N. Bogolǐubov,
Sur l'approximation trigonométrique des fonctions dans l'intervalle infini. Première partie,
Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 1931, Issue 1, 23–54

https://www.mathnet.ru/eng/im5186

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

SUR L'APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE DES FONCTIONS DANS L'INTERVALLE INFINI

Par N. BOGOLIŬBOV

(*Présenté par* N. Kryloff, *membre de l'Académie des Sciences*)

Première partie

§ 1. Dans ce paragraphe nous allons réunir quelques définitions et théorèmes dont on aura besoin pour l'obtention des principaux résultats du présent mémoire.

Soit

$$\varphi_n(t), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots)$$

une suite quelconque de fonctions définies sur tout axe réel; si uniformement dans chaque intervalle fini la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \varphi_n(t)\,dt = \int_0^t \varphi(t)\,dt \tag{1}$$

existe, alors nous dirons que la suite $\varphi_n(t)$ converge vers $\varphi(t)$ au sens généralisé ou que $\varphi(t)$ est la fonction limite de la suite $\varphi_n(t)$ au sens généralisé.

Si la relation (1) a lieu au moins pour une suite spéciale $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ des valeurs de n (et pas, en général, pour toutes les valeurs de n) alors nous dirons que $\varphi(t)$ est une fonction d'accumulation de la suite $\varphi_n(t)$ au sens généralisé.

Si, enfin, on a

$$\int_{t-1}^{t+1} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2}$$

uniformement sur tout axe réel, nous dirons que la suite $\varphi_n(t)$ converge en moyenne vers la fonction $\varphi(t)$, ou que $\varphi(t)$ est la fonction limite moyenne de la suite $\varphi_n(t)$.

Théorème I. Soit $f_n(t)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots)$ une suite de fonctions définies sur tout axe réel et soit $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k \ldots$ une suite arbitraire de nombres entiers positifs. Si à chaque nombre positif L on peut faire correspondre la suite $\nu_1^{(L)}, \nu_2^{(L)}, \nu_3^{(L)}, \ldots \nu_k^{(L)} \ldots$ appartenant à la suite $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots \nu_k, \ldots$, de façon que la limite

$$\lim_{\nu_k^{(L)} \to \infty} f_{\nu_k^{(L)}}(t)$$

existe dans l'intervalle $(-L, +L)$, alors de la suite $n = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots$ on peut extraire une telle suite $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ qu'on a partout

$$f_{\mu_n}(t) \underset{\mu_n \to \infty}{\longrightarrow} f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction définie sur tout axe réel.

Démonstration. Soit $\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \ldots \nu_k^{(1)}, \ldots$ la suite des valeurs de n choisie de façon que la limite

$$\lim_{\nu_k^{(1)} \to \infty} f_{\nu_k^{(1)}}(t)$$

existe partout dans l'intervalle $(-1, +1)$. Considérons la suite $\nu_1^{(2)}, \nu_2^{(2)}, \ldots \nu_k^{(2)}, \ldots$ (appartenant à la suite $\nu_2^{(1)}, \nu_3^{(1)}, \ldots \nu_k^{(1)}, \ldots$) telle que la limite

$$\lim_{\nu_k^{(2)} \to \infty} f_{\nu_k^{(2)}}(t)$$

existe dans l'intervalle $(-2, +2)$. En raisonnant ainsi on obtient la suite $\nu_1^{(p)}, \nu_2^{(p)}, \ldots \nu_k^{(p)}, \ldots$, extraite convenablement de la suite $\nu_2^{(p-1)}, \nu_3^{(p-1)}, \ldots \nu_k^{(p-1)}, \ldots$ telle que la limite

$$\lim_{\nu_k^{(p)} \to \infty} f_{\nu_k^{(p)}}(t)$$

existe dans l'intervalle $(-p, +p)$.

Cela étant, envisageons la suite $\mu_1 = \nu_1^{(1)}, \mu_2 = \nu_2^{(2)}, \ldots \mu_p = \nu_1^{(p)}, \ldots$ appartenant à toutes les suites $\nu_k^{(p)}$. En remarquant à présent que

$$\mu_p > p \to \infty,$$

on voit par conséquent que la limite

$$\lim_{\mu_p \to \infty} f_{\mu_p}(t)$$

existe dans chaque intervalle $(-p, +p)$, c'est-à-dire partout dans l'axe réel, c. q. f. d.

Comme simple corollaire de ce théorème découle la proposition suivante:

Théorème II. Soit $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ une suite arbitraire de nombres entiers positifs.

Si à chaque nombre positif L on peut faire correspondre la suite $\nu_1^{(L)}$, $\nu_2^{(L)}, \ldots \nu_k^{(L)}, \ldots$ choisie de la suite $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ de façon que la limite

$$\lim_{\nu_k^{(L)} \to \infty} f_{\nu_k^{(L)}}(t)$$

existe uniformement dans l'intervalle $(-L, +L)$, alors il existe une telle suite $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ de nombres entiers et positifs que uniformement dans chaque intervalle fini (de l'axe réel) on a

$$f_{\mu_k}(t) \underset{\mu_k \to \infty}{\longrightarrow} f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction définie sur tout axe réel, uniformement continue dans chaque intervalle fini.

Théorème III (généralisation du théorème de Hilbert).

Soit

$$\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t), \ldots \Phi_k(t), \ldots \tag{3}$$

la suite des fonctions à variation bornée.

Supposons qu'à chaque nombre positif L on peut faire correspondre de tels nombres positifs A_L et B_L que

$$\int_{-L}^{+L} |d\Phi_n(t)| \leqq A_L; \quad |\Phi_n(t)| \leqq B_L \qquad (-L \leqq t \leqq +L). \tag{4}$$

Alors il existe une telle suite $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ de nombres entiers et positifs que la limite

$$\lim_{\mu_k \to \infty} \Phi_{\mu_k}(t) = \Phi(t)$$

existe partout et soit une fonction à variation bornée vérifiant les inégalités

(5) $$\int_{-L}^{+L} |d\Phi(t)| \leqq A_L; \quad |\Phi(t)| \leqq B_L \qquad (-L \leqq t \leqq +L).$$

Démonstration. En effet quel que soit le nombre positif L, on s'assure d'après le théorème de Hilbert qu'on peut choisir la suite $\nu_1^{(L)}, \nu_2^{(L)}, \ldots \nu_k^{(L)}, \ldots$ appartenant à la suite arbitraire $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ de nombres entiers positifs de manière que la limite

$$\lim_{\nu_k^{(L)} \to \infty} \Phi_{\nu_k^{(L)}}(\lambda) = \Phi_{(L)}(\lambda)$$

existe partout dans l'intervalle $(-L, +L)$ et soit une fonction à variation bornée vérifiant le inégalités

$$\int_{-L}^{+L} |d\Phi_{(L)}(t)| \leqq A_{(L)}; \quad |\Phi_{(L)}(t)| \leqq B_{(L)} \qquad (-L \leqq t \leqq +L).$$

Par conséquent, en vertu du théorème I, on peut choisir une telle suite $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ des valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots$ que la limite

$$\lim_{\mu_k \to \infty} \Phi_{\mu_k}(t) = \Phi(t)$$

existe partout. Or, d'après sa construction même $\Phi(t)$ se confond dans l'intervalle $(-L, +L)$ avec une des fonctions $\Phi_{(L)}(t)$.

Par conséquent $\Phi(t)$ est réellement une fonction à variation bornée et vérifie les inégalités (5), c. q. f. d.

Remarque: Ce théorème reste valable, bien entendu, si au lieu d'une seule suite $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_k, \ldots$ on considère plusieurs suites $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k, \ldots$; $f_1, f_2, \ldots f_k, \ldots$; $\ldots \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k, \ldots$ vérifiant les conditions analogues.

Théorème IV. Soit $f_n(t)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots)$ la suite des fonctions définies sur tout axe réel.

Supposons qu'à chaque nombre positif L on peut faire correspondre un nombre positif A_L tel que

(6) $$\int_{-L}^{+L} |f_n(t)|^2 \, dt \leqq A_L^2;$$

alors on peut construire une suite $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ de nombres entiers et positifs telle que, uniformement dans chaque intervalle fini, on ait

$$\int_0^t f_{\nu_k}(t)\,dt \underset{\nu_k \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^t f(t)\,dt,$$

où $f(t)$ est une fonction vérifiant l'inégalité

$$\int_{-L}^{+L} |f(t)|^2\,dt \leqq A_L.$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour la démonstration de ce théorème il suffit, en tenant compte du théorème II, d'établir l'existence d'une telle suite $\nu_1^{(L)}, \nu_2^{(L)}, \ldots \nu_k^{(L)}, \ldots$ appartenant à la suite $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ des valeurs arbitraires de $n = 1, 2, \ldots k, \ldots$ que uniformement dans l'intervalle $(-L, +L)$ on ait

$$\int_0^t f_{\nu_k^{(L)}}(t)dt \longrightarrow \int_0^t f_{(L)}(t)\,dt,$$

où $f_{(L)}(t)$ est une fonction vérifiant l'inégalité

$$\int_{-L}^{+L} |f_{(L)}(t)|^2\,dt \leqq A_L^2.$$

Or cela peut être établi à l'aide du raisonnement suivant.

Par la simple application de l'inégalité de Schwarz on arrive à l'inégalité

$$\left|\int_{t'}^{t''} f_{\nu_k}(t)\,dt\right| \leqq \sqrt{(t''-t')\int_{t'}^{t''} |f_{\nu_k}(t)|^2\,dt}, \qquad (-L \leqq t' \leqq t'' \leqq L), \tag{7}$$

d'où l'on obtient

$$\left|\int_{t'}^{t''} f_{\nu_k}(t)\,dt\right| \leqq A_L\sqrt{(t''-t')},$$

ce qui montre que les fonctions

$$\int_0^t f_{\nu_k}(t)\,dt$$

sont également continues et bornées dans l'intervalle $(-L, +L)$.

Par conséquent, d'après le théorème d'Arzela, on s'assure qu'on peut extraire de la suite $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ une telle suite $\nu_1^{(L)}, \nu_2^{(L)}, \ldots \nu_k^{(L)}, \ldots$ que uniformement dans l'intervalle $(-L, +L)$ on ait

$$\int_0^t f_{\nu_k^{(L)}}(t)\,dt \rightarrow \Psi_{(L)}(t),$$

où $\Psi_{(L)}(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(-L, +L)$.

Remarquons à présent que si (α_i, β_i) sont des intervalles quelconques appartenant à l'intervalle $(-L, +L)$ qui ne s'empiètent pas, alors en vertu de l'inégalité (7) on reçoit

$$\sum_i \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_{\nu_k^{(L)}}(t)\,dt \right| \leqq A_L \sqrt{\sum_i |\beta_i - \alpha_i|},$$

d'où en passant à la limite on obtient

$$\sum_i |\Psi_{(L)}(\beta_i) - \Psi_{(L)}(\alpha_i)| \leqq A_L \sqrt{\sum_i |\beta_i - \alpha_i|}.$$

Or cette inégalité nous montre que $\Psi_{(L)}(t)$ est la fonction absolument continue dans l'intervalle $(-L, +L)$, de sorte que dans cet intervalle

$$\Psi_{(L)}(t) = \int_0^t f_{(L)}(t)\,dt,$$

où $f_{(L)}(t)$ est une fonction intégrable.

D'autre part de (6) on a

$$(8) \qquad \frac{1}{2L} \sum_{n=-p}^{n=+p} \left| \int_{-L}^{+L} f_{\nu_k^{(L)}}(t)\, e^{i\frac{n\pi}{L}t}\,dt \right|^2 \leqq \int_{-L}^{+L} \left| f_{\nu_k^{(L)}}(t) \right|^2 dt \leqq A_L^2.$$

On a en outre

$$\int_{-L}^{+L} e^{i\frac{n\pi}{L}t} f_{\nu_k^{(L)}}(t)\,dt \underset{\nu_k^{(L)}\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-L}^{+L} e^{i\frac{n\pi}{L}t} f_{(L)}(t)\,dt,$$

vu que

$$\int_0^t f_{\nu_k^{(L)}}(t)\,dt \underset{\nu_k^{(L)}\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f_{(L)}(t)\,dt.$$

Par conséquent en passant à la limite dans (8) on arrive à l'inégalité

$$\frac{1}{2L}\sum_{n=-p}^{n=+p}\left|\int_{-L}^{+L} f_{(L)}(t)\, e^{i\frac{n\pi}{L}t}\,dt\right|^2 \leqq A_L^2,$$

valable pour chaque valeur entière de p.

D'ici à l'aide du raisonnement habituel on s'assure que $f_{(L)}(t)$ est de carré intégrable et que

$$\int_{-L}^{+L} |f_{(L)}(t)|^2\,dt \leqq A_L^2,$$

c. q. f. d.

Théorème V. Soit $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots f_k(t), \ldots$ la suite des fonctions définies sur tout axe réel. Supposons qu'à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre le nombre entier n_ε de façon que

$$\int_{t-1}^{t+1} |f_m(t) - f_n(t)|^2\,dt \leqq \varepsilon \tag{9}$$

toutes les fois que $m \geqq n \geqq n_\varepsilon$; alors il existe une telle fonction $f(t)$ que la suite considérée converge en moyenne vers cette fonction.

Démonstration. Fixons en effet le nombre L arbitrairement grand. On a d'après (9)

$$\int_{-L}^{+L} |f_m(t) - f_n(t)|^2\,dt \leqq (L+1)\,\varepsilon \qquad (m \geqq n \geqq n_\varepsilon).$$

Par conséquent d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe dans l'intervalle $(-L, +L)$ une telle fonction $f(t)$ que

$$\int_{-L}^{+L} |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt \leqq (L+1)\,\varepsilon \qquad (n \geqq n_\varepsilon).$$

Or, le nombre L étant arbitrairement grand, la fonction $f(t)$ est définie sur tout axe réel.

En passant donc à la limite dans la relation (9) pour $m \to \infty$, on obtient ainsi la conclusion voulue, c. q. f. d.

Théorème VI. Soit $\rho_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite de fonctions définies dans un intervalle fini (a, b).

Supposons qu'il existe un tel nombre K que pour toute valeur de n on ait

$$\int_a^b |d\rho_n(x)| \leqq K. \tag{10}$$

Supposons aussi que la suite $\rho_n(x)$ converge en chaque point de l'intervalle (a, b) vers une fonction $\rho(x)$ vérifiant l'inégalité

$$\int_a^b |d\rho(x)| \leqq K. \tag{11}$$

Alors, si $p(x)$ est une fonction quelconque continue et bornée dans l'intervalle (a, b), on a

$$\int_a^b p(x)\, d\rho_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b p(x)\, d\rho(x).$$

D é m o n s t r a t i o n. Envisageons en effet les points

$$x_j = a + \frac{b-a}{m}\, j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots m)$$

et remarquons que

$$(12)\qquad \left|\int_a^b p(x)\,d\rho_n(x) - \sum_{j=0}^{m-1} p(x_j)\int_{x_j}^{x_{j+1}} d\rho_n(x) = \right.$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{m-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} (p(x)-p(x_j))\,d\rho_n(x) \leqq K\omega\left(\frac{b-a}{m}\right),\right.$$

où $\omega(\varepsilon)$ est le module de continuité de la fonction $p(x)$.

Or il est aisé de voir que (12) peut être reécrite sous la forme

$$(13)\qquad \left|\int_a^b p(x)\,d\rho_n(x) - \sum_{j=0}^{m-1} p(x_j)\left[\rho_n(x_{j+1}) - \rho_n(x_j)\right]\right| \leqq K\omega\left(\frac{b-a}{m}\right).$$

Fixant à présent le nombre positif ε arbitrairement petit, prenons le nombre m de façon que

$$(14)\qquad K\omega\left(\frac{b-a}{m}\right) \leqq \frac{\varepsilon}{4}$$

et prenons en correspondance le nombre positif n_ε de sorte que pour tout $n \geqq n_\varepsilon$ on ait

$$|\rho_n(x_j) - \rho(x_j)| \leqq \frac{\varepsilon}{4m \max\limits_{a\leqq x\leqq b}|p(x)|} \qquad (j=0, 1, \ldots m).$$

Alors pour chaque $n \geqq n_\varepsilon$ on aura

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} p(x_j)\left[\rho_n(x_{j+1}) - \rho_n(x_j)\right] - \sum_{j=0}^{m-1} p(x_j)\left[\rho(x_{j+1}) - \rho(x_j)\right]\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc en tenant compte de (13) et de (14) on reçoit

$$\left|\int_a^b p(x)\,d\rho_n(x) - \sum_{j=0}^{m-1} p(x_j)\left[p(x_{j+1}) - \rho(x_j)\right]\right| \leqq \frac{3\varepsilon}{4}$$

pour toute valeur (entière) de $n \geqq n_\varepsilon$.

D'autre part on voit immédiatement que

$$\left|\int_a^b p(x)\,d\rho(x)-\sum_{j=0}^{m-1}p(x_j)\left[\rho(x_{j+1})-\rho(x_j)\right]\right|\leqq K\omega\left(\frac{b-a}{m}\right)\leqq\frac{1}{4}\varepsilon.$$

Ainsi à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un tel nombre positif n_ε que pour tout $n\geqq n_\varepsilon$ on ait

$$\left|\int_a^b p(x)\,d\rho_n(x)-\int_a^b p(x)\,d\rho(x)\right|\leqq\varepsilon,$$

c. q. f. d.

Théorème VII (généralisation du théorème précédent au cas de l'intervalle infini). Soit $\rho_n(t)$, $(n=1,\ 2,\dots\ k,\dots)$ la suite des fonctions définies sur tout axe réel.

Supposons qu'en chaque point de cet axe la suite $\rho_n(t)$ converge vers une fonction $\rho(t)$.

Si les fonctions $\rho_n(t)$, $\rho(t)$ vérifient les conditions suivantes:

1°, à chaque nombre positif L on peut faire correspondre un tel nombre K_L que

$$\int_{-L}^{+L}|d\rho_n(t)|\leqq K_L,\qquad\int_{-L}^{+L}|d\rho(t)|\leqq K_L\qquad(n=1,\ 2,\dots k,\dots),$$

2°, il existe un tel nombre T_ε que

$$\left|\int_{\pm T_\varepsilon}^{\pm\infty}|p(t)\,d\rho_n(t)|\right|\leqq\frac{\varepsilon}{2}\qquad\left|\int_{\pm T_\varepsilon}^{\pm\infty}|p(t)\,d\rho(t)|\right|\leqq\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n=1,\ 2,\dots k,\dots),$$

où $p(t)$ est une fonction définie sur tout axe réel, continue dans chaque intervalle fini, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(t)\,d\rho_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}p(t)\,d\rho(t).$$

D é m o n s t r a t i o n. En fixant à l'arbitraire le nombre positif ε, prenons le nombre $Q=T_{\varepsilon/_2}$.

On a, en vertu des conditions du théorème,

$$\int_{Q}^{+\infty} |p(t)\, d\rho_n(t)| + \int_{-\infty}^{-Q} |p(t)\, d\rho_n(t)| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\int_{Q}^{+\infty} |p(t)\, d\rho(t)| + \int_{-\infty}^{-Q} |p(t)\, d\rho(t)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or en vertu du théorème V, en y posant $a = -Q$, $b = +Q$ (ce théorème est applicable au cas actuel vu la condition 1°), on obtient l'inégalité

$$\left| \int_{-Q}^{+Q} p(t)\, d\rho_n(t) - \int_{-Q}^{+Q} p(t)\, d\rho(t) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

valable à partir d'une certaine valeur de n.

Par conséquent à partir de cette valeur de n on a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, d\rho_n(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, d\rho(t) \right| \leqq \varepsilon,$$

c. q. f. d.

Théorème VIII. Si ω, q, ε sont les nombres réels dont ω est positif, alors on a

$$(15) \qquad \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left(\frac{\sin \omega k \varepsilon}{\omega k \varepsilon} \right)^2 e^{i\omega k q} = \begin{cases} 0, \text{ si } |q| \geqq 2|\varepsilon|, \ |q| + 2|\varepsilon| \leqq \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \dfrac{\pi}{\omega\varepsilon}, \text{ si } |q| = 0, \ |\varepsilon| \leqq \dfrac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

et aussi

$$(16) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right)^2 e^{i\lambda q}\, d\lambda = \begin{cases} 0, \text{ si } |q| \geqq 2|\varepsilon| \\ \dfrac{\pi}{\varepsilon}, \text{ si } |q| = 0, \ |\varepsilon| \leqq \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. En effet on constate aisément que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\omega k\varepsilon}{\omega k\varepsilon}\right]^2 e^{i\omega qk}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\omega k\varepsilon}{\omega k\varepsilon}\right]^2\cos\omega kq=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\omega kq}{\omega^2k^2\varepsilon^2}-\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\omega k(q+2\varepsilon)}{\omega^2k^2\varepsilon^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\omega k(q-2\varepsilon)}{\omega^2k^2\varepsilon^2}\right\}.$$

Or, comme il est bien connu,

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2k^2}\cos\omega kx=\frac{\pi^2}{6\omega^2}-\frac{x\left(\frac{2\pi}{\omega}-x\right)}{4}$$

pour

$$0\leqq x\leqq\frac{2\pi}{\omega}.$$

Par conséquent si

$$0\leqq q\leqq\frac{2\pi}{\omega},\qquad 0\leqq q+2\varepsilon\leqq\frac{2\pi}{\omega},\qquad q-2\varepsilon\leqq\frac{2\pi}{\omega},$$

alors

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\omega k\varepsilon}{\omega k\varepsilon}\right]^2 e^{i\omega qk}=1+\left\{\frac{\pi^2}{6\omega^2\varepsilon^2}-\frac{q\left(\frac{2\pi}{\omega}-q\right)}{4\varepsilon^2}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi^2}{6\omega^2\varepsilon^2}-\frac{\left(q+2\varepsilon\right)\left(\frac{2\pi}{\omega}-q-2\varepsilon\right)}{4\varepsilon^2}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi^2}{6\omega^2\varepsilon^2}-\frac{\left(q-2\varepsilon\right)\left(\frac{2\pi}{\omega}-q+2\varepsilon\right)}{4\varepsilon^2}\right\}=0.$$

Dans le cas où

$$q=0,\quad 0\leqq\varepsilon\leqq\frac{2\pi}{\omega},$$

on recoit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\omega k\varepsilon}{\omega k\varepsilon}\right]^2 e^{i\omega qk}=1+\frac{\pi^2}{6\omega^2\varepsilon^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\omega k\,2\varepsilon}{\omega^2k^2\varepsilon^2}=$$

$$=1+\frac{\pi^2}{6\omega^2\varepsilon^2}-\left\{\frac{2\pi^2}{6\omega^2\varepsilon^2}-2\,\frac{\varepsilon\left(\frac{2\pi}{\omega}-2\varepsilon\right)}{4\varepsilon^2}\right\}=\frac{\pi}{\omega\varepsilon}.$$

Nous avons donc démontré la première partie du théorème en question dans le cas où q et ε sont des nombres positifs.

Or, en remarquant que la fonction

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega k \varepsilon}{\omega k \varepsilon}\right)^2 e^{i\omega q k}$$

ne varie pas quand on change les signes de ε et de q, on conclut de ce qui précède que la première partie du théorème est établie dans toute sa généralité.

La 2-me partie se démontre à l'aide du simple passage à la limite dans la relation (15) pour $\omega \to 0$.

§ **2.** Les théorèmes préliminaires de caractère tout à fait élémentaire étant établis, on peut aborder à présent les propositions fondamentales de ce mémoire.

Théorème I. Soient

$$\tau_s^{(m)},\ p_s^{(m)} \qquad (s = -m, -m+1, \ldots +m),\ (m = 1, 2, \ldots)$$

les deux suites des nombres dont $p_s^{(m)}$ peuvent prendre les valeurs complexes qui vérifient les inégalités

$$\tau_{s+1}^{(m)} - \tau_s^{(m)} \geqq \alpha > 0, \quad |\tau_{\pm m}^{(m)}| \leqq Am, \quad \sum_{-m}^{+m} |p_s^{(m)}|^2\, m \leqq B,$$

où α, A, B sont des constantes positives.

Soint $f_m(t)$, $(m = 1, 2, \ldots)$ la suite des fonctions définies sur tout axe réel; supposons que ces fonctions vérifient l'inégalité

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^{+Q} |f_m(t)|^2\, dt \leqq C = \text{const}$$

pour tout $Q \geqq Am$.

Alors à chaque fonction $F(t)$ d'accumulation généralisée de la suite $F_m(t)$, où

$$F_m(t) = \sum_{-m}^{+m} p_s^{(m)} f_m(t + \tau_s^{(m)}),$$

on peut faire correspondre une telle fonction $\Phi(\lambda)$ définie sur tout axe réel, à variation bornée dans chaque intervalle fini, que $F(t)$ peut être approchée en moyenne par l'expression

$$\int_{-M}^{+\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\,\Phi(\lambda), \qquad \begin{matrix} \Lambda \to \infty \\ M \to \infty \end{matrix}$$

D é m o n s t r a t i o n. Montrons d'abord que la suite

$$F_m(t), \qquad (m = 1, 2, \ldots k, \ldots)$$

admet au moins une fonction d'accumulation généralisée.

A cet effet fixons à l'arbitraire un nombre positif L et remarquons que

$$\int_{-L}^{+L} |F_m(t)|^2\, dt \leqq \sum_{-m}^{+m} |p_s^{(m)}|^2 \sum_{-m}^{+m} \int_{-L}^{+L} |f_m(t + \tau_s^{(m)})|^2\, dt =$$

$$= \sum_{-m}^{+m} |p_s^{(m)}|^2 \sum_{-m}^{+m} \int_{-L+\tau_s^{(m)}}^{L+\tau_s^{(m)}} |f_m(t)|^2\, dt < \left(\frac{2L}{\alpha} + 1\right) \sum_{-m}^{+m} |p_s^{(m)}|^2 \int_{-L-Am}^{L+Am} |f_m(t)|^2\, dt \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{2L}{\alpha} + 1\right) BC \frac{2L + 2Am}{2m + 1} < \left(\frac{2L}{\alpha} + 1\right) BC \left\{\frac{2}{3} L + A\right\}.$$

Cette inégalité montre que les fonctions $F_m(t)$ vérifient les conditions du théorème IV du § 1 et par conséquent elles admettent réellement au moins une fonction d'accumulation généralisée.

Soit $F(t)$ une fonction d'accumulation généralisée et soit $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ la suite des nombres entiers choisie de façon que uniformement dans chaque intervalle fini on ait

$$\int_0^t F_{\nu_k}(t)\, dt \underset{\nu_k \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^t F(t)\, dt.$$

Cela étant, remarquons qu'on a

$$f_{\nu_k}(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s^{(\nu_k)} e^{i\omega_k s t}, \quad -2A\nu_k \leqq t \leqq +2A\nu_k,$$

où

$$\omega_k = \frac{\pi}{2A\nu_k}; \qquad A_s^{(\nu_k)} = \frac{1}{4A\nu_k}\int_{-2A\nu_k}^{+2A\nu_k} f_{\nu_k}(t)\, e^{-is\omega_k t}\, dt,$$

de sorte que

$$F_{\nu_k}(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} B_s^{(\nu_k)} e^{i\omega_k st}, \ -A\nu_k \leqq t \leqq +A\nu_k, \tag{17}$$

où

$$B_s^{(\nu_k)} = A_s^{(\nu_k)} \sum_{-\nu_k}^{+\nu_k} p_r^{(\nu_k)}\, e^{i\omega_k \tau_r^{(\nu_k)} s}.$$

Par conséquent

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \varepsilon\omega_k s}{\varepsilon\omega_k s} B_s^{(\nu_k)} \right| \leqq \tag{18}$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} \left| A_s^{(\nu_k)} \right|^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \varepsilon\omega_k s}{\varepsilon\omega_k s} \right|^2 \left\{ \left| \sum_{-\nu_k}^{+\nu_k} p_r^{(\nu_k)}\, e^{i\omega_k s \tau_r^{(\nu_k)}} \right|^2 \right\}}.$$

Or, en posant

$$|\varepsilon| \leqq \alpha, \quad A\nu_k > |\varepsilon|,$$

on trouve aisément, en tenant compte du théorème VIII du § 1,

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \varepsilon\omega_k s}{\varepsilon\omega_k s} \right|^2 \left\{ \left| \sum_{-\nu_k}^{+\nu_k} p_r^{(\nu_k)}\, e^{i\omega_k s \tau_r^{(\nu_k)}} \right|^2 \right\} =$$

$$= \sum_{u=-\nu_k}^{u=+\nu_k} \sum_{r=-\nu_k}^{r=+\nu_k} p_u^{(\nu_k)}\, \overline{p}_r^{(\nu_k)} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \varepsilon\omega_k s}{\varepsilon\omega_k s} \right|^2 e^{i\omega_k s\left(\tau_u^{(\nu_k)} - \tau_r^{(\nu_k)}\right)} \right\} =$$

$$= \sum_{-\nu_k}^{+\nu_k} \left| p_r^{(\nu_k)} \right|^2 \frac{\pi}{\omega_{\nu_k}\varepsilon} \leqq \frac{2AB}{\varepsilon}.$$

Donc, d'après (18) on reçoit

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \varepsilon\omega_k s}{\varepsilon\omega_k s} B_s^{(\nu_k)} \right| \leqq \sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon}}. \tag{19}$$

Soit à présent L un nombre positif et soit ε_L le plus petit des nombres

$$\frac{1}{L}, \quad \alpha,$$

On a évidemment pour

$$A_{\nu_k} > |\varepsilon_L|,$$

$$(20) \qquad \sum_{|s\omega_k| \leqq L} \left| B_s^{(\nu_k)} \right| < \max_{|z|<1} \left| \frac{z}{\sin z} \right| \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \omega_k s \varepsilon_L}{\omega_k s \varepsilon_L} B_s^{(\nu_k)} \right| < \frac{6}{5} \sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon_L}}.$$

Cela étant, envisageons les fonctions

$$(21) \qquad \Phi_{\nu_k}(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leqq s\omega_k \leqq \lambda} B_s^{(\nu_k)} & \text{si } \lambda \geqq 0 \\ B_0^{(\nu_k)} & \text{si } 0 > \lambda > -\omega_k \\ B_0^{(\nu_k)} \displaystyle\sum_{\lambda \leqq s\omega_k \leqq -\omega_k} B_s^{(\nu_k)} & \text{si } \lambda \leqq -\omega_k \end{cases}$$

$$(22) \qquad \Psi_{\nu_k}(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leqq s\omega_k \leqq \lambda} \left| A_s^{(\nu_k)} \right|^2 & \text{si } \lambda \geqq 0 \\ \left| A_0^{(\nu_k)} \right|^2 & \text{si } 0 > \lambda > -\omega_k \\ \left| A_0^{(\nu_k)} \right|^2 - \displaystyle\sum_{\lambda \leqq s\omega_k \leqq -\omega_k} \left| A_s^{(\nu_k)} \right|^2 & \text{si } \lambda \leqq -\omega_k, \end{cases}$$

qui sont évidemment à variation bornée et vérifient les inégalités suivantes tirées de (19), (20)

$$(23) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-L}^{+L} |d\Phi_{\nu_k}(\lambda)| < \frac{6}{5} \sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon_L}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |d\Psi_{\nu_k}(\lambda)| \leqq C \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda} d\Psi_{\nu_k}(\lambda) \right| < \sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon}} \quad \text{si } |\varepsilon| \leqq \alpha, \ A_{\nu_k} \geqq |\varepsilon|. \end{cases}$$

Les relations (23) montrent que les fonctions $\Phi_k(\lambda)$ et $\Psi_k(\lambda)$ vérifient les conditions du théorème III. Par conséquent de la suite $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots$ on peut choisir la suite $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ de façon que

$$(24) \qquad \Phi_{\mu_k}(\lambda) \underset{\mu_k \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(\lambda), \quad \Psi_{\mu_k}(\lambda) \underset{\mu_k \to \infty}{\longrightarrow} \Psi(\lambda),$$

où $\Phi(\lambda)$ et $\Psi(\lambda)$ vérifient les relations

$$
(25)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{-L}^{+L} |d\Phi(\lambda)| \leqq \frac{6}{5}\sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon_L}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |d\Psi(\lambda)| \leqq C,\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon_L}\, d\Phi(\lambda)\right| \leqq \sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon}} \quad \text{si } |\varepsilon| \leqq \alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

En utilisant à présent le théorème VI du § 1, on s'assure donc que

$$
(26)\qquad \int_a^b e^{i\lambda t}\, d\Phi_{\mu_k}(\lambda) \underset{\mu_k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)
$$

quels que soient les nombres a et b.

Cela étant, envisageons l'expression

$$
E(t, s_1, s_2) = \int_{t-1}^{t+1} \left| \sum_{s=s_1}^{s_2} B_s^{(\mu_k)} e^{i\omega_k' ts} \right|^2 dt,
$$

où

$$
\omega_k' = \frac{\pi}{2A^{\mu_k}}.
$$

On a évidemment

$$
E(t, s_1, s_2) < \frac{36}{25} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \left| \sum_{s=s_1}^{s_2} B_s^{(\mu_k)}\, e^{i\omega_k' st}\, e^{i\omega_k' sz} \right|^2 dz =
$$

$$
= \frac{36}{25} \sum_{r=s_1}^{r=s_2} \sum_{s=s_1}^{s=s_2} B_r^{(\mu_k)} \overline{B}_s^{(\mu_k)}\, e^{i\omega_k'(r-s)t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 e^{i\omega_k'(r-s)z}\, dz <
$$

$$
< \frac{36}{25}\,\pi \sum_{\substack{r=s_1\\ |r-s|\leqq\gamma_k}}^{r=s_2} \sum_{s=s_1}^{s=s_2} \left|B_r^{(\mu_k)}\right| \left|B_s^{(\mu_k)}\right|,
$$

où γ_k est le nombre entier le plus petit vérifiant l'inégalité

$$
\gamma_k > \frac{2}{\omega_k'}.
$$

Or on a

$$\sum_{\substack{r=s_1 \\ |r-s|\leqq\gamma_k}}^{r=s_2}\sum_{s=s_1}^{s=s_2}\left|B_r^{(\mu_k)}\right|\left|B_s^{(\mu_k)}\right| < 4\left\{\left[\sum_{r=s_1}^{r=s_1+2\gamma_k}\left|B_r^{(\mu_k)}\right|\right]^2 + \ldots + \left[\sum_{r=s_1+2l\gamma_k}^{r=s_2}\left|B_r^{(\mu_k)}\right|\right]^2\right\},$$

où l est le plus grand nombre entier vérifiant l'inégalité

$$s_1 + 2l\gamma_k \leqq s_2.$$

D'autre part

$$\left[\sum_{r=s_1+2p\gamma_k}^{r=s_1+2(p+1)\gamma_k}\left|B_r^{(\mu_k)}\right|\right]^2 \leqq \sum_{s=s_1+2p\gamma_k}^{r=s_1+2(p+1)\gamma_k}\left|A_r^{(\mu_k)}\right|^2 \sum_{r=s_1+2p\gamma}^{r=s_1+2(p+1)\gamma_k}\left|\sum_{-\mu_k}^{+\mu_k} p_u^{(\mu)k}\, e^{i\omega_k r \tau_u^{(\mu_k)}}\right|^2 <$$

$$< \frac{36}{25}\sum_{r=s_1+2p\gamma_k}^{r=s_1+2(p+1)\gamma_k}\left|A_r^{(\mu_k)}\right|^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\sin\dfrac{\omega_k' r}{\gamma_k\omega_k'}l_0}{\dfrac{\omega_k' r}{\gamma_k\omega_k'}l_0}\right\}^2\left|\sum_{-\mu_k}^{+\mu_k}\left\{p_u^{(\mu_k)}\, e^{i\omega_k'[s_1+(2p+1)\gamma_k]\tau_u^{(\mu_k)}}\right\} e^{i\omega_k' r\tau_u^{(\mu_k)}}\right|^2 =$$

$$= \frac{36}{25}\sum_{r=s_1+2p\gamma_k}^{r=s_1+2(p+1)\gamma_k}\left|A_r^{(\mu_k)}\right|^2\sum_{-\mu_k}^{+\mu_k}\left|p_u^{(\mu_k)}\right|^2 \frac{\pi}{\omega_k'\left[\dfrac{l_0}{\gamma_k\omega_k'}\right]} < \frac{36}{25}\,\frac{2AB}{l_0}\,\gamma_k\omega_k' \sum_{r=s_1+2p\gamma_k}^{r=s_1+2(p+1)\gamma_k}\left|A_r^{(\mu_k)}\right|^2,$$

où l_0 est le plus petit des nombres $1,\ 2\alpha$.

Ainsi

$$E(t, s_1, s_2) < 4\left(\frac{36}{25}\right)^2 \pi\,\frac{2AB}{l_0}\left(2 + \omega_k'\right)\sum_{r=s_1}^{s_2}\left|A_r^{(\mu_k)}\right|^2,$$

d'où l'on tire

$$\int_{t-1}^{t+1}\left|\int_a^b e^{i\lambda t} d\Phi_{\mu_k}(\lambda)\right|^2 dt < 4\left(\frac{36}{25}\right)^2 \pi\,\frac{2AB}{l_0}\left(2 + \omega_k'\right)\sum_{a\leqq r\omega_k'\leqq b}\left|A_s^{(\mu_k)}\right|^2 \leqq$$

$$\leqq S\left\{\Psi_u(b) - \Psi_n(a)\right\}, \qquad S = \text{const.}$$

En passant ici à la limite pour $\mu_k \to \infty$ on obtient de (24) et de (26)

$$\int_{t-1}^{t+1}\left|\int_a^b e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)\right|^2 dt \leqq S\left[\Psi(b) - \Psi(a)\right].$$

Par conséquent

$$\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|\int\limits_{\Lambda'}^{\Lambda''} e^{i\lambda t}\, d\,\Phi(\lambda)\right|^2 dt \leqq \varepsilon_{\Lambda'},\ \text{ où }\ \Lambda'' > \Lambda',\quad \varepsilon_{\Lambda' \to 0}\,,\atop {\Lambda' \to \infty}$$

car la fonction $\Psi(\lambda)$ est, d'après la loi même de sa construction, non décroissante et bornée.

Or, vu le théorème V du § 1, la relation obtenue montre qu'il existe une telle fonction $\varphi_1(t)$, de carré intégrable dans chaque intervalle fini, que

$$\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|\varphi_1(t) - \int\limits_{0}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\,\Phi(\lambda)\right|^2 dt \leqq \underset{\Lambda \to \infty}{\varepsilon_{\Lambda \to 0}}. \tag{27}$$

Tout pareillement on s'assure qu'il existe une fonction $\varphi_2(t)$ de carré intégrable dans chaque intervalle fini telle que

$$\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|\varphi_2(t) - \int\limits_{-M}^{0} e^{i\lambda t}\, d\,\Phi(\lambda)\right|^2 dt \leqq \underset{M \to \infty}{\eta_{M \to 0}}. \tag{28}$$

De (27) et de (28) on tire

$$\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|\varphi_1(t) + \varphi_2(t) - \int\limits_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\,\Phi(\lambda)\right|^2 dt \leqq 2\,(\varepsilon_\Lambda + \eta_M). \tag{29}$$

D'autre part, en intégrant la relation (17) et en présentant la série sous la forme de l'intégrale de Stiltjes, on trouve

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} F_{\mu_k}(t)\, dt^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^2 e^{i\lambda t}\, d\Phi_{\mu_k}(\lambda)$$

pour

$$-A\mu_k + 2\varepsilon \leqq t \leqq A\mu_k - 2\varepsilon,$$

où ε est un nombre positif fixe < 1.

En passant ici à la limite pour $\mu_k \to \infty$ on reçoit, en tenant compte du théorème VII du § 1,

$$(30) \qquad \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} F(t)\, dt^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^2 e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda),$$

car

$$\int\limits_0^t F_{\mu_k}(t)\, dt \to \int\limits_0^t F(t)\, dt.$$

Remarquons à présent que

$$\left|\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\left\{\varphi_1 + \varphi_2 - \int\limits_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)\right\} dt^2\right| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\left|\varphi_1 + \varphi_2 - \int\limits_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)\right|^2 dt^2} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}\max_{-\infty<t<+\infty}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\left|\varphi_1 + \varphi_2 - \int\limits_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)\right|^2 dt} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}\max_{-\infty<t<+\infty}\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|\varphi_1 + \varphi_2 - \int\limits_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)\right|^2 dt} \leqq \sqrt{\frac{\varepsilon_\Lambda + \eta_M}{\varepsilon}}.$$

C'est-à-dire que uniformement sur tout axe réel on a

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\{\varphi_1 + \varphi_2\}\, dt^2 - \int\limits_{-M}^{\Lambda}\left(\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^2 e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda) \underset{\substack{\Lambda\to\infty \\ M\to\infty}}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte que

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\left\{\varphi_1 + \varphi_2\right\} dt^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^2 e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda).$$

En comparant cette égalité avec (30), on trouve

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\{\varphi_1+\varphi_2-F\}\,dt^2=0,$$

d'où l'on conclut que presque partout on a

(31) $$\varphi_1+\varphi_2-F=0.$$

De (29) et de (31) on tire finalement

$$\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|F(t)-\int\limits_{-\mathrm{M}}^{\Lambda}e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)\right|^2dt\leqq 2(\varepsilon_\Lambda+\eta_{\mathrm{M}})\underset{\substack{\Lambda\to\infty\\ \mathrm{M}\to\infty}}{\longrightarrow}0,$$

ce qui montre que $F(t)$ peut être approchée en moyenne par l'expression

$$\int\limits_{-\mathrm{M}}^{\Lambda}e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)\quad \begin{matrix}\Lambda\to\infty\\ \mathrm{M}\to\infty\end{matrix},$$

c. q. f. d.

Corollaire. Si les fonctions $f_m(t)$, tout en vérifiant les conditions du théorème ci-dessus démontré, satisfont aussi à l'inégalité

(32) $$\frac{1}{2Q}\int\limits_{-Q}^{+Q}|f_m'(t)|^2\,dt\leqq D=\text{const},\qquad (m=1,\,2,\ldots),$$

où Q est un nombre positif quelconque $\leqq Am$, alors à toute fonction $F(t)$ d'accumulation de la suite $F_m(t)$ on peut faire correspondre une telle fonction $\Phi(\lambda)$ à variation bornée que uniformement sur tout axe réel on a

$$\int\limits_{-\mathrm{M}}^{+\Lambda}e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)\underset{\substack{\Lambda\to\infty\\ \mathrm{M}\to\infty}}{\longrightarrow}F(t).$$

La fonction $\Phi(\lambda)$ doit en outre vérifier la relation

$$(32_1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |d\Phi(\lambda)| = \text{fini}.$$

Démonstration. En effet d'après la condition (32) on constate que les fonctions $F_m(t)$ sont également continues dans chaque intervalle fini.

Par conséquent les fonctions d'accumulation généralisées, dont l'existence a été établie plus haut, sont dans le cas actuel des fonctions d'accumulation ordinaires.

Soit $F(t)$ une telle fonction; alors en appliquant les raisonnements du théorème précédent au cas de la suite dérivée $f'_m(t)$, on s'assure qu'il existe une fonction $\Phi_1(\lambda)$ à variation bornée dans chaque intervalle fini vérifiant l'inégalité

$$(33)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\, d\Phi_1(\lambda)\right| < \sqrt{\frac{2ABD}{\varepsilon}};$$

telle que uniformement dans tout axe réel on a

$$(34)\qquad \int_{t-1}^{t+1} \left| F'(t) - \int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi_1(\lambda)\right|^2 dt \underset{\substack{\Lambda\to\infty \\ M\to\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part en vertu du théorème I lui-même, il existe une fonction $\Phi(\lambda)$ vérifiant l'inégalité

$$(35)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\, d\Phi(\lambda)\right| \leqq \sqrt{\frac{2ABC}{\varepsilon}},$$

ainsi que la relation

$$(36)\qquad \int_{t-1}^{t+1} \left| F(t) - \int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda)\right|^2 dt \underset{\substack{\Lambda\to\infty \\ M\to\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

Cela étant, d'après (34) on conclut que

$$\frac{1}{2}\left\{F(t+h)-F(t-h)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\frac{\sin\lambda h}{\lambda}\,d\Phi_1(\lambda) \tag{37}$$

et de (36) on tire la relation (qui a lieu uniformement)

$$\int_{t-1}^{t+1}\left|\frac{1}{2}[F(t+h)-F(t-h)-\int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\sin\lambda h d\Phi(\lambda)\right|^2 dt \underset{\substack{\Lambda\to\infty\\ M\to\infty}}{\longrightarrow} 0. \tag{38}$$

En comparant à présent (37) et (38) on trouve

$$\lambda d\Phi(\lambda)=d\Phi_1(\lambda).$$

Or, quelle que soit la fonction $u(t)$, on a toujours

$$|u(t)|^2\leqq\frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}|u(t)|^2\,dt+2\sqrt{\int_{t-1}^{t+1}|u(t)|^2\,dt\int_{t-1}^{t+1}|u'(t)|^2\,dt}.$$

Par conséquent

$$\left|F(t)-\int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)\right|^2\leqq\frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}\left|F(t)-\int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}d\Phi(\lambda)\right|^2 dt+$$

$$+2\sqrt{\int_{t-1}^{t+1}\left|F(t)-\int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)\right|^2 dt\int_{t-1}^{t+1}\left|F'(t)-\int_{-M}^{\Lambda} e^{i\lambda t}\lambda d\Phi(\lambda)\right|^2 dt},$$

et d'ici à l'aide de (34), (36) on s'assure que uniformement sur tout axe réel on a

$$\int_{-M}^{\Lambda} e^{ti\lambda}\,d\Phi(\lambda)\underset{\substack{\Lambda\to\infty\\ M\to\infty}}{\longrightarrow} F(t).$$

La relation (32_1) découle immédiatement de (33) et (35).

Remarquons aussi que le théorème I de ce § ainsi que son corollaire peuvent se présenter respectivement sous la forme suivante des théorèmes II et III.

Théorème II. Si $p_s^{(m)}$, $\tau_s^{(m)}$ vérifient les conditions du théorème I et si dans l'intervalle $(+2Am, -2Am)$ on a

$$f_m(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(m)} e^{ik\omega_m t},$$

où

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |A_k^{(m)}|^2 \leqq C = \text{const} \qquad |\omega_m m| \leqq \alpha_1 = \text{const},$$

alors à chaque fonction $F(t)$ d'accumulation généralisée de la suite

$$F_m(t) = \sum_{-m}^{+m} p_s^{(m)} f_m(t + \tau_s^{(m)})$$

on peut faire correspondre une telle fonction à variation bornée (dans chaque intervalle fini) $\Phi(\lambda)$ que $F(t)$ pourrait être approchée en moyenne par l'expression

$$\int_{-\mathrm{M}}^{\Lambda} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda);$$

de plus on peut extraire de la suite m une telle suite $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n, \ldots$ que pour chaque valeur réelle de λ

$$\Phi_{\mu_n}(\lambda) \underset{\mu_n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(\lambda),$$

où

$$\Phi_{\mu_n}(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leqq k\omega_{\mu_n} \leqq \lambda} A_k^{(\mu_n)} \sum_{-\mu_n}^{+\mu_n} p_s^{(\mu_n)} e^{i\omega_{\mu_n} k \tau_s^{(\mu_n)}} & \text{si } \lambda \geqq 0 \\ \displaystyle A_0^{(\mu_n)} \sum_{-\mu_n}^{+\mu_n} p_s^{(\mu_n)} & \text{si } 0 \geqq \lambda > -\omega_{\mu_n} \\ \displaystyle A_0^{(\mu_n)} \sum_{-\mu_n}^{+\mu_n} p_s^{(\mu_n)} - \sum_{\lambda \leqq k\omega_{\mu_n} \leqq -\omega_{\mu_n}} A_k^{(\mu_n)} \sum_{-\mu_n}^{+\mu_n} p_s^{(\mu_n)} e^{i\omega_{\mu_n} k \tau_s^{(\mu_n)}} & \text{si } \lambda \leqq -\omega_{\mu_n} \end{cases}$$

Théorème III. Si toutes les conditions du théorème II sont vérifiées et si en outre

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |A_k^{(m)}|^2 k^2 \omega_m^2 \leqq D = \text{const},$$

alors à chaque fonction $F(t)$ d'accumulation de la suite $F_m(t)$ on peut faire correspondre la fonction $\Phi(\lambda)$ de façon que $F(t)$ pourrait être représentée sur tout axe réel par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$$

uniformement et absolument convergente.

Théorème IV. Soient

$$\tau_s^{(m)},\ \delta_s^{(m)},\ q_s^{(m)},\ p_s^{(m)} \qquad (s = -m,\ -m+1, \dots +m),\ (m = 1, 2, \dots)$$

les suites des nombres, dont $\tau_s^{(m)}$, $\delta_s^{(m)}$ sont réels; supposons qu'ils vérifient les conditions restrictives suivantes:

$$(39) \qquad \begin{cases} \tau_{s+1}^{(m)} - \tau_s^{(m)} \geqq \alpha, & |\tau_{\pm m}^{(m)}| \leqq Am, \quad \sum_{-m}^{+m} |p_s^{(m)}|^2 m \leqq B \\ \delta_{s+1}^{(m)} - \delta_s^{(m)} \geqq \alpha, & |\delta_{\pm m}^{(m)}| \leqq Am, \quad \sum_{-m}^{+m} |q_s^{(m)}|^2 m \leqq B, \end{cases}$$

où α, A et B sont des constantes positives.

Soit $f_m(t)$ une suite de fonctions définies sur tout axe réel vérifiant l'inégalité

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^{+Q} |f_m(t)|^2 \, dt \leqq C.$$

Alors à chaque fonction $F(t)$ d'accumulation généralisée de la suite

$$F_m(t) = \sum_{-m}^{+m} \sum_{-m}^{+m} p_s^{(m)} q_r^{(m)} f_m(t + \tau_s^{(m)} + \delta_r^{(m)})$$

on peut faire correspondre deux telles suites des nombres

$$A_1,\ A_2, \dots \qquad \lambda_1,\ \lambda_2, \dots$$

dont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont réels, que $F(t)$ peut être approchée en moyenne à l'aide des sommes

$$\sum_{-\mathrm{M} \leqq \lambda_k \leqq \Lambda} A_k \, e^{i\lambda_k t} \qquad \begin{matrix} \mathrm{M} \to \infty \\ \Lambda \to \infty \end{matrix}$$

D é m o n s t r a t i o n. Envisageons en effet les fonctions $g_m(t)$ définies à l'aide des relations suivantes:

$$g_m(t) = \sum_{-m}^{+m} q_r^{(m)} f_m(t + \delta_r^{(m)}).$$

On a évidemment

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^{+Q} |g_m(t)|^2 \, dt < \sum_{-m}^{+m} |q_r^{(m)}|^2 \sum_{-m}^{+m} \frac{1}{2Q} \int_{-Q}^{+Q} |f_m(t + \delta_r^{(m)})|^2 \, dt.$$

Or d'après l'inégalité

$$|\delta_r^{(m)}| \leqq Am \qquad\qquad (r = -m \ldots\ldots + m)$$

[qui résulte immédiatement des conditions (39)] on remarque que

$$\int_{-Q}^{+Q} |f_m(t + \delta_r^{(m)})|^2 \, dt \leqq \int_{-(Q+Am)}^{+(Q+Am)} |f_m(t)|^2 \, dt,$$

donc

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^{+Q} |g_m(t)|^2 \, dt < B \, \frac{2m+1}{2Qm} \int_{-(Q+Am)}^{+(Q+Am)} |f_m(t)|^2 \, dt.$$

Par conséquent si

$$Q \geqq Am,$$

alors

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^{+Q} |g_m(t)|^2 \, dt < 4BC.$$

Remarquons à présent que

$$F_m(t) = \sum_{-m}^{+m} p_s^{(m)} g_m(t + \tau_s^{(m)}).$$

En appliquant donc au cas actuel le théorème I, on s'assure que la suite $F_m(t)$ admet au moins une fonction d'accumulation généralisée et qu'à chaque telle fonction $F(t)$ on peut faire correspondre la fonction $\Phi(\lambda)$ à variation bornée dans chaque intervalle fini de façon que $F(t)$ puisse être approchée par l'expression

$$\int_{-M}^{+\Lambda} e^{i\lambda t}\, d\Phi(\lambda), \quad \begin{matrix}\Lambda\to\infty \\ M\to\infty\end{matrix}.$$

Ainsi, pour démontrer le théorème en question, il nous reste à prouver que $\Phi(\lambda)$ et une fonction purement discontinue. Cela aura sûrement lieu si, en fixant à l'arbitraire le nombre positif L, on pouvait trouver deux suites (en général infinies) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots; A_1, A_2, \ldots$, de façon que pour chaque fonction $\varphi(t)$ continue dans $(-L, +L)$ on aurait identiquement

$$\int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\, \varphi(\lambda_p) \qquad (-L \leqq \lambda_p \leqq +L).$$

Pour démontrer cette identité remarquons que

$$f_m(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(m)}\, e^{ik\omega_m t}, \quad -3Am \leqq t \leqq +3Am,$$

où

$$\omega_m = \frac{\pi}{3Am}, \quad A_k^{(m)} = \frac{1}{6Am}\int_{-3Am}^{+3Am} f_m(t)\, e^{-ik\omega_m t}\, dt.$$

Alors

$$(40) \qquad g_m(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(A_k^{(m)} \sum_{-m}^{+m} q_s^{(m)}\, e^{ik\omega_m \delta_s^{(m)}} \right) e^{ik a_m t}, -2Am \leqq t \leqq +2Am.$$

On a évidemment

$$(41) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| A_k^{(m)} \sum_{-m}^{+m} q_s^{(m)}\, e^{ik\omega_m \delta_s^{(m)}} \right|^2 \leqq C \sum_{-m}^{+m} \left| q_s^{(m)} \right| < 3BC.$$

En appliquant donc au cas actuel le théorème II, on démontre qu'on peut construire la suite $\mu_1, \mu_2, \ldots$ de nombres entiers et positifs de façon que pour chaque valeur réelle de λ

$$\Phi_{\mu_n}(\lambda) \underset{\mu_n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(\lambda),$$

où

$$\Phi_{\mu_n}(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0 \leq k\omega_{\mu_n} \leq \lambda} B_k^{(\mu_n)} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ B_0^{(\mu_n)} & \text{si } 0 \geq \lambda > -\omega_{\mu_n} \\ B_0^{(\mu_n)} - \sum\limits_{\lambda \leq k\omega_{\mu_n} \leq -\omega_{\mu_n}} B_k^{(\mu_n)} & \text{si } \lambda \leq -\omega_{\mu_n} \end{cases}$$

et où

$$B_k^{(\mu_n)} = A_k^{(\mu_n)} \sum_{-\mu_n}^{+\mu_n} p_s^{(\mu_n)} e^{i\omega_{\mu_n} k\tau_s^{(\mu_n)}} \sum_{-\mu_n}^{+\mu_n} q_s^{(\mu_n)} e^{i\omega_{\mu_n} k\delta_s^{(\mu_n)}}.$$

Cela étant, d'après le théorème VI du § 1 on constate que

$$(42) \qquad \sum_{|k\omega_{\mu_n}| \leq L} B_k^{(\mu_n)} \varphi(k\omega_{\mu_n}) = \int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi_{\mu_n}(t) \underset{\mu_n \to \infty}{\longrightarrow} \int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t).$$

Reénumerons à présent toutes les $A_k^{(\mu_n)}$ pour lesquelles

$$|k\omega_{\mu_n}| \leq L$$

de manière à construire la suite $A_{p,\,\mu_n}$ telle que

$$|A_{p,\,\mu_n}| \geq |A_{p+1,\,\mu_n}|.$$

Soient $\lambda_{p,\,\mu_n}$; $B_{p,\,\mu_n}$ les $k\omega_{\mu_n}$ et $B_k^{(\mu_n)}$ correspondant à $A_{p,\,\mu_n}$. On a évidemment d'après (42)

$$(43) \qquad \sum_p B_{p,\,\mu_n} \varphi(\lambda_{p,\,\mu_n}) \underset{\mu_n \to \infty}{\longrightarrow} \int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t).$$

Il est aisé de voir qu'on a aussi

$$\sum_p |A_{p,\,\mu_n}|^2 \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |A_k^{(\mu_n)}|^2 \leq C,$$

ce qui donne

$$|A_{p,\,\mu_n}| \leqq \sqrt{\frac{C}{p}},$$

de sorte que

$$|B_{p,\,\mu_n}| \leqq \sqrt{\frac{C}{p}} \cdot \sum_{-m}^{+m} |p_s^{(m)}| \sum_{-m}^{+m} |q_s^{(\mu_n)}| \leqq 3\,B \sqrt{\frac{C}{p}}.$$

Envisageons les suites des nombres

$$\lambda_{\substack{p,\,\mu_n;\\ \mu_n \to \infty}} \qquad B_{\substack{p,\,\mu_n\\ \mu_n \to \infty}}$$

bornés dans leur ensemble d'après ce qui précède.

Il existe évidemment une telle suite $\rho_1, \rho_2, \ldots$ extraite convenablement de la suite $\mu_1, \mu_2, \ldots$ que pour chaque valeur entière et positive de p on aurait

(44) $$\lambda_{\substack{p,\,\rho_n\\ \rho_n \to \infty}} \to \lambda_p, \qquad B_{\substack{p,\,\rho_n\\ \rho_n \to \infty}} \to A_p,$$

où λ_p, A_p sont respectivement les valeurs d'accumulation des suites

$$(\lambda_{p,\,\mu_n}), \qquad (B_{p,\,\mu_n}).$$

Remarquons maintenant que

$$\sum_{p \geqq k} |B_{p,\,\rho_n}| \leqq \sqrt{\frac{C}{k}} \sqrt{\sum_{|2\omega_{\rho_n}| \leqq L} \left| \sum_{-\rho_n}^{+\rho_n} p_s^{(\rho_n)}\, e^{il\omega_{\rho_n}\tau_s^{(\rho_n)}} \right|^2 \sum_{|2\omega_{\rho_n}| \leqq L} \left| \sum_{-\rho_n}^{+\rho_n} q_s^{(\rho_n)}\, e^{il\omega_{\rho_n}\delta_s^{(\rho_n)}} \right|^2} \leqq$$

$$< \frac{36}{25}\sqrt{\frac{C}{k}} \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin l\omega_{\rho_n}\varepsilon_0}{l\omega_{\rho_n}\varepsilon_0}\right)^2 \left| \sum_{-\rho_n}^{+\rho_n} p_s^{(\rho_n)}\, e^{il\omega_{\rho_n}\tau_s^{(\rho_n)}} \right|^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin l\omega_{\rho_n}\varepsilon_0}{l\omega_{\rho_n}\varepsilon_0}\right)^2 \left| \sum_{-\rho_n}^{+\rho_n} q_s^{(\rho_n)}\, e^{il\omega_{\rho_n}\delta_s^{(\rho_n)}} \right|^2},$$

où ε_0 est le plus petit des nombres L^{-1}, α.

On a donc

$$\sum_{p \geqq k} |B_{p,\,\rho_n}| \leqq \sqrt{\frac{C}{k}} \cdot \frac{36}{25} \cdot \sqrt{\sum_{-\rho_n}^{+\rho_n} |p_s^{(\rho_n)}|^2 \frac{\pi}{\omega_{\rho_n}\varepsilon_0}} \sqrt{\sum_{-\rho_n}^{+\rho_n} |q_s^{(\rho_n)}|^2 \frac{\pi}{\omega_{\rho_n}\varepsilon_0}} \leqq$$

$$\leqq \frac{36}{25}\sqrt{\frac{C}{k}} \cdot \frac{2AB}{\varepsilon_0} = \frac{S}{\sqrt{k}},$$

où

$$S = \frac{72}{25} AB\sqrt{C}.$$

D'ici à l'aide du passage convenable à la limite (pour $\rho_n \to \infty$) on trouve

$$\sum_{p \geqq k} |A_p| \leqq \frac{S}{\sqrt{k}}. \tag{45}$$

Cela étant, fixons à l'arbitraire le nombre positif ε et prenons l'entier k_ε de façon que

$$\frac{S}{\sqrt{k_\varepsilon}} \leqq \frac{\varepsilon}{3 \max\limits_{-L \leqq t \leqq +L} |\varphi(t)|}; \tag{46}$$

alors

$$\left| \sum_p B_{p,\rho n} \varphi(\lambda_{p,\rho n}) - \sum_{p=1}^{k_\varepsilon} B_{p,\rho n} \varphi(\lambda_{p,\rho n}) \right| \leqq \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{47}$$

Or de (43) et de (44) il résulte que pour chaque valeur fixée de ε

$$u_{\rho n} \equiv \left| \sum_{p=1}^{k_\varepsilon} B_{p,\rho n} \varphi(\lambda_{p,\rho n}) - \sum_{p=1}^{k_\varepsilon} A_p \varphi(\lambda_p) \right| \underset{\rho n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$v_{\rho n} \equiv \left| \sum_p B_{p,\rho n} \varphi(\lambda_{p,\rho n}) - \int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t) \right| \underset{\rho n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc fixer le nombre entier n_ε de manière que

$$u_{\rho n} + v_{\rho n} \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad \rho n \geqq \rho n_\varepsilon. \tag{48}$$

De (47) et de (48) on tire donc

$$\left| \int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t) - \sum_{p=1}^{k_3} A_p \varphi(\lambda_p) \right| \leqq \frac{2}{3}\varepsilon,$$

d'où, vu (45), (46), on conclut

$$\left|\int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t) - \sum_{p=1}^{\infty} A_p\, \varphi(\lambda_p)\right| \leqq \varepsilon,$$

et d'ici, en remarquant que ε peut être fixé arbitrairement petit, on reçoit finalement

$$\int_{-L}^{+L} \varphi(t)\, d\Phi(t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\, \varphi(\lambda_p),$$

c. q. f. d.

Si l'on applique au cas du théorème démontré le corollaire au théorème I, on arrive à la proposition suivante.

Théorème V. Si les conditions du théorème IV sont vérifiées et si de plus

$$\frac{1}{2Q}\int_{-Q}^{+Q} |f_m'(t)|^2\, dt \leqq D \qquad (Q \geqq Am),$$

alors chaque fonction d'accumulation $F(t)$ de la suite

$$F_m(t) = \sum_{-m}^{+m} \sum_{-m}^{+m} p_s^{(m)}\, q_r^{(m)}\, f_m(t + \tau_s^{(m)} + \delta_r^{(m)})$$

peut être représentée sur tout axe réel par la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_p\, e^{i\lambda pt}$$

absolument et uniformement convergente.

Les théorèmes IV et V peuvent être présentés évidemment sous la forme suivante.

Théorème VI. Si $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$, $\tau_s^{(m)}$, $\delta_s^{(m)}$ vérifient les conditions du théorème IV et si dans l'intervalle $(+3Am, -3Am)$ on a

$$f_m(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(m)}\, e^{ik\omega_m t},$$

où

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |A_k^{(m)}|^2 \leqq C = \text{const} \quad |\omega_m m| \leqq \alpha_1 = \text{const},$$

alors à chaque fonction $F(t)$ d'accumulation généralisée de la suite

$$F_m(t) = \sum_{-m}^{+m} \sum_{-m}^{+m} p_s^{(m)} q_r^{(m)} f_m(t + \delta_r^{(m)} + \tau_s^{(m)})$$

on peut faire correspondre de tels nombres B_p, λ_p que $F(t)$ peut être approchée en moyenne par l'expression

$$\sum_{-M \leqq \lambda_p \leqq +\Lambda} B_p e^{i\lambda_p t} \qquad \begin{matrix} \Lambda \to \infty \\ M \to \infty \end{matrix}.$$

De plus, on peut construire la suite ρ_1, $\rho_2, \ldots$ de nombres entiers de façon que

$$A^{(\rho_n)}_{k^{(p)}_{\rho_n}} \sum_{-\rho_n}^{\rho_n} p_s^{(\rho_n)} e^{ik^{(p)}_{\rho_n} \omega_{\rho_n} \tau_s^{(\rho_n)}} \sum_{-\rho_n}^{\rho_n} q_s^{(\rho_n)} e^{ik^{(p)}_{\rho_n} \omega_{\rho_n} \delta_s^{(\rho_n)}} \longrightarrow B_p$$

$$k^{(p)}_{\rho_n} \omega_{\rho_n} \longrightarrow \lambda_p \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

où $k^{(p)}_{\rho_n}$ sont les suites des nombres entiers.

Théorème VII. Si toutes les conditions du théorème VI sont vérifiées et si en outre

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |A_k^{(m)}|^2 k^2 \omega_m^2 \leqq D = \text{const},$$

alors chaque fonction $F(t)$ d'accumulation de la suite $F_m(t)$ peut être représentée sur tout axe réel par la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_p e^{i\lambda pt}$$

absolument et uniformement convergente. B_p et λ_p vérifient les relations.
