K_x&=P_{\text{реш.}}(e_2)\cos\varphi_2+\frac{M_{\text{реш.}}(\gamma)}{r_2}\sin\varphi_2,\\
K_y&=P_{\text{реш.}}(e_2)\sin\varphi_2-\frac{M_{\text{реш.}}(\gamma)}{r_2}\cos\varphi_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отнесение внешних для ячейки сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, а также $-\mathbf{F}$, $-\mathbf{G}$ (приложенных к параллелограмму $AB'C'D'$ в вершинах D', C', B' и A) в равных долях к смежным ребрам, прилежащим к каждой вершине, согласно (4) показывает, что векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{K}$ выражают среднее внешнее контактное (со стороны соседних ячеек) силовое воздействие, приходящееся на звенья $D'C'$ и $B'C'$ (а векторы $-\mathbf{H}$ и $-\mathbf{K}$ — на звенья AB' и AD').

Усреднением контактных сил по соответствующим ребрам (граням) деформированного элемента решетки для векторов $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ средних напряжений на ребрах $D'C'$ и $B'C'$ и их декартовых компонент получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{t}_1=\frac{1}{r_2}\mathbf{H},\quad \mathbf{t}_2=\frac{1}{r_1}\mathbf{K},\\
&t_{1x}=\frac{1}{r_2}H_x,\quad t_{1y}=\frac{1}{r_2}H_y,\\
&t_{2x}=\frac{1}{r_1}K_x,\quad t_{2y}=\frac{1}{r_1}K_y.
\end{aligned} \tag{6}$$

Рассматривая решетку как некоторую сплошную среду, будем предполагать существование тензора напряжений Коши $\mathbf{S}$ и выполнение известной формулы [3]

$$\mathbf{t}_\mathbf{n}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} \tag{7}$$

для произвольного единичного вектора $\mathbf{n}$ нормали к площадке в деформированной конфигурации, где $\mathbf{t}_\mathbf{n}$ — вектор напряжения на этой площадке.

Поскольку формулы (5), (6) связывают компоненты векторов напряжения на площадках $D'C'$ и $B'C'$ с характеристиками деформации ячейки (элементы решетки), то, выражая эти характеристики через компоненты тензора деформаций, а компоненты тензора напряжений через компоненты векторов напряжения с помощью (7), получим (для рассматриваемого здесь плоского случая) связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций, выражающую механические свойства введенной модели сплошной среды.

2. Воспользуемся известными в теории конечных деформаций сплошной среды формулами [3—5]

$$\mathbf{A}=\mathbf{э}_k\mathbf{e}_k,\quad \mathbf{C}=\mathbf{A}^T\mathbf{A},\quad \mathcal{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}),\tag{8}$$

где $\mathbf{e}_k$, $\mathbf{э}_k$ — векторы начального (здесь ортонормированного) и актуального лагранжевых базисов, $\mathbf{A}$ — аффинор деформации, $\mathbf{C}$ — мера деформации Коши, $\mathcal{E}$ — тензор конечных деформаций Коши—Грина, $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Тогда для рассматриваемой здесь плоской однородной деформации элемента модельной среды (ячейки решетки) имеем следующие нетривиальные компоненты тензоров (8) относительно введенной декартовой системы координат:

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix}\frac{r_1}{a}\cos\varphi_1 & \frac{r_2}{a}\cos\varphi_2\\ \frac{r_1}{a}\sin\varphi_1 & \frac{r_2}{a}\sin\varphi_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}\sim\begin{pmatrix}\frac{r_1^2}{a^2} & \frac{r_1r_2}{a^2}\sin\gamma\\ \frac{r_1r_2}{a^2}\sin\gamma & \frac{r_2^2}{a^2}\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{E}\sim\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{r_1^2}{a^2}-1 & \frac{r_1r_2}{a^2}\sin\gamma\\ \frac{r_1r_2}{a^2}\sin\gamma & \frac{r_2^2}{a^2}-1\end{pmatrix}.\tag{9}$$

Величина $J\equiv|\det A|=\frac{r_1r_2}{a^2}\cos\gamma$ характеризует кратность изменения объема при деформации, а отношения $\frac{r_1}{a}$ и $\frac{r_2}{a}$ — кратности удлинений волокон, занимавших до деформации координатные положения (вдоль осей Ox и Oy), причем их относительные удлинения равны

$$e_1=\frac{r_1}{a}-1,\quad e_2=\frac{r_2}{a}-1.\tag{10}$$

Векторы единичных нормалей $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}$ к произвольной материальной площадке до и после деформации связаны формулами [3—5]

$$\mathbf{n}=\Lambda_\mathbf{n}^{-1}J\mathbf{A}^{-1T}\mathbf{n}_0,\quad \mathbf{n}_0=\Lambda_\mathbf{n}J^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{n},\tag{11}$$

где $\Lambda_\mathbf{n}=J\sqrt{\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{n}_0}$ — кратность изменения величины площадки при деформации. Величина $\Lambda_\mathbf{n}$ для площадок с начальными единичными нормалями $\mathbf{n}_0$ вдоль осей Ox и Oy соответственно имеет значения

$$\Lambda_1=\frac{r_2}{a},\quad \Lambda_2=\frac{r_1}{a}.\tag{12}$$

Для материального представления определяющих соотношений [6] введенной модели среды воспользуемся энергетическим тензором напряжений $\mathbf{\Sigma}$ и тензором Пиолы—Кирхгофа второго рода $\mathbf{P}$ [5, 6]:

$$\mathbf{\Sigma}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1T},\quad \mathbf{P}=J\mathbf{\Sigma},$$

что позволяет, например, для $\mathbf{\Sigma}$ с учетом (11) переписать формулу (7) в виде [3, 5]

$$\mathbf{t}=\Lambda_\mathbf{n}^{-1}J\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{n}_0,$$

откуда

$$\mathbf{m}_0\cdot\mathbf{\Sigma}\mathbf{n}_0=\Lambda_n J^{-1}\mathbf{m}_0\cdot\mathbf{A}^{-1}\mathbf{t}_n \tag{13}$$

для любых единичных векторов $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{n}_0$.

Полагая в (15) $\mathbf{m}_0=\mathbf{e}_i$, $\mathbf{n}_0=\mathbf{e}_j$ ($\mathbf{e}_k$ — единичные базисные векторы введенной декартовой системы координат), из (6), (9) с учетом (10), (12) получаем следующие (для плоского случая) декартовы компоненты тензора $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma}\sim J^{-1}\begin{Vmatrix}\frac{1}{r_1}P_{\text{реш.}}(e_1)-\frac{2}{r_1^2}M_{\text{реш.}}(\gamma)\operatorname{tg}\gamma & \frac{2}{r_1r_2\cos\gamma}M_{\text{реш.}}(\gamma)\\ \frac{2}{r_1r_2\cos\gamma}M_{\text{реш.}}(\gamma) & \frac{1}{r_2}P_{\text{реш.}}(e_2)-\frac{2}{r_2^2}M_{\text{реш.}}(\gamma)\operatorname{tg}\gamma\end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Выражая из (9) входящие в (14) характеристики деформации через декартовы компоненты g_{ij} меры деформации Коши $\mathbf{C}$, получаем зависимость $\mathbf{\Sigma}$ (а также $\mathbf{P}$) от $\mathbf{C}$. Так, для компонент тензора $\mathbf{P}$ имеем

$$\mathbf{P}\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\widetilde{P}(g_{11})-\frac{g_{12}}{Jg_{11}}\widetilde{M}(\gamma) & \frac{1}{J}\widetilde{M}(\gamma)\\ \frac{1}{J}\widetilde{M}(\gamma) & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\widetilde{P}(g_{22})-\frac{g_{12}}{Jg_{22}}\widetilde{M}(\gamma)\end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\gamma=\arcsin\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$ и использованы обозначения

$$\widetilde{P}(g_{\alpha\alpha})=\frac{1}{a}P_{\text{реш.}}\left(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}-1\right),\quad \widetilde{M}(\gamma)=\frac{2}{a^2}M_{\text{реш.}}(\gamma). \tag{16}$$

Формула (15) с учетом (16) выражает механические свойства введенной модели сплошной среды, т. е. осредненные свойства решетчатой конструкции при произвольных плоских конечных деформациях. Как видно из (15), эти свойства анизотропны, а именно ортотропны (с координатными осями в качестве осей ортотропии). Если деформация стержней и их сочленений в раме происходит в пределах линейной упругости, то зависимость (15) выражает свойства анизотропной и, вообще говоря, нелинейной упругости. Если деформации стержней или сочленений решетки сопровождаются пластичностью, то зависимость (15) выражает необратимые свойства анизотропной пластичности при конечных деформациях. Определяющие соотношения модели среды могут быть представлены в эквивалентной (15) пространственной форме [6].

3. Как видно из (9), (10), в случае малых деформаций ($|e_1|\ll 1$, $|e_2|\ll 1$, $|\gamma|\ll 1$) и малых поворотов $\left(|\varphi_1|\ll 1,\ \left|\frac{\pi}{2}-\varphi_2\right|\ll 1\right)$, т. е. в классическом (усиленном) случае малых деформаций, имеем $|\mathbf{A}-\mathbf{I}|\ll 1$, и с точностью до величин более высокого порядка малости справедливы приближенные равенства: $J\cong 1$, $\mathscr{E}\cong\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{P}\cong\mathbf{\Sigma}\cong\mathbf{S}\cong\boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ — классические тензоры малых деформаций и напряжений. Тогда представление (15) с той же степенью точности принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma}\sim\begin{pmatrix}P(\varepsilon_{11}) & M(\varepsilon_{12})\\ M(\varepsilon_{12}) & P(\varepsilon_{22})\end{pmatrix}, \tag{17}$$

где ε_{ij} — декартовы компоненты тензора ε, а для функций P и M выполнены равенства

$$P(\varepsilon_{\alpha\alpha}) \equiv \widetilde{P}(2\varepsilon_{\alpha\alpha}+1) \cong \frac{1}{a} P_{\text{реш.}}(\varepsilon_{\alpha\alpha}),$$
$$M(\varepsilon_{12}) \equiv \widetilde{M}(2\varepsilon_{12}) \equiv \frac{2}{a^2} M_{\text{реш.}}(2\varepsilon_{12}). \tag{18}$$

При малых упругопластических деформациях стержней решетки соотношения (17) с учетом (18) определяют некоторый анизотропный упругопластический материал с независимой реакцией на одноосное растяжение в направлении каждой из осей ортотропии и на сдвиг волокон этих направлений. При активных упругопластических деформациях [7] для функции P в (17), (18) имеем

$$P(\varepsilon_{\alpha\alpha}) = \frac{h}{a} \Phi_{\text{м}}(\varepsilon_{\alpha\alpha}),$$

где $\Phi_{\text{м}}$ — функция материала решетки, соответствующая диаграмме одноосного растяжения. В пределах линейной упругости согласно (2)

$$P(\varepsilon_{\alpha\alpha}) = \frac{h}{a} E_{\text{м}}\varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad M(\varepsilon_{12}) = \frac{h^3}{a^3} E_{\text{м}}\varepsilon_{12}, \tag{19}$$

где $E_{\text{м}}$ — модуль Юнга материала решетки. Введя в качестве характеристик материальных (упругих) свойств модели среды (решетки) константы

$$E = \frac{h}{a} E_{\text{м}}, \quad G = \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} E_{\text{м}}, \tag{20}$$

которые можно назвать модулем Юнга и модулем сдвига решетки, с учетом (19) получим представление (17) в виде

$$\boldsymbol{\sigma} \sim \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11} & 2G\varepsilon_{12} \\ 2G\varepsilon_{12} & E\varepsilon_{22} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

что соответствует модели ортотропного линейно-упругого тела с нулевыми коэффициентами поперечных сокращений при одноосных растяжениях вдоль всей ортотропии.

4. Наличие избыточного внутреннего равномерного давления p в пазах решетки (заданного как внешнее воздействие, либо возникшего как результат структурных изменений наполнителя пазов или как реакция наполнителя на деформацию) при однородном его распределении по элементарному объему решетки приводит к выражениям тензоров напряжений

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 - p\mathbf{I}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - pJ\mathbf{C}^{-1}, \tag{22}$$

где $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{P}_0$ соответствуют соотношениям (15). Согласно (9) второе соотношение (22) при конечных деформациях имеет вид (в компонентах)

$$\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} P_{011} - p\dfrac{g_{22}}{J} & P_{012} + p\dfrac{g_{12}}{J} \\ P_{021} + p\dfrac{g_{12}}{J} & P_{022} - p\dfrac{g_{11}}{J} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где P_{0ij} — элементы матрицы (15). При малых деформациях, в том числе в пределах упругости, соотношения (17) и (21) заменяются при наличии p на соотношения

$$\sigma \sim \begin{pmatrix} P(\varepsilon_{11})-p & M(\varepsilon_{12}) \\ M(\varepsilon_{12}) & P(\varepsilon_{22})-p \end{pmatrix}, \quad \sigma \sim \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11}-p & 2G\varepsilon_{12} \\ 2G\varepsilon_{12} & E\varepsilon_{22}-p \end{pmatrix} \tag{24}$$

(прежние обозначения сохранены).

Таким образом, формулы (23), (24) являются обобщениями определяющих соотношений модельной среды (15), (17), (21) на случай наличия внутреннего давления p в пазах решетки, которое может рассматриваться как известная функция деформаций, либо как заданная внешняя нагрузка.

5. Плоские движения модельной среды при произвольных конечных деформациях с лагранжевой точки зрения описываются уравнением известного вида [3—5]

$$\mathrm{Div}(\mathbf{AP})+\rho_0\mathbf{F}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{25}$$

или в декартовых компонентах системой двух уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ik}P_{kj})+\rho_0 F_i=\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{26}$$

где $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ — вектор перемещения точки тела, $\mathbf{F}=(F_1, F_2)$ — вектор массовых сил, аффинор $\mathbf{A}$ с компонентами A_{ik} и тензор Пиолы—Кирхгофа второго рода $\mathbf{P}$ с компонентами задаются формулами (9), (15) или (23), ρ_0 — начальная средняя (эффективная) плотность массы модельной среды:

$$\rho_0=\rho_{\text{м}}\frac{h(2a-h)}{a^2}, \tag{27}$$

$\rho_{\text{м}}$ — плотность массы материала решетки, a — параметр решетки, h — толщина стержней решетки в недеформированном состоянии. Для малых плоских деформаций в пределах линейной упругости (соотношение (21) или (24) вместо (15) или (23)) уравнения движения (25), (26) принимают вид (в компонентах)

$$\begin{aligned} &E\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+G\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+G\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\rho F_1=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ &E\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+G\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+G\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\rho F_2=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\rho\equiv\rho_0$.

Анализ системы (28) показывает, что она является гиперболической [8] при условии $E>2G$, что с учетом (20) эквивалентно неравенству

$$h<a.$$

Система (28) свидетельствует о наличии у рассматриваемой модельной среды двух характерных констант — скоростей распространения продольных c_1 и поперечных (сдвиговых) c_2 волн вдоль осей ортотропии:

$$c_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

При этом выполняются равенства

$$c_1=\sqrt{\frac{a}{2a-h}}\,c_{\text{м}},$$
$$c_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{h}{a}\sqrt{\frac{a}{2a-h}}\,c_{\text{м}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{h}{a}\,c_1, \tag{29}$$

где $c_{\text{м}}=\sqrt{\frac{E_{\text{м}}}{\rho_{\text{м}}}}$ — стержневая скорость продольных волн материала решетки.

Согласно (20), (27), (29) для решеток с любыми допустимыми значениями геометрических параметров a и h $(0<h<a)$ справедливы неравенства

$$0<2G<E<E_{\text{м}},\ 0<\rho<\rho_{\text{м}},$$
$$0<c_2<\frac{1}{\sqrt{2}}\,c_{\text{м}}<c_1<c_{\text{м}}. \tag{30}$$

При малых $\frac{h}{a}\left(\frac{h}{a}\to 0\right)$ для величин из (30) имеем следующие оценки:

$$E=\frac{h}{a}\,E_{\text{м}}=O\left(\frac{h}{a}\right),\ G=\frac{h^2}{2a^2}\,E=O\left(\frac{h^3}{a^3}\right),$$
$$\rho\cong\rho_{\text{м}}\,\frac{2h}{a},\ c_1\cong\frac{1}{\sqrt{2}}\,c_{\text{м}},\ c_2\cong\frac{h}{2a}\,c_{\text{м}}. \tag{31}$$

Формулы (30), (31) означают, что наличие перфораций (решетчатая структура) в целом ослабляет, но и облегчает конструкцию (для данного материала решетки сопротивление продольным деформациям примерно пропорционально средней плотности массы решетки), снижает скорости распространения возмущений, причем скорость продольных возмущений остается больше определенной константы, зависящей лишь от материала решетки.

При $\frac{h}{a}\to 1$ для модельной среды получаем

$$E\cong E_{\text{м}},\ G\simeq\frac{1}{2}\,E_{\text{м}},\ \rho\cong\rho_{\text{м}},\ c_1\cong c_{\text{м}},\ c_2\cong\frac{1}{\sqrt{2}}\,c_{\text{м}}. \tag{32}$$

Замечательно, что в случае упругих свойств материала решетки с нулевым коэффициентом Пуассона (когда $E_{\text{м}}=2G_{\text{м}}$ и стержневая скорость $c_{\text{м}}$ со скоростями распространения продольных $c_{\text{м}1}$ и сдвиговых $c_{\text{м}2}$ возмущений связана соотношением $c_{\text{м}}=c_{\text{м}1}=\sqrt{2}\,c_{\text{м}2}$) предельные значения (при $h=a$) упругих характеристик модели (32) совпадают с соответствующими константами материала решетки.

6. Дальнейшие исследования построенной модели среды предполагают изучение деформаций тел, распространения малых и конечных возмущений в плоском случае, включая малые возмущения конечно-деформированных тел, в том числе с учетом наличия внутреннего давления p в пазах решетки.

Предложенный подход к построению континуальных моделей неоднородных периодических структур с деформируемым твердым каркасом на основе их приближения решетчатыми конструкциями может быть распространен на другие плоские, а также пространственные структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М., 1959.
2. Березкин Е. Н. Курс теоретической механики. М., 1974.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1990.
4. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965.
5. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М., 1980.
6. Бровко Г. Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред//Прикл. матем. и механ. 1990. **54**, вып. 5. 814—824.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. М.; Л., 1948.
8. Математическая энциклопедия. Т. 3. М., 1982.

Поступила в редакцию
19.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 531.01

В. В. Козлов, В. А. Ярощук

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАНКАРЕ НА УНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ

1. Пусть G — группа Ли, g — ее алгебра, T — левоинвариантная метрика на группе G (кинетическая энергия механической системы с пространством положений G). Если $\omega=(\omega^1, ..., \omega^n)\in g$ — скорость системы, то

$$T=I_{ij}\omega^i\omega^j/2.$$

Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам производится суммирование. Ввиду предположения о левоинвариантности $I_{ij}=\mathrm{const}$. Тензор $I=\|I_{ji}\|$ можно назвать тензором инерции системы.

Введем еще кинетический момент $m=(m_1, ..., m_n)$, полагая $m_k=I_{ki}\omega^i$. Теорема об изменении момента приводит к уравнениям Эйлера — Пуанкаре [1]

$$\dot{m}_k=c_{ik}^l\omega^i m_l, \tag{1}$$

где c_{ik}^l—структурные постоянные алгебры g.

Уравнения (1) следует дополнить кинематическими соотношениями

$$\dot{x}^l=v_i^l\omega^i, \quad 1\leqslant l\leqslant n. \tag{2}$$

Здесь $x^1, ..., x^n$ — локальные координаты на группе $G, v_k=(v_k^1, \ldots, v_k^n)$— левоинвариантные поля G, для которых справедливы коммутационные соотношения

$$[v_i, v_j]=c_{ij}^k v_k.$$

Система (1)—(2) эквивалентна обычным уравнениям Лагранжа с лагранжианом T.

Пусть $w_1, ..., w_n$ — правоинвариантные векторные поля на группе G. Их фазовые потоки представляют семейства левых сдвигов. По-