

Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли и Эйлера

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Ключевые слова: многочлены и числа Бернулли и Эйлера, рекуррентные соотношения с пропусками.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14099>

1. Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$, как обычно, обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t| < 2\pi$, а второе – при $|t| < \pi$, а символами B_n и E_n – числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами

$$B_n = B_n(0), \quad E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

соответственно (см., например, [1; п. 23, формулы 23.1.1 и 23.1.2]). Хорошо известно, что

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{1-n})B_n, \quad E_n(0) = -\frac{2(2^{n+1} - 1)B_{n+1}}{n + 1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

(см., например, [1; п. 23, формулы 23.1.21 и 23.1.20]) и

$$B'_n(z) = nB_{n-1}(z), \quad E'_n(z) = nE_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

(см., например, [1; п. 23, формулы 23.1.5]).

Известны также формулы разложения многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$ в ряды Фурье, в частности, при $0 \leq x \leq 1$ и $n = 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$B_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}, \quad (3)$$

$$E_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^n 4(2n-1)!}{\pi^{2n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n}} \quad (4)$$

(см., например, [1; п. 23, формулы 23.1.18 и 23.1.17]) и классические линейные неоднородные рекуррентные соотношения для многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) = nx^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^n C_n^k E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

(см., например, [1; п. 23, формулы 23.1.6 и 23.1.7] и [2; гл. 24, формулы 24.5.1 и 24.5.2]).

Рекуррентные соотношения с пропусками для чисел Бернулли и Эйлера изучаются с конца XIX века и до сих пор остаются в центре внимания многих математиков. История

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20261, <https://rscf.ru/project/20-11-20261/>.

вопроса до 1930 года вкратце освещена в работе Лемера [3], а до 1980 г. – в работе Вагстаффа [4]. Особо отметим первую печатную работу Рамануджана [5] (вошедшую позже в [6] и последующие издания этой книги), в которой найдены линейные рекуррентные соотношения для чисел Бернулли с пропусками длины 4, 6, 8 и 10. В работах [3]–[5] и [7] приведены различные явные рекуррентные формулы с пропусками длины 4, 6, 8, 10 и 12, содержащие числа B_n и E_n . Символами α_m , β_m , γ_m и δ_m , $m = 0, 1, \dots$, обозначим последовательности чисел

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m, & \beta_m &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m, \\ \gamma_m &= \left(i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m - \left(i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m, & \delta_m &= \left(i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \end{aligned}$$

и в терминах этих последовательностей приведем примеры следующих известных рекуррентных соотношений для них с пропусками длины восемь (см. [5], [7] и [3]):

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{8n+4}^{8k+4} B_{8(n-k)} = (-1)^n (2n+1) \alpha_{4n+2}, \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (2^{8n} - 2^{8k+1}) \alpha_{4k+2} C_{8n+4}^{8k+4} B_{8(n-k)} = (2n+1) 2^{4n-2} \sqrt{2} (\gamma_{8n+3} - \beta_{8n+3}), \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{8k} \alpha_{4k} C_{8n}^{8k} E_{8(n-k)} = 2^{4n-1} (\alpha_{8n} + \delta_{8n}). \quad (7)$$

В настоящей работе найдены лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли $B_{8k+s}(x)$ и Эйлера $E_{8k+s}(x)$ при фиксированном $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *При $m = 0, 1, \dots$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[m/8]} (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{m+4}^{8k+4} B_{m-8k}(z) &= \frac{i(m+4)}{2^{m+6}} \sum_{j=1}^8 (-1)^{j-1} (2z-1+a_j)^{m+3} \\ &= \frac{m+4}{2^{m+5}} \sum_{k=0}^{[m/2]+1} (-1)^k (\sqrt{2})^{2k+1} (\gamma_{2k+1} - \beta_{2k+1}) C_{m+3}^{2k+1} (2z-1)^{m-2k+2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[m/8]} (-1)^k \alpha_{4k} C_m^{8k} E_{m-8k}(z) &= \frac{1}{2^{m+2}} \sum_{j=1}^8 (2z-1+a_j)^m \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k 2^k (\alpha_{2k} + \delta_{2k}) C_m^{2k} (2z-1)^{m-2k}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} - i, & a_2 &= \sqrt{2} + i, & a_3 &= -\sqrt{2} - i, & a_4 &= -\sqrt{2} + i, \\ a_5 &= -i(\sqrt{2} - 1), & a_6 &= i(\sqrt{2} - 1), & a_7 &= i(\sqrt{2} + 1), & a_8 &= -i(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Как мы уже отмечали выше, лакунарными рекуррентными соотношениями для чисел B_n и E_n исследователи интересуются давно, а соответствующие соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера изучены мало. Кроме нашей работы [8] нам известна только работа [9], содержащая рекуррентные соотношения с пропусками длины 4 и 6 для них.

В п. 2 и 3 настоящей работы изложен метод доказательства теоремы 1, основанный на применении спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, предложенный авторами ранее и изложенный, например, в работе [10], и намечена схема ее

доказательства. Теорема 1 позволяет единообразно получить и соответствующие равенства для чисел B_{8k+s} и E_{8k+s} (см. следствия 1 и 2), в том числе и равенства (5)–(7), что и сделано в п. 4.

2. Пусть $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Символом S_α обозначим самосопряженный оператор, порожденный в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ – в пространстве квадратично интегрируемых по Лебегу функций на отрезке $[0, \pi]$ – выражением

$$l_1[y] := iy'$$

и граничным условием

$$y(0) = e^{\pi i \alpha} y(\pi).$$

Хорошо известно, что S_α является самосопряженным оператором с дискретным, простым спектром. Известно также, что числа $2k + \alpha$ являются собственными значениями, а функции

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(2k+\alpha)x}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

– соответствующими им ортонормированными собственными функциями оператора S_α .

Пусть далее $n \in \mathbb{N}$ и $0 < a < 1$. Рассмотрим многочлен $P_{2n}(x) = x^{2n} - a^{2n}$ и оператор $P_{2n}(S_\alpha)$. Этот оператор, очевидно, является самосопряженным оператором, порожденным выражением

$$l_{2n}[y] = (-1)^n y^{(2n)} - a^{2n} y$$

и граничными условиями

$$U_{j+1}(y) := y^{(j)}(0) - e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi) = 0, \quad j = 0, \dots, 2n - 1.$$

Область определения \mathcal{D}_α этого оператора определяется равенством

$$\mathcal{D}_\alpha = \{y \mid y^{(j-1)} \in AC[0, \pi], P_{2n}(S_\alpha)y \in \mathcal{L}^2[0, \pi], U_j(y) = 0, j = 1, \dots, 2n\},$$

и если $y \in \mathcal{D}_\alpha$, то

$$P_{2n}(S_\alpha)y = l_{2n}[y].$$

Спектр σ оператора $P_{2n}(S_\alpha)$ является дискретным и имеет вид

$$\sigma = \{\lambda \mid \lambda = \lambda_{nk} := P_{2n}(2k + \alpha), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

а собственному значению λ_{nk} этого оператора соответствует собственная функция φ_k , соответствующая собственному значению λ_k оператора S_α .

Заметим, что $\lambda = 0$ не принадлежит спектру оператора $P_{2n}(S_\alpha)$. Поэтому он имеет обратный оператор – резольвенту $R_\alpha = (P_{2n}(S_\alpha) - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda = 0$, являющуюся интегральным оператором с ядром $G((x, t); P_{2n}(S_\alpha))$, $0 \leq x, t \leq \pi$, – функцией Грина задачи

$$\begin{cases} l_{2n}[y] = f, \\ U_j(y) = 0, \quad j = 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Построим функции Грина $G((x, t); S_\alpha^{2n} \pm a^{2n})$ при значениях $n = 1$ и 2.

Вычисления показывают, что при $n = 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} G((x, t), S_0^2 - a^2) &= -\frac{\cos a(\pi/2 - |u|)}{2a \sin(a\pi/2)}, & G((x, t), S_1^2 - a^2) &= \frac{\sin a(\pi/2 - |u|)}{2a \cos(a\pi/2)}, \\ G((x, t), S_0^2 + a^2) &= \frac{\operatorname{ch} a(\pi/2 - |u|)}{2a \operatorname{sh}(a\pi/2)}, & G((x, t), S_1^2 + a^2) &= \frac{\operatorname{sh} a(\pi/2 - |u|)}{2a \operatorname{ch}(a\pi/2)}, \end{aligned}$$

где здесь и всюду далее $u = x - t$.

Легко показать, что при $n = 2$ справедлива формула

$$G((x, t), S_\alpha^4 - a^4) = \int_0^\pi G((x, \tau), S_\alpha^2 - a^2) \cdot G((\tau, t), S_\alpha^2 + a^2) d\tau.$$

Используя ее, можно показать, что при $\alpha = 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & -4a^2 \sin \frac{a\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2} G((x, t), S_0^4 - a^4) \\ & = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^{4m+1}}{(4m+1)!} \left(\left(1 + i \left(1 - \frac{2|u|}{\pi} \right) \right)^{4m+1} + \left(1 - i \left(1 - \frac{2|u|}{\pi} \right) \right)^{4m+1} \right) a^{4m}, \end{aligned}$$

а при $\alpha = 1$ – равенство

$$\begin{aligned} & 4i \cos \frac{a\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{a\pi}{2} G((x, t), S_1^4 - a^4) \\ & = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^{4m+3}}{(4m+3)!} \left(\left(1 + i \left(1 - \frac{2|u|}{\pi} \right) \right)^{4m+3} - \left(1 - i \left(1 - \frac{2|u|}{\pi} \right) \right)^{4m+3} \right) a^{4m}. \end{aligned}$$

Можно получить аналогичные соотношения для функций $G((x, t), S_\alpha^4 + a^4)$, если в приведенных выше равенствах заменить a на ϵa , где $\epsilon = (1+i)/\sqrt{2}$, предварительно обосновав эту возможность.

Перейдем теперь к построению функции Грина $G((x, t); S_\alpha^8 - a^8)$. Установив равенство

$$G((x, t), S_\alpha^8 - a^8) = \int_0^\pi G((x, \tau), S_\alpha^4 - a^4) \cdot G((\tau, t), S_\alpha^4 + a^4) d\tau$$

и используя полученные выше разложения для функций $G((x, t), S_\alpha^4 \pm a^4)$, можно показать, что

$$G((x, t), S_0^8 - a^8) = \frac{1}{\mathcal{B}(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^{8m+3}}{(8m+3)!} q_{8m+3} \left(\frac{|u|}{\pi} \right) a^{8m}, \quad (10)$$

$$G((x, t), S_1^8 - a^8) = \frac{1}{\mathcal{C}(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^{8m+7}}{(8m+7)!} Q_{8m+7} \left(\frac{|u|}{\pi} \right) a^{8m}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a) &= 16a^4 \sin \frac{a\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2} \sin \frac{\epsilon a\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{\epsilon a\pi}{2}, & \mathcal{C}(a) &= 16 \cos \frac{a\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{a\pi}{2} \cos \frac{\epsilon a\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\epsilon a\pi}{2}, \\ q_s \left(\frac{|u|}{\pi} \right) &= \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \left(\frac{2|u|}{\pi} - 1 + a_j \right)^s, & Q_s \left(\frac{|u|}{\pi} \right) &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{2|u|}{\pi} - 1 + a_j \right)^s. \end{aligned}$$

Напомним, что числа a_1, a_2, \dots, a_8 были определены нами в формулировке теоремы 1.

С другой стороны, применив спектральную теорему к самосопряженному оператору $P_8(S_\alpha)$ и учтя разложения (3) и (4), заключаем, что справедливы равенства

$$G((x, t), S_0^8 - a^8) = -\frac{1}{\pi a^8} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2ku}{(2k)^8 - a^8} = -\frac{1}{\pi a^8} - \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\pi^{8s-1} B_{8s}(u/\pi)}{(8s)!} a^{8(s-1)}, \quad (12)$$

$$G((x, t), S_1^8 - a^8) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)u}{(2k+1)^8 - a^8} = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\pi^{8s-1} E_{8s-1}(u/\pi)}{2(8s-1)!} a^{8(s-1)}. \quad (13)$$

3. Теперь наметим доказательство теоремы 1. Из равенств (10) и (12) следует, что при $0 \leq u \leq \pi$

$$-\mathcal{B}(a) \left(\frac{1}{\pi a^8} + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\pi^{8s-1}}{(8s)!} B_{8s} \left(\frac{u}{\pi} \right) a^{8(s-1)} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^{8m+3}}{(8m+3)!} q_{8m+3} \left(\frac{u}{\pi} \right) a^{8m}.$$

Разложим левую часть этого равенства в ряд по степеням a и в полученном равенстве приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. После некоторых элементарных преобразований приходим к справедливости равенства

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{8n+4}^{8k+4} B_{8(n-k)}(z) = \frac{(2n+1)i}{2^{8n+4}} q_{8n+3}(z),$$

где $z = u/\pi$.

Это соотношение, очевидно, справедливо при любом комплексном z . Если в нем заменить n на $n+1$, продифференцировать полученное тождество нужное количество раз, учтя при этом первую из формул (2), то можно получить все рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли. Таким образом, справедливы равенства (8).

Если исходить из представлений (11) и (13) и рассуждать аналогично, используя вторую часть равенства (2), то можно получить рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Эйлера, т.е. равенства (9).

4. Теорема 1 позволяет получить все известные рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для чисел Бернулли и Эйлера. Действительно, полагая $z = 1/2$ в равенствах теоремы 1 и учтя определение чисел Эйлера и первое из равенств (1), приходим к справедливости такого следствия из нее.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $m = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{[m/4]} (-1)^k 2^{8k} \alpha_{4k} C_{2m}^{8k} E_{2m-8k} = (-1)^m 2^{m-1} (\alpha_{2m} + \delta_{2m}),$$

$$\sum_{k=0}^{[m/4]} (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{2m+4}^{8k+4} (1 - 2^{1-2m+8k}) B_{2m-8k} = (-1)^m \frac{m+2}{\sqrt{2}} (\gamma_{2m+3} - \beta_{2m+3}).$$

Если же положить $z = 0$ в тех же равенствах и учесть определение чисел Бернулли и второе из равенств (1), то после некоторых элементарных преобразований заключаем, что справедливо такое следствие из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $m = 0, 1, \dots$ и $j = 0, 1$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{8m+4+2j}^{8k+4} B_{8(m-k)+2j} = (-1)^m \frac{4m+2+j}{2} \alpha_{4m+2+j},$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{8m+8+2j}^{8k+4} B_{8(m-k)+4+2j} = (-1)^{m+1-j} \frac{4m+4+j}{2\sqrt{2}} \beta_{4m+3+j},$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_{4k} C_{8m+2j}^{8k} (1 - 2^{8(m-k)+2j}) B_{8(m-k)+2j} = (-1)^{m+1} \frac{4m+j}{2} \alpha_{4m+j},$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_{4k} C_{8m+4+2j}^{8k} (1 - 2^{8(m-k)+4+2j}) B_{8(m-k)+4+2j} = (-1)^{m+j} \frac{4m+2+j}{2\sqrt{2}} \beta_{4m+1+j}.$$

Тождества, по сути совпадающие с тождествами из следствий 1 и 2, хорошо известны (см. [3]–[5] и [7]) и неоднократно использовались, например, в исследованиях об арифметических свойствах знаменателей чисел Бернулли (см. [4] и [11]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York, 1972. [2] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge, New York, 2010. [3] D. H. Lehmer, *Ann. of Math.* (2), **36**:3 (1935), 637–649. [4] S. Wagstaff Jr., *J. Indian Math. Soc.*, **45**:1–4 (1981), 49–65. [5] S. Ramanujan, *J. Indian Math. Soc.*, **3** (1911), 219–234. [6] G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, B. M. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927. [7] M. Merca, *Bull. Korean Math. Soc.*, **56**:2 (2019), 491–499. [8] K. A. Mirzoev, T. A. Safonova, *J. Math. Sci.*, **270**:4 (2023), 600–608. [9] S. Zhi-Hong, *Recurrence Formulas with Gaps for Bernoulli and Euler Polynomials*, arXiv: abs/1403.0435. [10] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Тр. ММО*, **80**:2 (2019), 157–177. [11] F. T. Howard, *J. Number Theory*, **52**:1 (1995), 157–172.

К. А. Мирзоев

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило

08.07.2023

Принято к публикации

25.09.2023

Т. А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: t.Safonova@narfu.ru