В. В. Дубровский, В. Х. Аливердиев, Асимптотика собственных значений одного сингулярного дифференциального оператора,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 35–40

https://www.mathnet.ru/de8267

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.983:517.91

В. В. ДУБРОВСКИЙ, В. Х. АЛИВЕРДИЕВ

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим дифференциальный оператор T на отрезке $[-1, 1]$:

$$Ty=-(1-x^2)y''+2xy',$$

где y, $Ty\in L_2(1, -1)$. Его собственным значениям $\lambda_n=n(n+1)$ соответствуют ортонормированные собственные функции

$$v_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),\ n=0, \dots, \infty,$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n со старшим коэффициентом $(2n)!/2^n(n!)^2$. Так как $v_n(x)$, $n=0, \dots, \infty$, полны в $L_2(-1, 1)$, то можно легко показать, что оператор T является самосопряженным. Пусть $p(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1, 1]$, а P — оператор умножения на функцию $p(x)$ в $L_2[-1, 1]$. Обозначим собственные значения оператора $T+P$ через μ_n, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Исходя из поправок теории возмущений, находим несколько членов асимптотики μ_n. Для этого запишем сначала ряд из поправок теории возмущений [1, с. 18] для μ_n:

$$\mu_n=\lambda_n+(Pv_n, v_n)+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{(Pv_n, v_i)(Pv_i, v_n)}{n(n+1)-i(i+1)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Sp}\int\limits_{|\lambda-\lambda_n|=n+1}(P(T-\lambda E)^{-1}))^3 d\lambda+\dots$$

Оценим четвертую поправку теории возмущений (последующие члены оцениваются аналогично). Вблизи $\lambda_n=n(n+1)$ имеем

$$(T-\lambda E)^{-1}=\frac{P_{-1}}{\lambda-n(n+1)}+P_0+(\lambda-n(n+1))P_1+$$

$$+(\lambda-n(n+1))^2P_2+\dots,$$

где P_{-1} — одномерный оператор. Тогда

$$(P(T-\lambda E)^{-1})^3=\Bigg[P\Bigg(\frac{P_{-1}}{\lambda-n(n+1)}+P_0+$$

$$+(\lambda-n(n+1))P_1+(\lambda-n(n+1))^2P_2+\dots\Bigg)\Bigg]^3=$$

$$=\frac{PP_{-1}PP_{-1}PP_{-1}}{(\lambda-n(n+1))^3}+\dots+\frac{PP_{-1}PP_0PP_0+PP_0PP_{-1}PP_0}{\lambda-n(n+1)}+$$

$$+\frac{PP_0PP_0PP_{-1}+PP_{-1}PP_{-1}PP_1+PP_1PP_{-1}PP_{-1}+PP_{-1}PP_1PP_{-1}}{\lambda-n(n+1)}+\dots$$

Отсюда следует, что оператор

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_n|=n+1}(P(T-\lambda E)^{-1})^3 d\lambda = PP_{-1}PP_0PP_0+PP_0PP_{-1}PP_0+$$
$$+PP_0PP_0PP_{-1}+PP_{-1}PP_{-1}PP_1+PP_1PP_{-1}PP_{-1}+PP_{-1}PP_1PP_{-1}$$

не более чем шестимерен. Однако

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_n|=n+1}(P(T-\lambda E)^{-1})^3 d\lambda\right\| \leqslant \frac{O(1)}{n^2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Sp}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_n|=n+1}(P(T-\lambda E)^{-1})^3 d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant 6\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_n|=n+1}(P(T-\lambda E)^{-1})^3 d\lambda\right\| \leqslant \frac{O(1)}{n^2}.$$

Иначе говоря, имеет место равенство

$$\mu_n = n(n+1) + (Pv_n, v_n) + \sum_{\substack{i=0,\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{(Pv_n, v_i)(Pv_i, v_n)}{n(n+1)-i(i+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Рассмотрим вначале член (Pv_n, v_n). Используем известное асимптотическое разложение Стилтьеса для полиномов Лежандра [2, с. 197]

$$P_n(\cos\alpha) = \frac{\cos((n+1/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{f_0}{\sqrt{n}}+\frac{f_1}{n\sqrt{n}}+\frac{o(1)}{n^{5/2}}\right]+$$
$$+\frac{\sin((n+3/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{3/2}}\left[\frac{g_0}{n\sqrt{n}}+\frac{O(1)}{n^{5/2}}\right]+$$
$$+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}n^{5/2}},\quad 0<\alpha<\pi,$$

где $|O(1)|$ не превышает некоторую константу, не зависящую от n и α [3, с. 171], $f_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $f_1=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $g_0=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Тогда имеем

$$v_n^2(x) = \frac{2n+1}{2}P_n^2(x) = \frac{2n+1}{2}P_n^2(\cos\alpha) =$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left\{\frac{\cos^2((n+1/2)\alpha-\pi/4)}{\sin\alpha}\left[\frac{f_0^2}{n}+\frac{2f_0f_1}{n^2}+\frac{O(1)}{n^3}\right]+\right.$$
$$+\frac{2\cos((n+1/2)\alpha-\pi/4)\sin((n+3/2)\alpha-\pi/4)}{\sin\alpha}\left[\frac{f_0g_0}{n^2}+\frac{O(1)}{n^3}\right]+$$
$$+\frac{\sin^2((n+3/2)\alpha-\pi/4)}{\sin^3\alpha}\left[\frac{g_0^2}{n^3}+\frac{O(1)}{n^4}\right]+$$
$$\left.+\frac{O(1)}{\sin^3\alpha n^3}+\frac{O(1)}{\sin^4\alpha n^4}+\frac{O(1)}{\sin^5\alpha n^5}\right\},$$

где, как и раньше, $|O(1)|$ не превышает некоторую константу, не зависящую от n и α. Далее

$$(Pv_n, v_n) = \int_{-1}^{1} P(x)\,\frac{2n+1}{2}\,P_n^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\,P_n^2(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha =$$

$$= \Big(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\Big) P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\,P_n^2(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\left\{\frac{1+\sin((2n+1)\alpha)}{2}\right\}\left[\frac{f_0^2}{n} + \frac{2f_0f_1}{n^2} + \frac{O(1)}{n^3}\right] d\alpha +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\,\frac{1-\sin((2n+3)\,\alpha)}{2\sin^2\alpha}\left[\frac{g_0^2}{n^3} + \frac{O(1)}{n^4}\right] d\alpha +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{P(\cos\alpha)}{\sin\alpha}\,\frac{2n+1}{2}\,(-\cos((2n+2)\,\alpha) + \sin\alpha)\left[\frac{f_0g_0}{n^2} +\right.$$

$$\left.+\frac{O(1)}{n^3}\right] d\alpha + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{O(1)}{n^3\sin^2\alpha}\,d\alpha + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{O(1)}{n^4\sin^3\alpha}\,d\alpha +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{O(1)}{n^5\sin^4\alpha}\,d\alpha \equiv \sum_{i=1}^{7} \varphi_i(\varepsilon, n).$$

Число $\varepsilon = \varepsilon(n)$ будет выбрано позднее. Оценим каждое из $\varphi_i(\varepsilon, n)$. По теореме Бернштейна (см. [2, с. 205]) имеем $|\sin\alpha P_n^2(\cos\alpha)| < 2/\pi n$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Следовательно, предполагая, что $p(-1) = p(1) = 0$,

$$|\varphi_1(\varepsilon_1, n)| = \Big|\Big(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\Big) P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\,P_n^2(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\Big| \leqslant O(\varepsilon^2).$$

Основным результатом работы является вывод следующего равенства:

$$\varphi_2(\varepsilon, n) = \frac{f_0^2}{2}\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\left(f_0f_1 + \frac{f_0^2}{4}\right) d\alpha +$$

$$+ O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Далее,

$$\varphi_3(\varepsilon, n) = -\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\,\frac{\sin((2n+3)\alpha)}{2\sin^2\alpha}\left[\frac{g_0^2}{n^3} +\right.$$

$$\left.+ \frac{O(1)}{n^4}\right] d\alpha = O\left(\frac{1}{\varepsilon n^2}\right).$$

Кроме того,

$$\varphi_4(\varepsilon, n) = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\,\frac{2n+1}{2}\,\frac{\sin\alpha - \cos((2n+2)\alpha)}{\sin\alpha}\left[\frac{f_0g_0}{n^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{O(1)}{n^3}\right] d\alpha = \frac{f_0g_0}{n}\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\,d\alpha + O(\varepsilon/n) -$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{P(\cos\alpha)}{\sin\alpha}\,\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{f_0g_0}{n^2} + \frac{O(1)}{n^3}\right] d[\sin((2n+2)\alpha)] =$$

$$= \frac{f_0g_0}{n}\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\,d\alpha + O(\varepsilon/n) - O\left(\frac{\ln\varepsilon}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon n^3}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n^4}\right).$$

Наконец,

$$\varphi_5(\varepsilon, n)=\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{O(1)}{\sin^2\alpha n^3}\,d\alpha=O\left(\frac{1}{\varepsilon n^2}\right),$$

$$\varphi_6(\varepsilon, n)=\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{O(1)}{\sin^3\alpha n^4}\,d\alpha=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n^3}\right),$$

$$\varphi_7(\varepsilon, n)=\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{O(1)}{\sin^4\alpha n^5}\,d\alpha=O\left(\frac{1}{\varepsilon^3 n^4}\right).$$

Собираем вместе оценки для $\varphi_j(\varepsilon, n)$, $j=1, \dots, 7$:

$$\int_0^{\pi} P(x)\,v_n^2(x)\,dx=O(\varepsilon^2)+\frac{f_0^2}{2}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\left(f_0f_1+\frac{f_0^2}{4}\right)d\alpha+O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O(\varepsilon^3)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\varepsilon n^2}\right)+\frac{f_0g_0}{n}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)+O\left(\frac{\ln\varepsilon}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon n^3}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n^4}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon n^2}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n^3}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^3 n^4}\right).$$

. Полагая далее $\varepsilon=(n)^{-3/4}$, будем иметь

$$\int_0^{\pi} P(x)\,v_n^2(x)\,dx=\frac{f_0^2}{2}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\left(f_0f_1+\frac{f_0^2}{4}\right)d\alpha+\frac{f_0g_0}{n}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right).$$

Получаем окончательно

$$\int_0^{\pi} P(x)\,v_n^2(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}P(\cos\alpha)\,d\alpha+O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right).$$

Рассмотрим третью поправку теории возмущений:

$$\alpha_2(n)=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{(Pv_n, v_i)(Pv_i, v_n)}{n(n+1)-i(i+1)}. \qquad (1)$$

Подставим в (Pv_n, v_i) выражения

$$v_n(\cos\alpha)=\frac{f_0\cos((n+1/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{1/2}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sin^{3/2}\alpha},$$

$$v_i(\cos\alpha)=\frac{f_0\cos((i+1/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{1/2}}+O\left(\frac{1}{i}\right)\frac{1}{\sin^{3/2}\alpha}.$$

В результате получим

$$(Pv_n, v_i)=\left(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\right)P(\cos\alpha)\,v_n(\cos\alpha)\,v_i(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha+$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}P(\cos\alpha)f_0^2\cos((n+1/2)\alpha-\pi/4)\cos((i+1/2)\alpha-\pi/4)\,d\alpha+$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\,\frac{O(1/i)}{\sin\alpha}\,d\alpha+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{P(\cos\alpha)O(1/n)}{\sin\alpha}\,d\alpha+$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{O(1/in)}{\sin^2\alpha}\,d\alpha=O(\varepsilon^2)+O\left(\frac{\ln\varepsilon}{n}\right)+O\left(\frac{\ln\varepsilon}{i}\right)+$$

$$+\frac{f_0^2}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\ [\sin((n+i+1)\alpha)+\cos((n-i)\alpha)]\,d\alpha=$$

$$=O\left(\frac{1}{i+n}\right)+O\left(\frac{\ln\varepsilon}{n}\right)+O\left(\frac{\ln\varepsilon}{i}\right)+O(\varepsilon^2)+$$

$$+\frac{f_0^2}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P(\cos\alpha)\cos((n-i)\alpha)\,d\alpha.$$

Положим теперь $\varepsilon=(n)^{3/4}$. Тогда

$$(Pv_n,\,v_i)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\cos((n-i)\alpha)\,d\alpha+O\left(\frac{1}{i+n}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)+O\left(\frac{\ln n}{i}\right).$$

Далее находим

$$(Pv_n,\,v_i)\,(Pv_i,\,v_n)=\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\cos((n-i)\alpha)\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{i+n}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)+O\left(\frac{\ln n}{i}\right)\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\cos((n-\right.$$

$$\left.-i)\alpha)\,d\alpha\right]^2+O\left(\frac{1}{i+n}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)+O\left(\frac{\ln n}{i}\right).$$

Подставляя данное выражение в (1), получаем

$$\alpha_2(n)=\beta_1(n)+\beta_2(n)+\beta_3(n)+\beta_4(n),$$

$$\beta_2(n)=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{O(1)}{(n-i)\,(n+i)^2}=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

$$\beta_3(n)=O(\ln n)\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\,(n+i)i}=O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right),$$

$$\beta_4(n)=O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{1}{i^2-n^2}=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

И наконец,

$$\beta_1(n)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\,(n+i+1)}\left[\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\cos((n-i)\alpha)\,d\alpha\right]^2=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(2n-k+1)}\left[\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\cos(k\alpha)\,d\alpha\right]^2-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(2n+k+1)}\left[\int_0^{\pi} P(\cos\alpha)\cos(k\alpha)\,d\alpha\right]^2=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда $\alpha_2(n)=O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Итак, доказана следующая

Теорема. *Если p — дважды непрерывно дифференцируемая функция и $p(-1)=p(1)=0$, то асимптотическое разложение собственных чисел μ_n оператора $T+P$ имеет вид*

$$\mu_n=n^2+n+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P(\cos\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi P(\cos\alpha)\,d\alpha+O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right),$$

$$n=1,\ \ldots,\ \infty.$$

Авторы благодарны Е. И. Моисееву и В. А. Садовничему за постановку задачи и конструктивную критику.

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1974. Т. 2.

3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17 августа 1993 г.